53
GL
F181

BULETINUL
POLITEHNICII „GH. ASACHI"
DIN IAŞI

BULLETIN
DE
L'ECOLE POLYTECHNIQUE
DE JASSY

Tome 3

(Fasc. 1, Janvier à Juin 1948)

Editeur — POLITECHNICA „Gh. Asachi" din Iaşi —
— L'École Polytechnique de Jassy —
Iaşi — Jassy
1948

711
1/48-1
61

Le présent *Bulletin* se compose des articles originaux de Mathématique, Physique, Chimie, Sciences naturelles et Technique pas encore publiés *in extenso* dans d'autres revues scientifiques.

Le Comité de Rédaction se propose de faire publier chaque année deux fascicules du *Bulletin* d'environ 160 pages chacun.

Les auteurs assument toute responsabilité en ce que regarde les articles publiés.

Les manuscris, d'un style concis et correct, doivent être rédigés en français et dactylographiés. Le *Bulletin* publie aussi les articles des auteurs de l'étranger rédigés en anglais, en français, en espagnol, en italien et en allemand. L'ordre de leur publication correspond en principe à la classification décimale internationale. Selon les possibilités, chaque auteur reçoit gratuitement au moins 50 tirages à part. Les prix des clichés sont à la charge des auteurs.

Des que les conditions techniques le permettront, les manuscrits pourront être rédigés dans n'importe quelle langue d'usage international courant.

COMITÉ DE RÉDACTION

Prof. Dr. Ing. Gh. Alexa
Prof. Dr. Al. Cişman
Prof. Dr. D. I. Mangeron
Prof. Ing. Dr. César Parteni
Prof. Dr. Şt. Popesco

AVIS

Toutes le communications relatives à la rédaction et à l'administration du *Bulletin de l'Ecole Polytechnique de Jassy* (envoi des manuscrits, abonnements, échanges, services des numéros, etc.) doivent être adressées à M. le Prof. D. I. Mangeron, Directeur du

Séminaire Mathématique de
L'Ecole Polytechnique de Jassy
Jassy — Iaşi
(République Populaire Roumaine)

Prix de l'abonnement pour un an (2 fascicules) à partir du 1-er janvier 1948:

Etranger. Tarif international: 20 frs. suisses; le fascicule: 10 frs. suisses.
Abonamentul anual: 2.000 lei, o fascicolă 1.000 lei.
Abonamentul pentru autorităţi: 5.000 lei.
Abonamentele se achită pînă la 15 August 1948.

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE AL. A. ŢEREK, STR. DOBROGEANU GHEREA 9, - IAŞI
PRINTED IN R. P. ROUMANIA

BULETINUL
POLITEHNICII „GH. ASACHI"
DIN IAŞI

BULLETIN
DE
L'ECOLE POLYTECHNIQUE
DE JASSY

Tome 3

(Fasc. 1. Janvier à Juin 1948)

Editeur — POLITEHNICA „Gh. Asachi" din Iaşi —
— L'École Polytechnique de Jassy —
Iaşi — Jassy
1948

F
1812

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
4185

Copyright by Politehnica „Gh. Asachi" din Iaşi.

Nr. Agrementului Comisiei Aliate de Control din România 763 din 30. 5. 1946.

Nr. Aprobării apariţiei Buletinului 663 din 1. 6. 1946.

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE ALEXANDRU A. ŢEREK, STR. MĂRZESCU 9. - IAŞI
PRINTED IN ROUMANIA

Buletinul Politehnicii „Gh. Asachi" din Iaşi
Bulletin de l'École Polytechnique de Jassy
Tome III. Fasc. 1. (Janvier à Juin 1948)

512

QUELQUES PRÉCISIONS CONCERNANT LE THÉORÈME DE M. B. SEGRE SUR DES APPROXIMATIONS ASYMÉTRIQUES DES NOMBRES IRRATIONNELS PAR LES RATIONNELS

par

NICOLAE NEGOESCU

1. M. B. Segre [1]), en 1945, a démontré géométriquement le suivant :

Théorème I. Tout nombre irrationnel θ a une infinité d'approximations rationnelles $\frac{p}{q}$ telles que l'on ait

$$(1) \qquad -\frac{1}{q^2\xi} < \frac{p}{q} - \theta < \frac{\tau}{q^2\xi}$$

où τ est réel $\geqslant 0$ et $\xi = \sqrt{1+4\tau}$.

Une démonstration arithmétique pour le cas $\tau \geqslant 1$ a été donnée par M. Olds [2]), en modifiant convenablement la méthode de M. Khintchine [3]), méthode fondée sur les suites de Farey.

Dans cette note, nous donnons une nouvelle démonstration arithmétique qui a l'avantage d'être complète, c'est-à-dire valable aussi pour $0 \leq \tau < 1$, et qui apporte quelques précisions à la démonstration de M. B. Segre.

La métode employée est une généralisation de la méthode de M. Borel [4]).

Fractions continues. On sait que tout nombre irrationnel θ peut être développé uniquement en fraction continue simple infinie de la forme

(2) $\theta = [a_0, a_1, a_2 \ldots]$, a_0 entier et a_i entiers $\geqslant 1$ $(i = 1,2,3,\ldots)$.

En désignant par $\frac{p_n}{q_n}$ la réduite d'ordre n

$$(3) \qquad \frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n],$$

on a

$$(4)\qquad \frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \ldots < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \ldots < \theta < \ldots < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < \ldots < \frac{p_1}{q_1},$$

$$(5)\qquad \begin{cases} p_n = a_n\, p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_n = a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}, \end{cases}$$

$$(6)\qquad p_{n-1}\, q_n - p_n\, q_{n-1} = (-1)^n,$$

$$(7)\qquad \left| \theta - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2} \text{ pour tout } n,$$

et toutes les réduites sont des fractions irréductibles.

Nombres équivalents. Si α et β sont deux nombres tels que

$$(8)\qquad \alpha = \frac{a\,\beta + b}{c\,\beta + d},$$

où a, b, c, d, sont des entiers tels que $ad - bc = \pm 1$, α et β sont dits équivalents et on désigne l'équivalence par $\alpha \sim \beta$.
La condition ci-dessus est équivalente à :

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_m, c_1, c_2, \ldots] \qquad \beta = [b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, c_1, c_2, \ldots]$$

avec m et n entiers positifs quelconques.

Pour abréger on désigne :

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, \overline{b_m, b_1, b_2, \ldots, b_m}, b_1, \ldots] = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \overline{b_1, b_2, \ldots, b_m}].$$

L'approximation des irrationnels. Les théorèmes d'approximation des nombres irrationnels sont dûs à plusieurs mathématiciens du dernier siècle. Dirichlet démontre pour la première fois le théorème donné par (7), puis Hermite (en 1851) donne une méthode de construction d'une suite infinie de fractions approximant un nombre irrationnel θ, tel que $\left|\theta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2\sqrt{3}}$. Plus tard, Hurwitz[5]), Vahlen[6]), M. Borel, Fujiwara[7]), Humbert, O. Perron, Shibata etc. donnent des théorèmes de même nature.

Pour les indications bibliographiques plus vastes, on peut consulter J. P. Koksma[8]).

Nous n'allons énoncer que trois de ces théorèmes : 1° le théorème de Vahlen, 2° celui de Hurwitz-Borel et 3° celui ce Hurwitz-Fujiwara parce qu'ils sont liés plus étroitement avec le théorème I.

Théorème II (Vahlen). L'une au moins des deux réduites consécutives de l'irrationnel θ, et par suite une infinité, satisfait à

$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2q_n^2}.$$

Théorème III. (Hurwitz-Borel). Il y a une infinité de réduites du θ telles que

$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,q_n^2}.$$

Théorème III$_1$. L'une au moins de trois réduites consécutives satisfait à l'inégalité ci-dessus (précision de M. Borel).

Théorème IV. (Hurwitz-Fujiwara). Lorsque θ n'est pas équivalent à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, il y a une infinité de réduites qui satisfont à

$$\left|\theta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{\sqrt{8}\,q_n^2}.$$

Théorème IV$_1$. Si $a_{n+1} \geqslant 2$, l'une au moins des réduites d'ordre $n-1$, n, $n+1$ satisfait à l'inégalité ci-dessus (précision de Fujiwara).

Les précisions, faites par nous, à l'occasion de la démonstration du théorème I, sont pareilles à celles données par les théorèmes II et III$_1$.

M. B. Segre donne aux approximations fournies par les théorèmes II, III et IV le nom de symétriques et à celles de I, asymétriques.

2. *Démonstration et discussions du théorème I.*

Nous démontrerons le théorème I à quatre reprises, en considérant, tout d'abord deux réduites consécutives, dont la première est d'ordre impair (A) ou d'ordre pair (B). et puis trois réduites consécutives, dont la première est d'ordre pair (C), ou d'ordre impair (D).

A) En modifiant la définition de l'écart relatif, donnée par M. Borel, nous définirons λ comme il suit :

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right| = \lambda\left(\frac{\tau}{q^2} + \frac{1}{s^2}\right)$$

et le nommerons l'écart relatif de $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$.

Considérons maintenant l'écart λ_{2n} de deux réduites consécutives du nombre irrationnel θ, en commençant avec une réduite d'ordre impair

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \lambda_{2n}\left(\frac{\tau}{q_{2n-1}^2} + \frac{1}{q_{2n}^2}\right).$$

En vertu de $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \theta < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$ et de la formule (6), il s'ensuit

$$\frac{1}{\lambda_{2n}} = \tau \frac{q_{2n}}{q_{2n-1}} + \frac{q_{2n-1}}{q_{2n}}$$

et en posant $\frac{q_i}{q_{i-1}} = \mu_i$, il vient

$$\frac{1}{\lambda_{2n}} = \tau\mu_{2n} + \frac{1}{\mu_{2n}}. \tag{9}$$

Pour la demonstration on doit avoir $\lambda_{2n} < \frac{1}{\xi}$, c'est-à-dire

$$\tau\mu_{2n} + \frac{1}{\mu_{2n}} > \xi$$

ou bien, parce que $\mu_{2n} > 0$,

$$\tau\mu_{2n}^2 - \xi\mu_{2n} + 1 > 0. \tag{10}$$

En supposant $\tau > 0$, il s'ensuit que μ_{2n} doit vérifier l'une des inégalités :

$$\mu_{2n} < \frac{\xi - 1}{2\tau} \tag{11 a}$$

ou

$$\mu_{2n} > \frac{\xi + 1}{2\tau}. \tag{11 b}$$

De (5) on a

$$\mu_{2n} = \frac{q_{2n}}{q_{2n-1}} = a_{2n} + \frac{q_{2n-2}}{q_{2n-1}} > 1$$

et donc, quel que soit μ_{2n}, il satisfera (11 b), lorsque

$$\frac{\xi - 1}{2\tau} \leq 1. \tag{12}$$

τ étant positif, cela signifie que $4\tau(\tau - 2) \geqslant 0$ et par conséquent (12) sera satisfaite pour $\tau \geqslant 2$.

Pour $\tau \geqslant 2$, nous avons donc

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \frac{\tau}{q_{2n-1}^2} + \frac{1}{q_{2n}^2}$$

ou bien

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{\tau}{q_{2n-1}^2} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} + \frac{1}{q_{2n}^2}. \tag{13}$$

Comme $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \theta < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$, il s'ensuit de (13) que l'irrationnel θ se trouve dans l'un des intervalles ouverts

$$I_1 = \left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}, \frac{p_{2n}}{q_{2n}} + \frac{1}{q_{2n}^2 \xi}\right) \quad \text{ou} \quad I_2 = \left(\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{\tau}{d_{2n-1}^2}, \frac{p_{2n-1}}{d_{2n-1}}\right).$$

Selon pue $\theta \varepsilon I_1$ ou $\theta \varepsilon I_2$, nous avons les inégalités

(14 *a*) $$-\frac{1}{q_{2n}^2\xi} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \theta < 0$$ ou (14 *b*) $$0 < \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \theta < \frac{\tau}{q_{2n-1}^2\xi},$$

c'est-à-dire l'une au moins des deux réduites consécutives considérées satisfait à (1).

Remarque. L'expression $\frac{\xi-1}{2\tau}$, pour $\tau>0$, est toujours ≤ 1, parce que

(15) $$\frac{\xi-1}{2\tau} \leq 1 \text{ avec } \tau > 0 \longrightarrow \tau^2 \geqslant 0 .$$

Dans le cas complémentaire, $0<\tau<2$, μ_{2n} ne pourrait pas approcher la valear *1* autant que l'on veut. En effet, afin de satisfaire (10) μ_{2n} on doit satisfaire (*11b*), et il y aurait des nombres irrationnels qui ne jouiraient pas de la propriété exprimée par (*14a*) ou (*14b*).

B) Soit λ_{2n+1} l'écart de deux réduites consécutives du nombre irrationnel θ, en commençant par l'une d'ordre pair

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \lambda_{2n+1}\left(\frac{\tau}{q_{2n+1}^2} + \frac{1}{q_{2n}^2}\right).$$

En vertu de (4), (6), et de la notation antérieure, on a

(16) $$\frac{1}{\lambda_{2n+1}} = \frac{\tau}{\mu_{2n+1}} + \mu_{2n+1}.$$

Pour avoir l'inégalité voulue (1) entre θ et les réduites considérées de celui-ci, on doit avoir

$$\frac{\tau}{\mu_{2n+1}} + \mu_{2n+1} > \xi .$$

Cette inégalité donne

(17) $$\mu_{2n+1}^2 - \xi\mu_{2n+1} + \tau > 0,$$

parce que $\mu_{2n+1} > C$ et, de plus, > 1.

μ_{2n+1} doit satisfaire à l'une des inégalités

(18a) $$\mu_{2n+1} < \frac{\xi-1}{2}$$ ou (18b) $$\mu_{2n+1} > \frac{\xi+1}{2}.$$

Quel que soit $\mu_{2n+1} > 1$, il satisfera à l'inégalité (18b) lorsque

(19) $$\frac{\xi+1}{2} \leq 1$$

ce qui conduit à $\tau \leq 0$.
$\tau = 0$ correspond à notre problème et conduit à

(20) $$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} + \frac{1}{q_{2n}^2} > \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}.$$

Comme $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} < \theta < \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$, il suit de (20) que

$$-\frac{1}{q_{2n}^2} < \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - \theta < 0,$$

c'est-à-dire les réduites d'ordre pair de l'irrationnel θ satisfont l'inégalité (1), pour $\tau = 0$. Ce fait peut être démontré aussi directement par (4) et (7).

Le cas qui ne correspond pas à notre problème $\tau < 0$, conduit à

(21) $$\frac{p_{2n}}{q_{2n}} + \frac{1}{\xi q^2_{2n}} > \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{\tau}{\xi q^2_{2n+1}} > \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}},$$

c'est-à-dire que θ est dans l'intervalle I_1 ou bien il satisfait (14a). Dans ce cas, rien ne nous dit que (14b) est satisfaite. Donc, dans le cas $\tau < 0$, nous ne pouvons rien affirmer, excepté le résultat banal que les réduites d'ordre pair satisfont (14a), ce qui s'ensuit de même de l'inclusion

$$\left(-\frac{1}{\xi q^2_{2n}}, 0\right) > \left(-\frac{1}{q^2_{2n}}, 0\right).$$

Remarque. La supposition que $\frac{\xi - 1}{2} \leq 1$ nous conduit à $\tau \leq 2$. Par analogie avec la remarque précédente, cette supposition nous dit que l'inégalité (17) ne pourrait être satisfaite que si μ_{2n+1} satisfaisait (18b). Cela signifie qu'il y a des nombres irrationnels qui ne jouissent pas de la propriété (1). Cette propriété appartient aux nombres dont $\mu_{2n+1} > \frac{\xi + 1}{2}$. Par conséquent, pour $0 < \tau \leq 2$, μ_{2n+1} doit être superieur au maximum de $\frac{\xi + 1}{2}$, qui est 2.

Si $a_{2n+1} \geqslant 2$, l'une au moins de deux réduites consécutives, en commençant par celle d'ordre $2n$, satisfait l'inégalité (1). Donc si tous les a_{2n+1}, ou bien une infinité au moins de ceux-ci sont $\geqslant 2$, il y a une infinité de réduites qui satisfont (1).

Cette remarque nous permet de dire que, pour $0 < \tau \leq 2$, il y a une infinité de réduites des nombres irrationnels

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}], \sqrt{3} = [2, \overline{1, 4}], 1 + \sqrt{2} = [\overline{2}]$$

qui satisfont (1). Mais aucune réduites de toutes les couples de réduites commençant par l'une d'ordre pair, des nombres irrationnels

$\sqrt{3} = [1, \overline{1,2}]$, $\sqrt{7} = [2, \overline{1,1,1,4}]$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [\overline{1}]$, $1+\sqrt{3} = [\overline{2,1}]$

ne satisfait pas (1).

De même les nombres équivalents à $\theta = [2, 2, 1, \ldots 1, 2, 2, 1 \ldots]$ $\sqrt{3}, \sqrt{7}, 1+\sqrt{3}$ qui ont une infinité de $a_{2n+1} = 2$ ou 4 satisfont à une propriété analogue.

Une discussion analogue à la remarque antérieure n'est posible que partiellement parce que, τ décroissant de 2 à o, la valeur maximum de l'expression $\frac{\xi+1}{2\tau}$ est $+\infty$.

Par cela, le théorème I a été démontré et discuté complètement pour $\tau \geqslant 2$.

C) Considérons maintenant trois réduites consécutives, en commençant avec l'une d'ordre pair, $\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$, $\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}$, $\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}}$, et les écarts des réduites consécutives, deux à deux, λ_{2n+1} et λ_{2n+2}. De (16) et (19) on a :

$$\frac{1}{\lambda_{2n+1}} = \frac{\tau}{\mu_{2n+1}} + \mu_{2n+1},$$

$$\frac{1}{\lambda_{2n+2}} = \tau\,\mu_{2n+2} + \frac{1}{\mu_{2n+2}}.$$

$\frac{\xi-1}{2} < 1$ pour $\tau < 2$ et donc, si $\mu_{2n+1} > \frac{\xi+1}{2}$, nous avons $\frac{1}{\lambda_{2n+1}} > \xi$.

Si $\mu_{2n+1} \leq \frac{\xi+1}{2}$, nous avons $\mu_{2n+2} = a_{2n+2} + \frac{1}{\mu_{2n+1}} \geqslant 1 + \frac{2}{\xi+1}$.

Or on a

(22) $$1 + \frac{2}{\xi+1} > \frac{1+\xi}{2\tau}. \text{ pour } \tau > 1,$$

c'est-à-dire $$\mu_{2n+2} > \frac{1+\xi}{2\tau}.$$

Comme, pour $\tau > 1$, $\frac{1}{\lambda_{2n+2}} = \tau\,\mu_{2n+2} + \frac{1}{\mu_{2n+2}}$ est une fonction croissante de μ_{2n+2}, on a :

(23) $$\frac{1}{\lambda_{2n+2}} > \tau\,\frac{1+\xi}{2\tau} + \frac{2\tau}{1+\xi} = \frac{1+\xi}{2} + \frac{\xi-1}{2} = \xi.$$

Ce fait démontre que si $\frac{1}{\lambda_{2n+1}} \leq \xi$, on a $\frac{1}{\lambda_{2n+2}} > \xi$ pour $1 < \tau < 2$.

Réciproquement, on pourrait démontrer que si $\frac{1}{\lambda_{2n+2}} \leq \xi$ on aura $\frac{1}{\lambda_{2n+1}} > \xi . \frac{\xi - 1}{2\tau} < 1$ pour tout τ, parce que cette inégalité nous conduit à $4\tau^2 > 0$ et donc, lorsque $\mu_{2n+2} > \frac{\xi + 1}{2\tau}$, nous avons $\frac{1}{\lambda_{2n+2}} > \xi$. Si $\mu_{2n+2} \leq \frac{\xi + 1}{2\tau}$, on a $\frac{1}{\lambda_{2n+2}} \leq \xi$ et

$$\mu_{2n+1} = \frac{1}{\mu_{2n+2} - a_{2n+2}} \geqslant \frac{1}{\frac{\xi + 1}{2\tau} - 1} = \frac{2\tau}{\xi + 1 - 2\tau} .$$

Comme, $\xi + 1 - 2\tau > 0$, lorsque $0 < \tau < 2$, et

$$\frac{2\tau}{\xi + 1 - 2\tau} > \frac{1 + \xi}{2} \quad \text{pour } \tau > 1,$$

il s'ensuit que $\mu_{2n+1} > \frac{1+\xi}{2}$ et donc $\frac{1}{\lambda_{2n+1}} > \xi$.

La première partie, ainsi que la réciproque, n'exclut pas cependant la possibilité d'avoir satisfaites simultanément $\frac{1}{\lambda_{2n+2}} > \xi$ et $\frac{1}{\lambda_{2n+1}} > \xi$ pour $1 < \tau < 2$.

Remarque. Le cas $\tau = 2$ est entré dans la discussion du A) et le cas $\tau = 1$ entre dans la présente discussion, parce que $\frac{\xi+1}{2}$ et $\frac{\xi+1}{2\tau}$ sont irrationnels égaux à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, μ_{2n+1} et μ_{2n+2} sont rationnels, les posibilités $\mu_{2n+1} = \frac{\xi + 1}{2}$ ou $\mu_{2n+2} = \frac{\xi + 1}{2}$ sont exclues ; donc le théorème est aussi démontré dans ce cas.

En vertu de la discussion du A), B) et C) le théorème est démontré pour $\tau \geqslant 1$.

D) Considérons maintenant trois réduites consécutives, en commençant avec l'une d'ordre impair, $\frac{p_{2n+1}}{2_{2n+1}}, \frac{p_{2n+2}}{2_{2n+2}}, \frac{p_{2n+3}}{2_{2n+3}}$, et leurs écarts consécutifs, deux à deux. On a :

$$\frac{1}{\lambda_{2n+2}} = \tau\mu_{2n+2} + \frac{1}{\mu_{2n+2}},$$

$$\frac{1}{\lambda_{2n+3}} = \frac{\tau}{\mu_{2n+3}} + \mu_{2n+3} .$$

Comme $\frac{\xi - 1}{2\tau} < 1$ pour tout $\tau \neq 0$, il s'ensuit que si $\mu_{2n+2} > \frac{\xi + 1}{2\tau}$, $\frac{1}{\lambda_{2n+2}} > \xi$. Lorsque $\mu_{2n+2} \leq \frac{\xi + 1}{2\tau}$, nous avons $\frac{1}{\lambda_{2n+2}} \leq \xi$ et

$$\mu_{2n+3} = a_{2n+3} + \frac{1}{\mu_{2n+2}} \geqslant 1 + \frac{2\tau}{\xi + 1}.$$

Parce que

$$1 + \frac{2\tau}{\xi + 1} = \frac{\xi + 1}{2},$$

il s'ensuit que $\mu_{2n+3} \geqslant \frac{\xi + 1}{2}$ et donc $\frac{1}{\lambda_{2n+3}} \geqslant \xi$.

Le signe de l'égalité n'exclut pas la possibilité que quelques unes des réduites du θ satisfassent (1). En effet, lorsque ξ est irrationnel, μ_{2n+2} étant rationnel $< \frac{\xi + 1}{2\tau}$ (égalité exclue), nous avons $\mu_{2n+3} > \frac{\xi + 1}{2}$ et donc $\frac{1}{\lambda_{2n+3}} > \xi$. Lorsque ξ est rationnel, l'égalité aurait influencé certains intervalles I_1 et I_2, analogues à ceux du A), où I_1 et I_2, considérés fermés, auraient en commun un point rationnel. θ étant irrationnel, ne pourrait pas être égal à celui-ci et par conséquent θ se trouve aussi dans les intervalles ouverts. Nous concluons donc que certaines réduites du θ satisfont les inégalités de la forme (14a) ou (14b), c'est-à-dire (1).

Dans cette démonstration n'est intervenu aucune restriction pour τ.

Pareillement à C), nous pouvons démontrer la réciproque pour $\tau < 2$.

Dans ce cas, de même que dans le cas C), la première partie et la réciproque n'excluent pas la posibilité $\frac{1}{\lambda_{2n+2}} \geqslant \xi$ et $\frac{1}{\lambda_{2n+3}} \geqslant \xi$.

De D) il s'ensuit que le théorème I est démontré aussi pour lei cas $0 < \tau < 2$.

Remarque. En examinant la démonstration donnée, nous voyons que le théorème I se déduit de A) et D).

Un simple examen des réciproques du *D*) et *C*), nous conduit à la conclusion que la restriction $\tau < 2$ n'est pas nécessaire. Donc le théorème I apparaît évident seulement de la première partie du D).

3. Pour abréger, nous désignerons par γ_p un groupe de p réduites consécutives d'un nombre quelconque. L'ordre d'un groupe de réduites sera donné par l'ordre de la dernière reduite du groupe. Le groupe de p réduites, terminé par la réduite d'ordre n, sera désigné

par $\gamma_p(n)$. Si γ_p se termine par une réduite d'ordre impair ou pair, nous écrirons $\gamma^1{}_p$ ou $\gamma^2{}_p$, respectivement, en employant cette notation bien entendu lorsque nous n'aurons pas besoin d'écrire explicitement l'ordre du groupe. Si l'une des réduites au moins du γ_p satisfait (1), nous dirons que γ_p satisfait la propriété (α).

Maintenant nous pouvons énoncer les résultats ou les précisions obtenues par les discussions antérieures.

Du A), C), D) il résulte que les réduites de tout irrationnel θ satisfont les propriétés suivantes :

1) pour $\tau \geqslant 2$, tous les $\gamma_2{}^2$ satisfont (α),
2) „ $\tau \geqslant 1$, „ „ $\gamma_3{}^2$ „ „,
3) „ $\tau \geqslant 0$, „ „ $\gamma_3{}^1$ „ „.

De 2) et 3) il s'ensuit :

4) pour $\tau \geqslant 1$, tous les γ_3 satisfont (α),
5) „ $0 < \tau < 1$ „ „ γ_4 „ „.

De B) il résulte que

6) pour $0 \leq \tau < 2$, dans la suite de réduites des nombres qui développés en fractions continues, ont une infinité de $a_{2n+1} \geqslant 2$ il existe la même infinité de $\gamma_2{}^1$ $(2n + 1)$ qui satisfont (α).

De 5), en donnant à τ la valeur 1, on obtient le théorème III avec la précision III_1.

Notre discussion a apporté ces six précisions sur les démonstrations de M. Segre et M. Olds, précisions qui sont de la même nature que celles donées par les théorèmes II et III, quelques unes d'entre elles étant plus restrictives.

4. De ce qui précède, on voit que le théorème de M. Segre est une généralisation aux approximations asymétriques du théorème de Hurwitz-Borel. Nous nous demandons maintenant : Existe-t-il encore une valeur de ξ^2, fonction linéaire de τ, à coefficients entiers positifs, avec $\xi^2(1) = 5$, telle que tous les $\gamma_3{}^2$ ou $\gamma_3{}^1$ de tout irrationnel θ jouissent de la propriété (α) pour tout le domaine $\tau \geqslant 0$?

Les domaines, où tous les $\gamma_2{}^2$, $\gamma_2{}^1$, $\gamma_3{}^2$, $\gamma_3{}^1$ de θ satisfont respectivement (α), sont donnés, comme l'on voit de A), B), C), D), par les inégalités :

$$\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 4\tau}}{2\tau} \leq 1, \tag{24}$$

$$\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 4\tau}}{2} \leq 1, \tag{25}$$

$$1+\frac{2}{\xi+\sqrt{\xi^2-4\tau}} \geqslant \frac{\xi+\sqrt{\xi^2-4\tau}}{2\tau}, \tag{26}$$

$$1+\frac{2\tau}{\xi+\sqrt{\xi^2-4\tau}} \geqslant \frac{\xi+\sqrt{\xi^2-4\tau}}{2}. \tag{27}$$

En calculant les domaines, où tous les γ_3^2, γ_3^1 satisfont (α), pour les cinq valeurs de ξ, on trouve

ξ	les domaines où	
	tous les γ_3^2 satisfont (α)	tous les γ_3^1 satisfont (α)
$\sqrt{5\tau}$	$\tau \geqslant 1$	$\tau \leq 1$
$\sqrt{1+4\tau}$	$\tau \geqslant 1$	$\tau \geqslant 0$
$\sqrt{2+3\tau}$	$2 \geqslant \tau \geqslant 1$	$2 \geqslant \tau \geqslant 1$
$\sqrt{3+2\tau}$	$^3/_2 \geqslant \tau \geqslant 1$	$^3/_2 \geqslant \tau \geqslant 1$
$\sqrt{4+\tau}$	$^4/_3 \geqslant \tau \geqslant 1$	$^4/_3 \geqslant \tau \geqslant 1$

Nous voyons que, dans le théorème I, on peut prendre $\xi = \sqrt{5\tau}$ ou $\xi = \sqrt{1+4\tau}$, afin qu'il soit valable pour $\tau \geqslant 0$ et qu'il donne, pour $\tau = 1$, le théorème III. C'est ainsi que nous avons trouvé une meilleure approximation du théorème I, en prenant $\xi = \sqrt{5\tau}$ pour $\tau > 1$. Lorsque l'on tire la valeur de ξ des inégalités (27) et (26), respectivement, on trouve

$$\xi < \sqrt{1+4\tau} \quad , \quad \xi \leq \sqrt{\tau^2+4\tau}\,.$$

En prenant $\xi = \sqrt{\tau^2+4\tau}$, nous obtenons une approximation meilleure qu'en prenant $\xi = \sqrt{5\tau}$ pour $\tau > 1$.

Les domaines, où tous les γ_3^2, γ_3^1, de tout irrationnel θ, satisfont (α), pour $\xi = \sqrt{1+4\tau}$ ou $\sqrt{\tau^2+4\tau}$, sont donnés par le tableau

ξ	les domaines où	
	tous les γ_3^2 satisfont (α)	tous les γ_3^1 satisfont (α)
$\sqrt{1+4\tau}$	$\tau \geqslant 1$	$\tau \geqslant 0$
$\sqrt{\tau^2+4\tau}$	$\tau \geqslant 0$	$\tau \leq 1$

Le théorème I, amélioré de cette manière, peut être énoncé comme il suit :

Théorème V. Tout irrationnel θ a une infinité d'aproximations rationnelles $\frac{p}{2}$ telles que

$$-\frac{1}{q^2\xi} < \frac{p}{q} - \theta < \frac{\tau}{q^2\xi}$$

où τ est réel $\geqslant 0$ et $\xi =$ maximum $(\sqrt{1+4\tau}\ ,\ \sqrt{\tau^2+4\tau})$.

Les précisions du théorème sont comprises dans le tableau.

5. Nous nous proposons maintenant le problème, de trouver une meilleure approximation asymétrique des nombres θ qui ne sont pas équivalents à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ telle qu'un infinite de $\gamma^2{}_3$ ou $\gamma^1{}_3$ satisfassent (α) lorsque la même infinité de a_m est $\geqslant 2$.

Les domaines de validité de ces propriétés sont donnés par

(28) $$2+\frac{2}{\xi+\sqrt{\xi^2-4\tau}} \geqslant \frac{\xi+\sqrt{\xi^2-4\tau}}{2\tau}$$ si une infinité de $a_{2n+2} \geqslant 2$.

(29) $$2+\frac{2\tau}{\xi+\sqrt{\xi^2-4\tau}} \geqslant \frac{\xi+\sqrt{\xi^2-4\tau}}{2}$$ si une infinité de $a_{2n+3} \geqslant 2$

En procédant de la même manière que dans 4, on voit que la plus convenable fonction linéaire ξ^2 de τ à coefficients entiers positifs, telle que $\xi^2(1) = 8$, est $\xi^2 = 4+4\tau$.

En tirant ξ^2 de (29) et (28) on a respectivement

(30) $$\xi^2 \leq 4+4\tau\ ,\ \xi^2 \leq 4\tau^2+4\tau\ .$$

De la même manière, nous pouvons former un tableau pareil au deuxième du 4.

ξ	les domaines où	
	si θ a une infinité de $a_{2n+2} \geqslant 2$ la même infinité de $\gamma_3{}^2(2n+2)$ satisfait (α)	si θ a une infinité de $a_{2n+3} \geqslant 2$ la même infinité de $\gamma_2{}^1(2n+3)$ satisfait (α)
$\sqrt{4+4\tau}$	$\tau \geqslant 1$	$\tau \geqslant 0$
$\sqrt{4\tau^2+4\tau}$	$\tau \geqslant 0$	$\tau \leq 1$

Nous pouvons énoncer maintenant le suivant :

Théorème VI. Tout irrationnel θ, qui n'est pas équivalent à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, a une infinité d'approximations rationnelles $\frac{p}{q}$ telles que

$$-\frac{1}{q^2\xi} < \frac{p}{q} - \theta < \frac{\tau}{q^2\xi}$$

où $\tau \geqslant 0$ et ξ est $\sqrt{4+4\tau}$, $\sqrt{4\tau^2+4\tau}$ ou maximum $\left(\sqrt{4+4\tau}\,;\ \sqrt{4\tau^2+4\tau}\right)$, suivant que θ, étant développé en fraction continue, a, respectivement, seulement une infinité de $a_{2n+3} \geqslant 2$, seulement une infinité de $a_{2n+2} \geqslant 2$ ou une infinité de $a_{2n+3} \geqslant 2$, et une infinité de $a_{2n+3} \geqslant 2$.

Les précisions de théorème sont comprises dans le tableau.

Le théorème VI est une généralisation du théorème IV, parce qu'il se réduit à IV pour $\tau = 1$.

6. *Remarque.* Les domaines de validité des propriétés que tous les γ_2^2 on tous les γ_2^1 satisfont (α) sont donnés par le tableau

ξ	Les domaines où	
	tous les γ_2^2 satisfont (α)	tous les γ_2^1 satisfont (α)
$\sqrt{1+4\tau}$.	$\tau \geqslant 2$	$\tau \leq 0$
$\sqrt{\tau^2+4\tau}$	$\tau \leq 0$	$\tau \leq \frac{1}{2}$
$\sqrt{4+4\tau}$	$\tau \geqslant 3$	$\tau \leq 0$
$\sqrt{4\tau^2+4\tau}$	$\tau \leq 0$	$\tau \leq \frac{1}{3}$

Dans le premier tableau du 4, les propriétés assignées aux trois dernières valeurs de ξ, sont valables pour $\tau \geqslant 1$, si l'on admet la succession des nombres complexes définie par :

$a+ib > a'+ib'$ lorsque $a > a'$ ou si $a = a'$, lorsque $b > b'$.

Nons donnons le nom de domaines inverses aux domaines $\tau \geqslant N$ et $\tau \leq \frac{1}{N}$.

Les inverses des domaines $\tau \geqslant 0$ et $\tau \leq 0$ sont ces domaines eux-mêmes.

On remarque que lorsqu'on remplace

$$\sqrt{1+4\tau} \text{ par } \sqrt{\tau^2+4\tau}$$
$$\sqrt{4+4\tau} \text{ par } \sqrt{4\tau^2+4\tau}$$

les propriétés, rangées dans la première colonne des trois derniers tableaux, se transforment dans celles de la deuxième colonne, dans les domaines inverses. Ce fait nous suggère l'idée que les approximations avec $\xi = \sqrt{\tau^2 + 4\tau}$ et $\xi = \sqrt{4\tau^2 + 4\tau}$ ne sont tout autre chose que les approximations de la forme (*1*) avec $\xi = \sqrt{1 + 4\tau}$ ou $\sqrt{4 + 4\tau}$ où l'on a remplacé τ par $\frac{1}{\tau}$.

J'exprime ici ma vive reconnaissance à M. le Prof. I. Popa pour les suggestions données dans les précisions des paragraphes *4* et *5*.

Séminaire de Mathématique
de l'Université de Jassy

(Reçu le 15 Septembre 1947).

Travaux cités

1. Segre - *Lattice points in infinite domains, and asymmetric diophantine approximations.* Duke Mathematical Journal, t. 12 (1945).
2. Olds - *Note on an asymmetric diophantine approximation.* Bulletin American Math. Soc., t. 52 (1945).
3. Khintchine - *Neuer Beweis und Verallgemeinerung eines Hurwitzschen Satzes.* Math. Ann., t. 111 (1935).
4. Borel - *Contribution à l'analyse arithmétique du continue.* Journal de Liouville (5) t. 9 (1903).
5. Hurwitz - *Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche.* Math. Ann., t. 39 (1891).
6. Vahlen - *Über Näherungswerte und Kettenbrüche.* Math. Ann, t. 115 (1895).
7. Fujiwara - *Bemerkung zur Theorie der Approximation der irrationalen Zahlen durch rationale Zahlen.* The Tôhoku Math. Journ., t, 11, 14 (1917—1918).
8. Koksma - *Diophantische Approximationen.* Ergebnisse der Mathematik und ihre Grenzgebiete, t. 4 (1937).

517 & 531

RAPPORT SUR MES TRAVAUX PENDANT LA GUERRE

par

A. SIGNORINI

En premier lieu j'ai continué mes études [1]) dans le domaine de la théorie la plus générale de l'Elasticité, avec la collaboration de quelqu'un de mes élèves [2]) et notamment d'un élève que j'ai en commun avec mon ami Picone: M. Ch. Tolotti, qui vient d'être nommé professeur de Mécanique rationnelle à l'Université de Nâples. En 1940 ces études ont été l'objet d'un cours de conférences à Rome, à l'Institut de Haute Mathématique.

Dans la théorie classique de l'Elasticité on traite le déplacement comme infiniment petit et, en particulier, on néglige les termes du second dégré dans l'expression des six composantes de la déformation.

On réalise ainsi un double profit, plus ou moins justifié. Chaque problème est ramené à un problème linéaire; le potentiel élastique se réduit à une forme quadratique, si bien que pour atteindre son expression définitive on n'a qu'à demander à la Physique expérimentale, pour chaque solide élastique, les valeurs d'un certain nombre de paramètres, non pas la forme d'une fonction inconnue en plusieurs variables.

La théorie générale de l'Elasticité doit donc résulter bien plus difficile que la théorie classique. En rejetant l'infinitésimalité des déplacements élastiques on aboutit à des problèmes d'intégration non linéaires et, comme si cela ne devait pas suffire, tout calcul numérique exige la résolution préalable d'un problème extrêmement difficile de véritable Physique mathématique: *choix de l'expression complète du potentiel élastique.*

Il y a un cas intermédiaire, celui des déformations pseudofinies des solides minces [vergues, plaques, etc.]. Pour ces systèmes une rotation finie de chaque élément n'est plus incompatible avec des déformations infiniment petites. On aboutit encore à des problèmes non linéaires, mais on peut garder l'expression classique du potentiel élastique.

* * *

J'ai dit „déplacements élastiques" et „potentiel élastique". J'aurais

proprement dû dire „transformations thermoélastique" et „potentiel thermodynamique" : lorsqu'on renonce à l'infinitésimalité des déplacements la loi de Hooke doit céder le pas aux deux principes classiques de la Thermodynamique, conformément aux indications données par W. Thomson dès 1855.

On est ramené finalement à un schéma purement mécanique soit dans le cas des transformations isothermes, soit dans le cas des transformations adiabatiques. Cependant, même si l'on veut seulement s'occuper de transformations isothermes, au moment décisif [je veux dire, au moment du choix du potentiel élastique] on doit bien se rappeler les liens intimes entre la théorie de l'Elasticité et la Thermodynamique. Une expression du potentiel élastique ne peut réellement avoir une valeur physique, si l'on ne peut pas la subordonner à une expression du potentiel thermodynamique qui ne donne pas lieu à des incongruités.

* * *

Il n'y a que les premiers chapitres de la théorie des transformations thermoélastiques finies qui ne demandent aucune spécialisation du potentiel thermodynamique.

A cet égard l'énoncé le plus brillant remonte aux premières années de notre siècle. Cet énoncé de M. Hadamard et de Duhem concerne la propagation isotherme ou adiabatique des ondes ordinaires de discontinuité «une même direction d'onde est susceptible de propager trois directions de discontinuité différentes», c'est-à-dire, même pour des transformations finies la quadrique de polarisation est toujours un ellipsoïde réel.

Mais il ne s'agit pas d'une règle générale. M. Tolotti a bien mis en évidence, par des exemples, dont la portée est indiscutable, que réellement l'énoncé exige la spécialisation du potentiel élastique.

* * *

Certaines études, d'un caractère absolument général à l'égard de tout système à transformations reversibles, m'ont permis de préciser les équations linéaires régissant les transformations infiniment petites à partir de tout état d'équilibre, même si cet état est le résultat d'une transformation finie du système.

Dans un cas très particulier ces équations remontent à Poincaré. Dans le cas le plus général elles se prêtent à des déductions intéressantes, par exemple à l'extension du théorème de Betti aux transformations infinitésimales à partir de *tout* état d'équilibre forcé. Un de mes élèves, M. Ch. Cattaneo[3]), en a fait des applications dans le domaine de l'Acoustique et de la théorie des ondes de discontinuité.

* * *

Les mêmes études d'un caractère absolument général m'ont permis de m'apercevoir d'un fait assez curieux.

Envisageons un solide libre dans un état d'équilibre déterminé par des forces extérieures entièrement données. La théorie classique de l'Elasticité présuppose pour les composantes du déplacement élastique certains développements en série dans le dessein d'en garder seulement les premiers termes. Pour les termes suivants la théorie générale fournit des systèmes d'équations soumis à des conditions d'intégrabilité.

Ces conditions d'intégrabilité résultent généralement propices à la théorie classique, car elles se bornent à démander un choix convenable de la rotation d'ensemble du solide, *en éliminant ainsi une indétermination traditionnelle.* Mais en même temps j'ai pu établir, par un exemple tangible, qu'il y a des cas bien marqués d'exception, où les conditions d'intégrabilité pour les deuxièmes termes ne peuvent être satisfaites et les développements en série présupposés par la théorie classique *n'existent pas*, indépendamment de toute question de convergence.

Je puis ajouter que l'exception peut seulement se présenter si l'ensemble des forces extérieures admet un axe d'équilibre au sens de Möbius, en particulier dans le cas de l'équilibre astatique.

* * *

Dans la théorie des transformations thermoélastiques finies [à la différence de ce qu'il arrive dans la théorie classique] les six composantes de la déformation *directe* — je veux dire, les six composantes de la déformation qui porte le système de son état naturel à son état actuel — ne suffisent pas pour individualiser les six composantes de tension, du *stress*, même si l'on ajoute la valeur de la température, Pour chaque valeur de la température, les valeurs algébriques des trois tensions principales sont toujours déterminées par les six composantes de la déformation directe, tandis que l'orientation du trièdre principal de tension dépend aussi de la rotation locale.

Dans le cas des solides isotropes, *auquel j'entends désormais me borner*, on atteint une simplification remarquable si l'on remplace la déformation directe par la déformation *inverse*, celle qui ramène le solide de son état actuel dans son état naturel. A son égard, même du côté physique, la déformation directe ne peut avancer aucun droit de préséance.

La déformation inverse, si l'on ne la traite pas comme infiniment petite, ne dépend pas seulement de la déformation directe : elle dépend aussi de la rotation locale et la loi de dépendance est telle qu'en dé-

finitive on peut provisoirement oublier la rotation locale, dans le sens que, pour chaque valeur de la température, on peut exprimer les six composantes du *stress* rien que par les composantes de la déformation inverse.

Il va sans dire que ces expressions du *stress* dépendent du choix du potentiel thermodynamique. Malheureusement elles ne coïncident plus avec les dérivées premières du potentiel thermodynamique par rapport aux six composantes de la déformation inverse.

* * *

Depuis douze ans il a paru dans les *Philosophical Transactions* de la Société Royale de Londres un gros Mémoire où l'on intègre, par des calculs fort élégants, plusieurs problèmes de déformations isothermes finies de solides isotropes, en partant, sans aucune explication préalable, de l'hypothèse que les expressions des composantes de tension par les composantes de la déformation inverse soient les mêmes que dans la théorie classique, c'est-à-dire linéaires et homogènes.

Les avantages analytiques de cette hypothèse simpliste ne peuvent être acceptés, car on peut démontrer qu'elle impose une expression du potentiel élastique isotherme qui peut prendre des valeurs *négatives* même dans quelques états du solide qui diffèrent très peu de son état naturel.

J'ai été ainsi amené à essayer l'hypothèse que les composantes de tension soient exactement des fonctions du second dégré de la déformation inverse.

Les résultats ont dépassé mon attente. La théorie qui découle de la nouvelle hypothèse simpliste, nonobstant sa complexité, a si bien résisté aux épreuves qualitatives les plus rigoureuses, que je ne puis m'empêcher de croire qu'il existe des corps naturels auxquels elle convient même du côté quantitatif.

Seule la Physique expérimentale pourra valider — ou détruire — ce nouveau chapitre de Physique mathématique non linéaire. J'espère qu'au plus tôt on pourra reprendre les essais que l'on avait commencés en 1943.

* * *

Mes études sur les transformations thermoélastiques finies décèlent, j'en conviens, une certaine tendance à la critique de théories traditionnelles. J'en avais d'ailleurs déjà donné une preuve par mes recherches sur la Statique du beton armé et même par mes anciennes approches à l'égard du problème complet de la Balistique extérieure, je veux

dire, à l'égard de l'étude simultanée du mouvement du centre de gravité du projectile et du mouvement autour du centre de gravité, en six degrés de liberté.

J'ai repris le problème complet de la Balistique extérieure [4]) aux premiers mois de 1940 et cette fois-ci j'ai pu atteindre la réduction du rang du système différentiel à sa valeur minimum : de douze à quatre.

Naturellement les équations finales ne sont pas trop expressives, mais il n'y a qu'elles qui puissent toujours être un guide sûr pour étendre au problème complet la méthode des perturbations, la méthode dont M. Picone a fait, ou au moins dirigé, tant d'applications à la Balistique du point matériel.

Mes équations dérivent d'une nouvelle forme du théorème du moment cinétique, qui directement ne vise qu'à la détermination du mouvement de l'axe du projectile. La complexité du problème complet ne permet pas d'employer les équations d'Euler sans encourir en des approximations douteuses et l'on peut dire de même des équations stéréonodales employées par Cranz dans son grand traité de Balistique.

Tout ce qui regarde le problème complet a une telle prétention de perfectionnement que la justification traditionnelle du principe de l'effet gyroscopique n'aurait pu être acceptée : j'en ai donné une justification effective au moyen des propriétés de certaines intégrales du type des coefficients originaires de Fourier. En définitive, je l'ai déjà dit, j'ai pu ramener l'intégration du problème complet de la Balistique extérieure à l'intégration d'un système de quatre équations différentielles du premier ordre, suivie de trois quadratures.

La raison intime d'un abaissement si fort du rang du système différentiel c'est que la détermination d'une courbe gauche par ses équations intrinsèques peut être ramenée à l'intégration d'une équation du type de Riccati, c'est-à-dire à l'intégration d'une équation dont l'intégrale peut être déduite d'une intégrale particulière rien que par des quadratures.

Dans les équations finales le rôle de variable indépendante est joué par l'angle formé par la tangente à la trajectoire du centre de gravité avec un *plan* horizontal. Deux des équations sont analogues aux équations fondamentales du problème classique et elles pourraient se réduire substantiellement à une seule [du type de l'équation de l'hodographe] si le milieu était homogène. Les deux autres équations gardent en tout cas le type des équations dont on se sert habituellement pour l'étude du mouvement du projectile autour de son centre de gravité, après la détermination du mouvement du centre de gravité par les équations classiques.

Ce résultat m'a fourni l'occasion de m'apercevoir d'un fait qui n'avait pas encore été observé : les équations du général Mayevski peuvent être intégrées par des quadratures seules, ce qui permet de coordonner élégamment plusieurs théorèmes du général Mayevski, du comte de Sparre, etc.

* * *

Avant de brièvement parler de mon traité de Mécanique je vais indiquer les arguments de quelques-uns de mes travaux n'ayant q'un caractère accidentel.

Il y en a un [5]), de deux pages seulement, concernant une propriété caractéristique de la sphère établie par M. W. Scherrer en 1940 : pour qu'une surface soit une sphère (ou un plan) il est nécessaire et suffisant que l'intégrale de la torsion le long de toute courbe fermée de la surface soit nulle. Une question difficile d'Analyse est envisagée dans un petit Mémoire [6]) sur le calcul des forces de liaison pour un solide pesant qui s'appuie sur un plan horizontal fixe par un ensemble de points distribués dans le plan de n'importe quelle façon Dans le cas le plus général il s'agit de résoudre un système de deux équations transcendantes assez compliquées.

J'aurais voulu démontrer qu'on peut toujours atteindre la solution du problème par un certain procédé d'itération, mais cela ne m'a réussi que sous certaines conditions de symétrie.

Alors, j'ai eu recours – comment dirais-je – à la méthode expérimentale, en essayant le procédé sur des exemples numériques assez complexes [de vingt à trente points d'appui] choisis en tirant au sort toutes les données du problème.

Les calculs numériques ont été faits dans l'Institut de M. Picone et ils ont donné des résultats inattendus. Le procédé d'itération a toujours porté *très rapidement* au résultat *exact*.

Toutes les données du problème, je l'ai déjà dit, avaient été choisies par le sort. J'ai ainsi acquis la conviction que les difficultés de démonstration cachent un théorème d'Analyse dont la portée dépasse les applications que mon procédé d'itération trouverait dans les calculs relatifs à la pression et flexion des maçonneries et du béton armé.

* * *

En 1940 on m'a donné l'occasion de reprendre mes études sur les propriétés de moyenne communes à tous les systèmes continus [7]) indépendamment de toute hypothèse sur la nature et l'état physique des matériaux, pour insister sur le fait qu'elles ne veulent pas s'adres-

ser aux systèmes élastiques ; dans la théorie classique de l'Elasticité on peut déduire les propriétés de moyenne les plus intéressantes du théorème de Betti.

Un exemple expressif des applications que les propriétés générales du *stress* peuvent avoir hors de la théorie de l'Elasticité – je dirais presque en concurrence à la théorie de l'Elasticité – est offert par le plus simple des problèmes de résistance des matériaux : je veux faire allusion au problème de stabilité d'une poutre droite, de section constante, sur deux appuis de niveau.

Les ingénieurs ont toujours soin de ne pas attacher une confiance absolue aux conditions de stabilité fournies par la théorie de l'Elasticité. On les croit *nécessaires*, mais l'on croit de même que pour avoir des conditions *suffisantes* il faut introduire un coefficient de sécurité, en substituant la charge à la limite d'élasticité par une charge assez inférieure, la charge de sécurité.

Dans le problème auquel je viens de faire allusion, les propriétés générales du *stress* fournissent une condition nécessaire de stabilité qu c'est bien la meilleure qui soit compatible avec la condition de rester indépendante de toute hypothèse sur la nature et l'état physique de la poutre, car on peut choisir la section de la poutre et les charges agissant sur elles de telle façon qu'en tout cas ma condition diffère aussi peu que l'on veut de la condition classique de stabilité fournie par la théorie de l'Elasticité.

* * *

Pendant les premiers mois de 1944, au moment le plus triste de l'occupation de Rome par les Allemands, j'ai été poussé à m'occuper du problème de stabilité des digues [8]) par non ami Picone, qui voulait que son Institut se mît dès alors en état de collaborer aux oeuvres de reconstruction de l'immédiat après-guerre.

Une digue en béton armé ne peut être conçue comme un solide isotrope et homogène qu'à titre de première approximation, ce qui est dû aussi au fait que le degré de maturation du béton ne peut être uniforme dans une masse si étendue.

Quoi qu'il en soit, depuis que l'on augmente le rayon de courbure de la voûte au fur et à mesure que l'on monte aux anneaux les plus hauts, la configuration d'ensemble de la digue réussit généralement assez complexe, tandis que l'on doit continuer à évaluer l'effet des déformations des rochers de fondation par une règle pratique assez simpliste.

Notamment en montagne et lorsque le réservoir est plein, on doit souvent s'attendre à des variations de température bien différentes des deux côtés de la digue, auxquelles s'accompagnent des variations de la

température intérieure tout à fait irrégulières. Néanmoins, on n'a jusqu'ici aucune possibilité de s'écarter d'une loi linéaire de variation de la température de part en part de la digue, même où l'épaisseur de la digue est le plus fort.

En somme le problème effectif est si complexe, il est encore si lié à la pratique, qu'aujourd'hui, si l'on ne veut pas se nourrir d'illusions on ne peut même pas songer à le traiter en trois dimensions, en se rattachant étroitement à la théorie mathématique de l'Elasticité [ou de la Thermoélasticité].

Tout au plus peut-on ambitionner d'épuiser le problème en deux dimensions, dans le domaine de la théorie des plaques, en assimilant la digue à une plaque courbe d'épaisseur variable. Il m'est avis que cette idée, à cause de son caractère unitaire par rapport à la façon de résister de la digue peut avancer un certain droit de préséance à l'égard de l'idée séparatiste de laquelle s'inspire la méthode de H. Ritter.

Que je sache l'idée unitaire a été dirigée pour la première fois vers ses applications les plus générales par M. F. Tölke, dans un important traité paru à Berlin presqu'à la veille de la guerre, grâce à des hardies inférences dans l'emploi des lois fondamentales de la Statique, de certaines formules de Kirchhoff, etc.

Ces procédés expéditifs peuvent bien être acceptés de par un technicien éminent tel que M. Tölke, mais je ne saurais dire de même à l'égard des calculs qui s'ensuivent. En définitive M. Tölke ramène la détermination du *stress* à un problème au contour pour une équation au dérivées partielles du quatrième ordre, mais réellement en acceptant toutes les prémisses de M. Tölke on aboutit à un problème au contour pour un système formé par une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre et par une équation différentielle ordinaire du même ordre.

Certes, les calculs numériques exigés par le nouveau problème ne sont pas simples, mais il ne dépassent pas les moyeus de l'Institut de M. Picone.

Je n'ai pas encore reçu d'Amérique les tirages à part d'un Mémoire [9]) sur la détermination théorique des dimensions des reservoirs flottants à pétrole conçus il y a sept ans en Italie par le général E. Maltese, à la suite d'études expérimentales pénétrantes et variées.

Il s'agit d'énormes réservoirs visant à une économie extrême et à un extrême rapidité de construction par l'emploi de l'eau des bassins naturels, avec en plus l'avantage d'éliminer des pertes dûes à l'évaporation et à d'autres dégradations du pétrole.

Le réservoir est substantiellement réduit à un cylindre en tôle,

pourvu de renforts convenables et d'une couronne de flotteurs, fermé en haut par une légère et flexible couverture, de façon à constituer comme une cloche immense complètement ouverte en bas vers l'eau du bassin. Dans le projet du général Maltese le cylindre a un rayon de 50 mètres et une hauteur de 30 mètres.

Le pétrole est injecté dans la cloche à travers des soupapes logées dans la couverture, autant qu'il faut pour qu'une couche d'eau de cinq mètres d'épaisseur reste en bas, à l'embouchure de la cloche. Voilà la seule marge de sécurité contre les fuites du pétrole.

Est-elle suffisante pour éviter ce danger même lorsqu'il y a de la mer ? Voici le problème que me proposa le général Maltese, par le moyen de notre Conseil National des Recherches. A cet égard des essais de maquette ne pouvaient donner une réponse décisive.

Pour aborder le problème, je commençai par chercher sous quelles conditions pouvait-il arriver que le mouvement du pétrole par rapport au réservoir se réduisit au repos. Cette première partie de la recherche ne fut pas entravée par l'intervention d'un certain problème de Neumann, car ce problème se trouvait déjà complètement résolu, par un heureux hasard, dans un Mémoire de M. Picone.

Il fallait naturellement donner à la période de la houle perturbatrice la valeur qui correspond en moyenne aux conditions les plus défavorables dans la Méditerranée. J'obtins ainsi une relation bien déterminée entre le rayon R et la hauteur H du réservoir.

Enfin, pour déterminer R et H, j'ajoutai la condition que les fréquences principales des oscillations libres du réservoir plein s'écartassent le plus possible de la fréquence de la houle perturbatrice.

J'avoue qu'au moment d'évaluer numériquement les expressions finales de R et H je craignais fort aboutir à un rayon de quelques microns on de plusieurs kilomètres, mais il ne fut pas ainsi. Les valeurs de R et H données par mes formules ne diffèrent pas trop des valeurs proposés par le général Maltese: en mètres elles sont 69 et 31 à la place de 50 et 30.

* * *

L'impression de mon traité de Mécanique commença à la fin de 1943, mais au mois de mai de 1944 elle fut brusquement interrompue par un bombardement aérien. Voilà la raison pour laquelle le premier volume [10]) n'a pu paraître qu'il y a trois mois.

En Italie, depuis douze ans, dans les écoles des ingénieurs il n'y a plus de cours autonomes de Statique graphique. Les éléments de la Statique graphique doivent être compris dans le cours de Mécanique rationnelle.

C'est ainsi que dans ce premier volume, parmi les théories introductoires habituelles, il y a même une introduction aux méthodes de la Statique graphique. Le dernier chapitre est dédié à la Cinématique des masses, y compris des notions sur les mouvements à la Poinsot et une extension de la notion d'ellipse centrale d'inertie aux fins de la dynamique des solides.

Soit G le centre de gravité du solide, α un quelconque des plans par G, s l'intersection de α avec l'ellipsoïde central d'inertie, σ l'aire renfermée par s. J'appelle *ellipse centrale du plan* α l'ellipse qui correspond à s dans l'homothétie ayant pour centre G et pour rapport π divisé par la racine carrée de la masse du solide et par σ. Comme je l'ai déjà montré dans un Mémoire [1]) des „Annali di Matematica", l'antipolarité par rapport à mon ellipse centrale permet de coordonner efficacément la façon de traiter plusieurs problèmes de dynamique des solides.

On a déjà imprimé le premier chapitre du deuxième volume, le chapitre qui regarde les concepts, les principes et les théorèmes fondamentaux de la Dynamique.

La Mécanique rationnelle, pour ne pas perdre d'efficacité dans la description de tant de phénomènes, doit garder un caractère de renonciation voulue à l'égard de tout progrès de la Physique atomique, mais elle ne peut non plus adopter comme schéma fondamental le schéma du continu, n'était-ce que par la raison que le schéma du continu efface l'agitation thermique. Cette tare ne peut rester longtemps cachée.

Dans le domaine de la Mécanique rationnelle tout corp naturel doit être originairement pensé comme l'ensemble d'un nombre immense, mais quand même fini, *d'éléments de matière*, toujours représentables par autant de points matériels libres. Naturellement ce schéma microscopique finit le plus souvent par n'avoir qu'un caractère provisoire : il n'y a d'exception qu'à l'égard de la théorie cinétique des gas et des théories semblables.

Le deuxième volume paraîtra avant la fin de l'année. Je n'ai que commencé la rédaction du troisième volume. J'espère pouvoir l'achever dans des conditions d'esprit assez meilleures que celles qui ont troublé mon travail pendant les malheureuses années qui viennent de s'écouler.

L'Académie Nationale de Lincei
et l'Institut Mathématique
de l'Université de Rome

(Reçu le 31 Juillet 1947).

Travaux cités

1) *Deformazioni elastiche finite: elasticità di 2° grado*, „Atti del 2° congresso della U. M. I.", 1940, pag. 56-71. *Recenti progressi della teoria delle transformazioni termo-elastiche finite*, „Atti del Convegno matematico a Roma", 1942, pag. 153-168. *Trasformizioni termoelastiche finite*. Mem. 1-a. „Annali di Matematica", 1943, pag. 33-143.

2) C. Tolotti - *Alcune proprietà degli assi d'equilibrio di* Möbius, „Rend. Acc. d'Italia", 1941-42, pag. 223-228.

— *Sulla più generale elasticità di 2° grado*. „Rend. di Mat.". 1942, pag. 1-20.

— *Orientamenti principali di un corpo elastico rispetto alla sua sollecitazione totale*, „Mem. Acc. d'Italia", 1941-42, pag. 1139-62.

— *Le equazioni lagrangiane della meccanica dei sistemi continui in coordinate generali*, „Rend. Acc. di Napoli", 1942-43, pag. 1-9.

— *Sul potenziale termodinamico dei solidi elastici omogenei ed isotropi per trasformazioni finite*, „Mem. Acc. d'Italia", 1942-43, pag. 529-41.

— *Deformazioni elastiche finite: onde ordinarie di discontinuità e caso tipico di solidi elastici isotropi*, „Rend. di Mat.", 1943, pag. 34-59.

— *Proprietà di media dello stress nelle lastre curve comunque spesse in equilibrio*, „Rend. Acc. Lincei", 1946, 187-92.

— *Sulla Statica delle lastre elastiche sottili soggette a deformazioni pseudofinite*, „Rend. Acc. Lincei", 1946, pag. 369-74 e 605-9;

G. Grioli - *Una proprietà di minimo nella Cinematica delle deformazioni finite*, „Boll. U. M. I.", 1939-40, pag. 452-55.

3) C. Cattaneo - *Sulla propagazione del suono nell'atmosfera con riguardo alla gravità e al gradiente termico*, „Nuovo Cimento", 1942, pag. 230-53.

— *Sopra un teorema fondamentale della teoria delle onde di discontinuità*, „Rend. Acc. Lincei", 1946, pag. 66-73 e 728-34.

4) *Complementi alla Dinamica dei giroscopi e equazioni del problema completo della Balistica esterna*, „Mem. Acc. Lincei", 1946, pag. 1-41 V. aussi *Cenni qualitativi di Balistica esterna*, „Boll. U. M. I.", 1939 pag. 458-73.

5) *Sopra una caratterizzazione della sfera*, „Annali di Matematica" 1941, pag. 211-12.

6) *Sul calcolo delle reazioni vincolari per un solido pesante appoggiato a un suolo orizzontale*, „Rend. di Mat.", 1941, pag. 292-30.

7) *Sulle proprietà di media comuni a tutti i sistemi continui*, „Rend. Acc. d' Italia", 1940-41, pag. 728-34. V. aussi ;

G. Grioli - *Sulle deformazioni elastiche dovute a una coppia di braccio nullo*, „Rend. Acc. d'Italia", 1941-42, pag. 93-98;

G. Grioli - *Sulle deformazioni elastiche dovute a due coppie in equilibrio*, „Rend. di Mat.", 1946, pag. 305-14 ;

A. Signorini - *Valori medi delle caratteristiche dello stressin Stereodinamica*, „Rend. Acc. Lincei", 1939, pag. 536-41;

G. Tedone - *Qualche applicazione delle proprietà di media dello stress*, „Boll. U. M. I.", 1941-42, pag. 93-99.

8) *Sulle dighe a volta non cilindrica*. „Commentationes Pont. Ac. Sc.", 1945, pag. 375-406. V. aussi *Il rollio del bastimento sull'onda sincrona* „Fasc. XXXVIII delle Note di Ingegneria navale", 1942, pag. 1-30.

9) *Determinazione teorica delle dimensioni di un certo tipo di serbatoi galleggianti*, „Revista de la Univ. nac. de Tucuman" serie A, 1946.

10) *Meccanica razionale con elementi di statica grafica*, vol. I, Roma, Perrella, 1947, pag. VIII + 336.

11) *Su alcune questioni di Geometria delle masse, Cinematica delle masse e Stereodinamica*, „Ann. di Mat.", 1945, pag. 1-11. V. aussi *Estensione della nozione di ellisse centrale d'inerzia ai fini della Dinamica dei solidi*, „Rend. Acc. Lincei", 1946, pag. 137-42.

UEBER MITTELWERTE IN EINEM BEREICHSYSTEM

von

L. FEJES TOTH und H. HADWIGER

Verf. entwickeln in der vorliegenden Arbeit eine Mittelwertsformel für die Trefferzahl (abgekürzt formuliert) eines sich in einem Bereichsystem bewegenden Bereiches. L. A. Santaló [1]), H. Hadwiger [2]) u. a. haben für regelmässige, insbesondere gitterförmige Bereichsysteme bereits derartige Formeln angegeben. Das Ziel, das durch die vorliegende Untersuchung erreicht werden soll, besteht darin, sich bei der Herleitung solcher Mittelwertsformeln von derartigen Regelmässigkeitsvoraussetzungen frei zu machen. Bezüglich der Verteilung der Bereiche des Systems werden Voraussetzungen getroffen, die einerseits noch stark genug sind, um die Mittelwertsaussage zu ermöglichen, andererseits aber so schwach sind, dass weit allgemeinere Bereichsysteme als regelmässige oder sogar gitterförmige in den Betrachtungskreis eingeschlossen werden.

Gerade diese Lockerung der Voraussetzung über Anordnung und Gestalt der Bereiche lässt eine vielfältige Anwendungsmöglichkeit der Formel offen, indem sie bei geeigneten Fragestellungen, wie sie bezüglich geometrischer Mittelwerte, Erwartungswerte, geometrischer Wahrscheinlichkeiten usw. bei der Bearbeitung technischer und naturwissenschaftlicher Probleme häufig auftreten, mit Erfolg herangezogen werden kann.

Wir betrachten ein System $\{G_\nu\}$ von unendlich vielen abgeschlossenen und einfach zusammenhängenden ebenen Bereichen G_ν ($\nu = 1,2,3,\ldots$) die in der Ebene in beliebiger Weise ausgestreut sind. Gegenseitige Ueberdeckungen der einzelnen Bereiche sind nicht ausdrücklich verboten, immerhin sind die sich bietenden Verhältnisse klarer überblickbar, wenn dies nicht der Fall ist. Die Bereiche G_ν sollen einen (Jordanschen) Inhalt F_ν und eine (gewöhnliche) Randlange L_ν aufweisen.

Es sei nun weiter χ ein eindeutiges, nichtnegatives Funktional, das jedem Bereich G_ν des Systems eine nichtnegative Zahl

(1) $$\chi_\nu = \chi(G_\nu)$$

zuordnet. Es bezeichne weiter $K(R)$ einen Kreis vom Radius R mit dem Ursprungspunkt U der Ebene als Zentrum und

$$\overset{R}{\Sigma}\ \chi_\nu$$

eine Summation, die sich über diejenigen Bereiche des Systems $\{G_\nu\}$ erstrecken soll, die ganz zu der abgeschlossenen Kreisscheibe $K(R)$ gehören. – Wir definieren nun

(2) $$D[\chi] = \lim_{R \to \infty} \frac{\overset{R}{\Sigma}\ \chi_\nu}{\pi R^2},$$

falls dieser Grenzwert existiert; in diesem Falle nennen wir die durch (2) erklärte Zahl $D[\chi]$ die Dichte des Funktionals χ im Bereichsystem. Es handelt sich um den im Mittel auf die Flächeneinheit der Ebene entfallenden Teil der totalen Funktionalsumme.

Zunächst lässt sich die wichtige Feststellung machen, dass die mit (2) definierte Funktionaldichte bewegungsinvariant ist bezüglich des Bereichsystems $\{G_\nu\}$. Dieser Sachverhalt kann natürlich auch dadurch verifiziert werden, dass die Ursprungs U nachgewiesen wird. In der Tat: Wenn

$$\overset{R}{\Sigma^*}\ \chi_\nu$$

die Sumation bedeutet, welche über alle Bereiche des Systems erstreckt werden soll, die ganz zur Kreisscheibe $K^*(R)$ mit dem neuen Zentrum U^* gehören, so gilt doch wegen $\chi_\nu \geqq 0$

$$\overset{R-\Delta}{\Sigma}\ \chi_\nu \leqq \overset{R}{\Sigma^*}\ \chi_\nu \leqq \overset{R+\Delta}{\Sigma}\ \chi_\nu,$$

wobei Δ die Distanz der beiden Mittelpunkte U und U^* bezeichnet. Also ist

$$\left(1-\frac{\Delta}{R}\right)^2 \frac{\overset{R-\Delta}{\Sigma}\ \chi_\nu}{\pi(R-\Delta)^2} \leq \frac{\overset{R}{\Sigma^*}\ \chi_\nu}{\pi R^2} \leqq \left(1+\frac{\Delta}{R}\right)^2 \frac{\overset{R+\Delta}{\Sigma}\ \chi_\nu}{\pi(R+\Delta)^2},$$

und hieraus folgt mit $R \to \infty$ offenbar die gewünschte Invarianz

(3) $$D^*[\chi] = D[\chi].$$

Sind nun weiter χ^1 und χ^2 zwei verschiedene Funktionale der betrachteten Art, so ist mit $\alpha_1 \geqq 0$ und $\alpha_2 \geqq 0$ auch

$$\chi = \alpha_1 \chi^1 + \alpha_2 \chi^2$$

ein ebensolches Funktional, und man hat die Beziehung

$$D[\chi] = \alpha_1 D[\chi^1] + \alpha_2 D[\chi^2]. \tag{4}$$

Ein triviales, im Zusammenhang mit unseren Betrachtungen aber wichtiges Funktional ist durch

$$\chi^0 = \chi^0(G_\nu) = 1 \tag{5}$$

gegeben. Die ihm zukommende Dichte, nämlich

$$D_0 = D[\chi^0] \tag{6}$$

wollen wir die Anzahldichte des Bereichsystems $\{G_\nu\}$ nennen. Es handelt sich also um die im Mittel auf die Flächeneinheit der Ebene entfallende Bereichanzahl. Diese Anzahldichte vermittelt einen einfachen Zusammenhang zwischen der Dichte und dem Mittelwert des Funktionals

Bezeichnet nämlich $N(R)$ die Anzahl der Bereiche des Systems, die ganz zum Kreis $K(R)$ gehören, so definieren wir zunächst

$$\bar{\chi} = \lim_{R \to \infty} \frac{\sum^R \chi_\nu}{N(R)} \tag{7}$$

falls der Grenzwert existiert; in diesem Falle nennen wir den durch (7 gelieferten Wert in naheliegender Weise Mittelwert des Funktionals. Selbstverständlich ist auch dieser Mittelwert bewegungsinvariant bezüglich des Bereichsystems.

Nun lässt sich aber schreiben

$$\frac{\sum^R \chi_\nu}{\pi R^2} = \left(\frac{\sum^R \chi_\nu}{N(R)}\right)\left(\frac{\sum^R \chi_\nu^0}{\pi R^2}\right).$$

Setzen wir etwa voraus, dass der Funktionalmittelwert $\bar{\chi}$ und die Anzahldichte D_0 existieren, so existiert auch die Funktionaldichte $D[\chi]$, und es gilt, wie sich aus der oben stehenden Relation mit $R \to \infty$ ergibt

$$D[\chi] = D_0 \bar{\chi}. \tag{8}$$

Es sei nun weiter G ein in der Ebene des Systems $\{G_\nu\}$ frei beweglicher, abgeschlossener und einfach zusammenhängender Bereich der Fläche F und der Randlänge L. Wir betrachten sodann das Funktional

$$\chi_\nu = \chi(G_\nu) = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(G\, G_\nu)\, dG, \tag{9}$$

wobei $\varphi(G\, G_\nu)$ die Eulersche Charakteristik der Durchschnitts $G\, G_\nu$

bezeichnet. Diese topologische Charakteristik kann als Differenz $n_a - n_i$ geschrieben werden, wobei n_a die Anzahl der äussern, n_i dagegen die Anzahl der innern Ränder der Durchschnittsmenge bezeichnet. In unserm Falle aber sind die Bereiche alle einfach zusammenhängend, so dass ein Durchschnitt zweier derartiger Bereiche keine innern Ränder aufzuweisen hat. Die Eulersche Charakteristik $\varphi(G G_\nu)$ gibt in diesem Fall die Anzahl der zusammenhängenden abgeschlossenen Stücke (Komponenten), in welche der Durchschnitt $G G_\nu$ zerlegt werden kann. Im Integral (9) bedeutet ferner dG die kinematische Dichte des beweglichen Bereiches G und die Integration hat sich über alle Lagen von G zu erstrecken, für welche $G G_\nu \neq 0$ ausfällt.

Nach der kinematischen Hauptformel der ebenen Integralgeometrie von W. Blaschke[3]) hat man für das durch (9) definierte Funktional

$$\chi_\nu = F + F_\nu + \frac{L L_\nu}{2\pi}, \tag{10}$$

und nach der Linearbeziehung (4) lässt sich für die zugeordnete Funktionaldichte

$$D[\chi] = F D_0 + D[F] + \frac{L}{2\pi} D[L] \tag{11}$$

schreiben, wobei $D[L]$ und $D[F]$ die den einfachen Funktionalen $\chi^1 = L$ und $\chi^2 = F$ zukommenden Dichten bedeuten. Im Hinblick auf (8) lässt sich weiter

$$D[\chi] = D_0\left(F + \bar{F} + \frac{L\bar{L}}{2\pi}\right) \tag{12}$$

schreiben. Wenn also die Anzahldichte D_0, der mittlere Flächeninhalt $\bar{F}$ und die mittlere Randlänge $\bar{L}$ existiert, so trifft dies auch zu für die Dichte des Funktionals (9) und es besteht die Beziehung (12).

Um einen neuen Gesichtspunkt zu gewinnen, führen wir noch die totale Stückzahl $S(G)$ des Bereiches G im Bereichsystem $\{G_\nu\}$ ein; diese ist gegeben durch

$$S(G) = \sum_1^\infty \varphi(G G_\nu). \tag{13}$$

Um diese Anzahl S zu ermitteln, muss man der Reihe nach für jeden von G getroffenen Bereich G_ν des Systems die Anzahl der Komponenten in welche der Durchschnitt $G G_\nu$ zerfällt, feststellen, und dann diese Anzahlen alle addieren.

Bei der in der Fig. 1 dargestellten Lage von G im Bereichsystem $\{G_\nu\}$ hat S den Wert 5.

Für die mittlere Stückzahl $\overline{S}$ hat man offenbar

$$S = \lim_{R \to \infty} \frac{{}^R\int S(G)\, dG}{{}^R\int dG} \tag{15}$$

zu setzen, wobei ${}^R\int$ die Integration über alle Lagen von G bezeichnet, für welche G mit dem Kreis $K(R)$ noch Punkte gemeinsam hat.

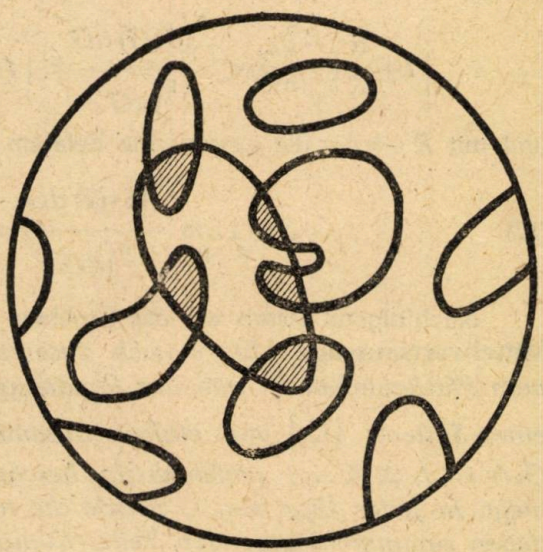


Fig. 1.

Wir setzen jetzt weiter voraus, dass die Durchmesser der Bereiche des Systems $\{G_\nu\}$ alle gleichmässig beschränkt seien. Es gelte etwa für die Durchmesser $d(G_\nu) \leqq d$ sowie auch $d(G) \leqq d$.

Nun lässt sich leicht beweisen, dass der Grenzwerte (15), der die mittlere Stückzahl $\overline{S}$ darstellt, unter den gleichen Voraussetzungen existiert wie die Funktionaldicht $D[\chi]$ nach (12), und dass die beiden genannten Werte gleich sind. Es soll also gelten

$$\overline{S} = D_0\left(F + \bar{F} + \frac{L\bar{L}}{2\pi}\right). \tag{16}$$

Diese Mittelwertsformel stellt das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit dar. Zum Beweise überlegen wir uns zunächst, dass einmal

$$\overset{R}{\Sigma}\varphi(GG_\nu) \leqq S(G) \leqq \overset{R+d}{\Sigma}\varphi(GG_\nu)$$

und dann

$$\overset{R}{\Sigma}\int \varphi(GG_\nu)\, dG \leqq {}^R\int S(G)\, dG \leqq \overset{R+d}{\Sigma}\int \varphi(GG_\nu)\, dG$$

sein wird. Die Integrale auf der linken und auf der rechten Seite sind dabei so zu verstehen, dass wie in (9) über alle Lagen von G integriert wird, für welche noch $GG_\nu \neq 0$ gilt. Die Integration in der

Mitte versteht sich indessen so, wie in (15) vorgeschrieben war, also über alle Lagen von G für welche $GK(R) \neq 0$ ausfällt.

Das Bestehen der angeschriebenen Ungleichung ist aber im Hinblick auf die in unserer Konstruktion vorliegenden besonderen Verhältnisse offenkundig. Ferner hat man

$$2\pi^2 R^2 < \int^R dG < 2\pi^2 (R+d)^2.$$

So ergibt sich denn

$$\left(1+\frac{d}{R}\right)^{-2} \frac{\sum^R \chi_\nu}{\pi R^2} < \frac{\int^R S(G)\, dG}{\int^R dG} < \left(1+\frac{d}{R}\right)^2 \frac{\sum^{R+d} \chi_\nu}{\pi (R+d)^2},$$

und mit $R \to \infty$ die gewünschte Relation

$$\bar{S} = \lim_{R\to\infty} \frac{\int^R S(G)\, dG}{\int^R dG} = D[\chi]. \tag{17}$$

Nachfolgend fassen wir das Ergebnis kurz zusammen. Es gilt die **Mittelwertsaussage:** *Ein einfach zusammenhängender Bereich G vom Flächeninhalt F und der Randlänge L werde in der Ebene eines Systems $\{G_\nu\}$ von einfach zusammenhängenden Bereichen G_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ gleichmässig beschränkter Durchmesser bewegt. In jeder Lage von G werde die totale Zahl S der verschiedenen zusammenhängenden Teile (Komponenten), aus welchen die nicht leeren Durchschnitte $G G_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ bestehen, festgestellt. Genügt das Bereichsystem den Voraussetzungen, die durch die Existenzforderung der drei unten folgenden Grenzwerte gegeben sind, so existiert auch der in passender Weise als Integralmittel definierte, über alle ebenen Bewegungen von G erstreckte Mittelwert von S, und diese mittlere Stückzahl ist gegeben durch die Formel*

$$\bar{S} = D_0 \left(F + \bar{F} + \frac{L\bar{L}}{2\pi}\right).$$

Hier bedeutet D_0 die Anzahldichte (Bereichanzahl pro Flächeneinheit) und $\bar{F}$ bzw. $\bar{L}$ den mittleren Flächeninhalt bzw. die mittlere Randlänge der Bereiche des Systems. Diese drei Werte sind durch die als existierend vorausgesetzten Grenzwerte

$$D_0 = \lim_{R\to\infty} \frac{N(R)}{\pi R^2};\quad \bar{F} = \lim_{R\to\infty} \frac{\sum^R F_\nu}{N(R)};\quad \bar{L} = \lim_{R\to\infty} \frac{\sum^R L_\nu}{N(R)}$$

definiert, wobei $N(R)$ die Anzahl der Bereiche des Systems $\{G_\nu\}$ bezeichnet, die ganz im Kreise vom Radius R um den Ursprung der Ebene liegen und wo das Symbol $\overset{R}{\Sigma}$ eine Summation bedeutet, die sich nur über die bei der Bestimmung von $N(R)$ mitgezählten Bereiche zu erstrecken hat.

Universität Bern
(Schweiz - Suisse)
Universität Budapest
(Hongrie)

(Reçu le 25 Septembre 1947).

Travaux cités

1) L. A. Santaló – Geometria integral de figuras ilimitades; Publicaciones del instituto de matematicas, Rosario 1939.
– Geometria Integral 31. *Sobre valores medios y probabilidades geometricas.* Hamburg Abh. 1939.
2) H. Hadwiger – *Ueber Mittelwerte im Figurengitter.* Commentarii Math. Helv., vol. 11, 1939.
3) W. Blaschke – *Vorlesungen über Integralgeometrie* I (zweite Aufl.) Hamburger Math. Einzelschriften 20. Heft, 1936, S. 30.

ÉTUDE DES SURFACES AU VOISINAGE D'UNE COURBE

par

GH. GHEORGHIEV

1. A l'aide du développement de Taylor, appliqué au vecteur de position d'une surface qui contient une courbe donnée, on étudie les voisinages de différents ordres de la surface le long de la courbe. On établit des relations de récurence entre les projections de certains vecteurs liés à ces voisinages. On trouve, de cette manière, les expressions des coefficients des deux formes quadratiques fondamentales de la surface. Cette méthode nous offre un moyen plus simple pour résoudre les deux problèmes suivants : déterminer une surface, dont l'élément linéaire est donné, passant par une courbe donnée, et le problème de Björling. On démontre que le problème de Plateau est équivalent au suivant : étant donnée une courbe fermée, déterminer ses courbes antidérivées, de même fermées, dont l'image des binormales soit renfermée dans une demi-sphère. On établit, de même, que le problème de Plateau se réduit à celui de Björling dans le cas où le contour est une courbe dérivée d'une courbe fermée dont les binormales satisfont la condition précédente. On démontre une relation simple entre les arcs de ces deux courbes, la torsion de la courbe dérivée et la courbure totale de la surface minima correspondante. Enfin, la même méthode nous permet de généraliser, pour les surfaces minima, le théorème de Steiner relatif aux podaires d'une courbe plane fermée.

II. Soit $\bar{r}(s)$ le vecteur de position de la courbe Γ tracée sur une surface S. Notons par $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$, les vecteurs unitaires du trièdre de Frenet dans un point M de la courbe ; $\bar{N}$ le vecteur unitaire de la normale à la surface en M et $\bar{t}_1 = [\bar{N}, \bar{t}]$; $\varkappa$, τ les courbures de la courbe Γ et G, N, T les courbures géodésique et normale et la torsion géodésique de la courbe Γ sur la surface S. On sait que :

(1) $$G = \varkappa \cos\varphi, \qquad N = \varkappa \sin\varphi, \qquad T = \tau + \frac{d\varphi}{ds}$$

où φ est l'angle entre la binormale de Γ et la normale $\bar{N}$ à la surface. On sait de même que le mouvement du trièdre de Darboux $(\bar{t}, \bar{t}_1, \bar{N})$ le long de Γ est régi par :

(2) $$\frac{d\bar{t}}{ds} = G\bar{t}_1 - N\bar{N}, \qquad \frac{d\bar{t}_1}{ds} = -G\bar{t} + T\bar{N}, \qquad \frac{d\bar{N}}{ds} = N\bar{t} - T\bar{t}_1$$

où le vecteur de rotation est : $\bar{\omega} = T\bar{t} + N\bar{t}_1 + G\bar{N}$.

Si Γ est une ligne asymptotique de la surface, alors $\varphi = 0$ et les expressions (2) se réduisent aux formules de Frenet.

Soit $\bar{R}(s, v)$ le vecteur de position de la surface S. Evidemment, nous avons : $R(s, v_0) = \bar{r}(s)$; on peut prendre : $v_0 = 0$. En considérant $\bar{R}(s, v)$ comme un fonction vectorielle de v, on peut lui appliquer le développement en série de Taylor :

(3) $$\bar{R}(s, v) = \bar{r}(s) + \sum_1^\infty \frac{v^i}{i!}\, \bar{r}_i(s).$$

La détermination de la surface qui contient Γ dépend de la connaissance de la suite des vecteurs $\bar{r}_i(s)$, attachés au trièdre mobile de la courbe. En notant par : $\bar{r}_i = A_i\bar{t} + B_i\bar{t}_1 + C_i\bar{N}$ (4) et par : $\dot{\bar{r}}_i = \dot{A}_i\bar{t} + \dot{B}_i\bar{t}_1 + \dot{C}_i\bar{N}$ et en utilisant les formules (2), nous avons :

$$\dot{A}_i = \frac{dA_i}{ds} - GB_i + NC_i, \quad \dot{B}_i = \frac{dB_i}{ds} + GA_i - TC_i, \quad \dot{C}_i = \frac{dC_i}{ds} - NA_i + TB_i.$$

En appliquant ce procédé au vecteur $\dot{\bar{r}}_i$, on peut déduire de la même manière les expressions pour $\ddot{\bar{r}}_i$.

En supposant que les opérations effectuées sont valables et en notant par des points les dérivées par rapport à s (l'arc de Γ) et par des accents les dérivées par rapport à v, nous avons :

$$\dot{\bar{R}} = \bar{t} + \sum_1^\infty \frac{v^i}{i!}\dot{\bar{r}}_i, \qquad \bar{R}' = \sum_1^\infty \frac{v^{i-1}}{(i-1)!}\bar{r}_i,$$

$$\ddot{\bar{R}} = G\bar{t}_1 - N\bar{N} + \sum_1^\infty \frac{v^K}{K!}\ddot{\bar{r}}_K, \quad \dot{\bar{R}}' = \sum_1^\infty \frac{v^{K-1}}{(K-1)!}\dot{\bar{r}}_K, \quad \bar{R}'' = \sum_2^\infty \frac{v^{K-2}}{(K-2)!}\bar{r}_K.$$

Donc :

$$(5)\qquad [\dot{R},\ \bar{R}'] = \sum_{n=0}^{\infty} v^n \left\{ \frac{1}{n!}\,[\bar{t},\ \bar{r}_n] + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!\,(n-i)!}\,[\dot{\bar{r}}_i,\ \bar{r}_{n+1-i}] \right\}$$

$$E = \dot{\bar{R}}^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} v^n \left\{ \frac{2}{n!}\,[\bar{t},\ \dot{\bar{r}}_n] + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\dot{\bar{r}}_i,\ \dot{\bar{r}}_{n-i})}{i!\,(n-i)!} \right\}$$

$$(6)\qquad F = (\dot{\bar{R}},\ \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} v^n \left\{ \frac{1}{n!}\,(\bar{t},\ \bar{r}_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(\dot{\bar{r}}_i,\ \bar{r}_{n+1-i})}{i!\,(n-i)!} \right\}$$

$$G = \bar{R}'^2 = \sum_{n=0}^{\infty} v^n \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(\bar{r}_i,\ \bar{r}_{n+2-i})}{(i-1)!\,(n+1-i)!},\qquad H = \sqrt{EG - F^2}\,.$$

Nous avons:

$$DH = (\ddot{\bar{R}},\ \dot{\bar{R}},\ \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} v^n \left\{ -\frac{1}{n!}\,(N\bar{t}_1 + G\bar{N},\ \bar{r}_{n+1}) + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!\,(n-i)!} \left[(G\bar{t}_1 - N\bar{N},\ \dot{\bar{r}}_i,\ \bar{r}_{n+1-i}) + (\ddot{\bar{r}}_i,\ \bar{t},\ \bar{r}_{n+1-i}) \right] +$$

$$\left. + \sum_{i,\gamma=1}^{i+\gamma=n} \frac{(\ddot{\bar{r}}_i,\ \dot{\bar{r}}_{n+1-i-\gamma},\ \bar{r}_\gamma)}{i!\,(\gamma-1)!\,(n+1-i-\gamma)!} \right\}$$

$$(7)\qquad D'H = (\dot{\bar{R}}',\ \dot{\bar{R}},\ \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} v^n \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(\dot{\bar{r}}_i,\ \bar{t},\ \bar{r}_{n+2-i})}{(i-1)!\,(n+1-i)!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,\gamma=1}^{i+\gamma=n+1} \frac{(\dot{\bar{r}}_\gamma,\ \dot{\bar{r}}_i,\ \bar{r}_{n+2-i-\gamma})}{i!\,(\gamma-1)!\,(n+1-i-\gamma)!} \right\}$$

$$D''H = (\ddot{\bar{R}},\ \dot{\bar{R}},\ \bar{R}') = \sum_{n=0}^{\infty} v^n \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(\bar{r}_{n+3-i},\ \bar{t},\ \bar{r}_i)}{(i-1)!\,(n+1-i)!} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,\gamma=1}^{i+\gamma=n+1} \frac{(\bar{r}_{n+3-i-\gamma},\ \dot{\bar{r}}_i,\ \bar{r}_\gamma)}{i!\,(\gamma-1)!\,(n+1-i-\gamma)!} \right.$$

en ces formules nous supposons.

$r_0 = r_{-1} = r_{-2} = \ldots = 0$ et $0! = (-1)! = (-2)! = \ldots = 1!$

De même nous avons

$$H(D+ED'') = \sum_{n=0}^{\infty} v^n \left\{ -\frac{1}{n!}(N\bar{t}_1 + G\bar{N}, \bar{r}_{n+1}) + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{(G\bar{t}_1 - N\bar{N}, \dot{\bar{r}}_i, \bar{r}_{n+1-i}) + (\ddot{\bar{r}}_i, \bar{t}, \bar{r}_{n+1-i})}{i!\,(n-i)!} +$$

$$(8) \quad + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(\bar{r}_{n+3-i}, \bar{t}, \bar{r}_i)}{(i-1)!\,(n+1-i)!} + \sum_{i,\gamma=1}^{i+\gamma=n} \frac{(\ddot{\bar{r}}_i, \dot{\bar{r}}_{n+1-i-\gamma}, \bar{r}_\gamma)}{i!\,(\gamma-1)!\,(n+1-i-\gamma)!} +$$

$$+ \sum_{i,\gamma=1}^{i+\gamma=n+1} \frac{(\bar{r}_{n+3-i-\gamma}, \dot{\bar{r}}_i, \bar{r}_\gamma) + 2(\bar{t}, \ddot{\bar{r}}_i)(\bar{r}_{n+3-i-\gamma}, \bar{t}, \bar{r}_\gamma)}{i!\,(\gamma-1)!\,(n+1-i-\gamma)!} +$$

$$+ \sum_{i,\gamma,K=1}^{i+\gamma+K=n+1} \frac{2(\bar{t}, \dot{\bar{r}}_i)(\bar{r}_{n+3-i-\gamma-K}, \dot{\bar{r}}_\gamma, \bar{r}_K) + (\dot{\bar{r}}_i, \dot{\bar{r}}_\gamma)(\bar{r}_{n+3-i-\gamma-K}, \bar{t}, \bar{r}_K)}{i!\,\gamma!\,(K-1)!\,(n+1-i-\gamma-K)!} +$$

$$\left. + \sum_{i,\gamma,K,l=1}^{i+\gamma+K+l=n+1} \frac{(\dot{\bar{r}}_i, \dot{\bar{r}}_\gamma)(\bar{r}_{n+3-i-\gamma-K-l}, \dot{\bar{r}}_K, \bar{r}_l)}{i!\,\gamma!\,K!\,(l-1)!\,(n+1-i-\gamma-K-l)!} \right\}$$

formules qui nous seront utiles plus tard.

III. *Surfaces à élément linéaire donné passant par une courbe donnée.* On sait que : „si sur une surface flexible et inextensible on maintien rigide une courbe, la surface ne peut pas se déformer en exceptant le cas où celle-ci est une ligne asymptotique sur la surface“ [1]). Pour cela il suffit de démontrer que la suite des vecteurs r_i a une détermination unique. On considère sur la surface, la famille des géodésiques orthogonales à Γ et celle géodésiquement paralièle à Γ. L'élément linéaire sera donné par :

$$d\sigma^2 = E\,du^2 + dv^2$$

où :

$$(9) \qquad E = \sum_{0}^{\infty} a_i v^i$$

a_i étant fonctions donnés de u.

En égalant les coefficients des mêmes puissances de v des identités suivants (par rapport à v) :

(10) $$E \equiv \Sigma a_i v^i, \qquad F \equiv 0, \quad G \equiv 0$$

on obtient pour $i = 0, 1, 2$:

(11) $$a_0 = 1, \quad (\bar{r}_1, \bar{t}) = 0 \quad \bar{r}_1^2 = 1$$

(12) $$a_1 = 2(\bar{t}, \dot{\bar{r}}_1), \quad (\bar{t}, \bar{r}_2) + (\dot{\bar{r}}_1, \bar{r}_1) = 0 \quad (\bar{r}_1, \bar{r}_2) = 0$$

(13) $$a_2 = (\bar{t}, \dot{\bar{r}}_2) + \dot{\bar{r}}_1^2, \frac{(\bar{t}, \bar{r}_3)}{2} + (\dot{\bar{r}}_1, \bar{r}_2) + \frac{(\dot{\bar{r}}_2, \bar{r}_1)}{2} = 0,$$

$$\bar{r}_2^2 + (\bar{r}_1, \bar{r}_3) = 0.$$

Si $a_0 \neq 1$, alors il suffit de prendre : $s = \int \sqrt{a_0}\, du + c$.

On remarque que, pour $i = 1$, $\bar{r}_1$ est déterminé et l'on a deux relations linéaires entre les projections de $\bar{r}_2$. Utilisons la méthode de l'induction complète. Supposons donné pour $i = n$, tous les $\bar{r}_i$ et $(\bar{t}, \dot{\bar{r}}_{n+1})$ et une relation linéaire entre $(\bar{r}_{n+1}, \bar{t}_1)$ et $(\bar{r}_{n+1}, \bar{N})$. En égalant les coefficients de v^{n+1} on obtient :

(14) $$a_{n+1} = \frac{2}{(n+1)!}(\bar{t}, \dot{\bar{r}}_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(\dot{\bar{r}}_i, \dot{\bar{r}}_{n+1-i})}{i!\,(n+2-i)!}$$

(15) $$\frac{(\bar{t}, \bar{r}_{n+2})}{(n+1)!} + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{(\dot{\bar{r}}_i, \bar{r}_{n+2-i})}{i!\,(n+1-i)!} = 0$$

(16) $$\sum_{i=1}^{n+2} \frac{(\bar{r}_1, \bar{r}_{n+3-i})}{(i-1)!\,(n+2-i)!} = 0.$$

En connaissant $(\bar{r}_{n+1}, \bar{t})$ on détermine $(\dot{\bar{r}}_{n+1}, \bar{t})$ en fonction de $(\bar{r}_{n+1}, \bar{t}_1)$ et $(\bar{r}_{n+1}, \bar{N})$ alors les deux relations antérieures et (14) déterminent complètement $\bar{r}_{n+1}$; l'équation (15) nous donne $(\bar{r}_{n+2}, \bar{t})$ et (17), une relation linéaire entre $(\bar{r}_{n+2}, \bar{t}_1)$ et $(\bar{r}_{n+2}, \bar{N})$. De cette manière, la loi de récurrence est établie et la surface S est déterminée univoquement.

Remarques : I. La courbure géodésique de la courbe Γ et la courbure totale de S le long de Γ est :

$$G = -\frac{a_1}{2}, \qquad K_\Gamma = \frac{1}{4} a_1^2 - a_2 .$$

Il s'en suit :

(17) $$\lambda N + T^2 + K_\Gamma = 0$$

où λ est la grandeur du vecteur $\bar{r}_2$; on voit aisément qu'il est l'inverse du paramètre de la parabole tangente à la courbe $s = \text{const.}$ ayant le sommet en M (le point de la courbe Γ). Quand λ est déterminé, (17) représente l'équation naturelle des courbes de la surface. Si Γ est une géodésique de la surface, (17) devient:

$$\varkappa\lambda + \tau^2 + K_\Gamma = 0.$$

Si Γ est une ligne asymptotique, elle devient: $\tau^2 + K_\Gamma = 0$, c'est le théorème de Beltrami-Enneper. Puisque la courbure géodésique de la courbe Γ et la courbure totale de S le long de Γ sont indépendentes de la grandeur λ du vecteur $\bar{r}_2$, il en résulte que, si Γ est une asymptotique, il y a une infinité de surfaces qui passent par Γ, ayant le même élément linéaire.

Si Γ est plane, (17) devient: $\lambda \varkappa \sin\varphi + \dot{\varphi}^2 + K_\Gamma = 0$ où φ est l'angle entre la normale au plan et la normale à la surface; si de même, $\dot{\varphi} = 0$, elle devient:

$$\lambda \varkappa \sin\varphi + K_\Gamma = 0$$

relation qui est satisfaite aussi par une ligne de courbure; d'où, il en résulte la propriété bien connue des lignes de courbures planes de couper la surface sous un angle constant.

2. Si a_i de (9) sont constants, alors S est une surface de rotation; ainsi: par une courbe donnée, passe une seule surface applicable sur une surface de rotation donnée. La première de (12) donne: $\varkappa(\bar{r}_1, \bar{n}) = \text{const.}$ c'est le théorème de Clairaut. La deuxième de (13) exprime que Γ est une ligne d'égale courbure totale sur cette surface.

3. Si, le long de la courbe Γ, est donnée la développable circonscrite à la surface, cela revient à donner seulement a_0 et a_1 de (9). Donc, par une courbe Γ il passe une infinité de surfaces sur lesquelles Γ joue un rôle déterminé, par exemple, celui de ligne asymptotique, géodésique etc.

4. Si Γ est une courbe fermée, afin que la surface qui la contient soit déterminée univoquement, il est nécessaire que tous les $\bar{r}_i$ soient fonctions périodiques, de s, c'est à dire tous les coefficients du développement (9) soient fonctions périodiques ayant l'amplitude l (longueur de la courbe Γ).

IV. Appliquons la méthode des approximations successives au problème suivant: étant donnée une développable et un arc de courbe Γ sur celle-ci, il y a une seule surface minima tangente à la développable le long de l'arc Γ. En rapportant la surface au réseau des géodésiques orthogonales à Γ et géodésiquement parallèles à Γ, les conditions du problème seront exprimées par:

$$F \equiv 0 \quad G \equiv 1 \quad ED'' + D \equiv 0.$$

Comme précédemment, les identités sont considérées par rapport à v: Laissons de coté, pour le moment, le cas où Γ est une ligne asymptotique ou une ligne de courbure sur S, puisque dans le cas des surfaces minima, tant le réseau des asymptotiques, que celui des lignes de courbure, forment un réseau isotherme (en ce cas on imposerait à la famille $s = \text{const.}$ d'être en même temps géodésique et asymptotique ou géodésique et ligne de courbure, cas possibles mais particuliers). En remplaçant en (18) les expressions de (6~8) et en égalant les coefficients on obtient pour $i = 0,1,2$:

$$(19) \qquad (\bar{r}_1, \bar{t}) = 0 \qquad \bar{r}_1^2 = 0 \qquad -\varkappa(\bar{b}, \bar{r}_1) + (\bar{r}_2, \bar{t}, \bar{r}_1) = 0$$

$$(20) \qquad \begin{aligned} &(\bar{r}_2, \bar{t}) + (\bar{r}_1, \dot{\bar{r}}_1) = 0, \ (\bar{r}_1, \bar{r}_2) = 0, -\varkappa(\bar{b}, \bar{r}_2) + \varkappa(\bar{n}, \dot{\bar{r}}_1, \bar{r}_1) + \\ &+ (\ddot{\bar{r}}_1, \bar{t}, \bar{r}_1) + (\bar{r}_3, \bar{t}, \bar{r}_1) + (\bar{r}_2, \dot{\bar{r}}_1, \bar{r}_1) + 2(\bar{t}, \dot{\bar{r}}_1)(\bar{r}_2, \bar{t}, \bar{r}_1) = 0 \end{aligned}$$

$$(21) \qquad (\bar{r}_3, \bar{t}) + 2(\dot{\bar{r}}_1, \bar{r}_2) + (\bar{r}_1, \dot{\bar{r}}_2) = 0, \ \bar{r}_2^2 + (\bar{r}_1, \bar{r}_3) = 0, \ (\bar{r}_4, \bar{t}, \bar{r}_1) = \varphi_3(s)$$

où par $\varphi_3(s)$ on a noté une expression qui dépend de $\bar{r}_1 (i = 1,2,3)$ et leurs dérivées. Les deux premières de (19) nous donnent:

$$(22) \qquad \bar{r}_1 = \bar{t}_1.$$

La dernière de (19) et les deux premières de (20) nous donnent:

$$(22) \qquad \bar{r}_2 = \lambda \bar{N} \quad \text{où} \quad \lambda = N.$$

La dernière de (20) et les deux premières de (21) nous donnent:

$$(22) \qquad \bar{r}_3 = -NT\bar{t} - N^2 \bar{t}_1 + (2GN - \dot{T})\bar{N}.$$

Ces résultats nous induisent à supposer que, généralement, pour $i = n$, nous aurions obténus tous les $\bar{r}_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ et une relation pour $\bar{r}_{n+2}$. Ce fait peut être démontré par induction complète et l'on trouve:

$$\frac{(\bar{t}, \bar{r}_{n+1})}{n!} + \psi_1(s) = 0, \ 2\frac{(\bar{r}_1, \bar{r}_{n+1})}{n!} + \psi_2(s) = 0, \ \frac{(\bar{r}_{n+2}, \bar{t}, \bar{r}_1)}{n!} + \psi_3(\bar{r}_{n+1}, s) = 0$$

où ψ_1, ψ_2 contiennent seulement $\bar{r}_1, \ldots, \bar{r}_n$. Donc la surface est univoquement déterminé.

Dans la cas où Γ serait asymptotique sur la surface minima, en rapportant la surface au réseau des lignes asymptotiques, nous avons les conditions:

$$F \equiv 0 \quad D \equiv 0 \quad D'' \equiv 0.$$

En identifiant les coefficients des mêmes puissances en v, pour $n=0,1$ on obtient :

$$(\bar{r}_1, \bar{t}) = 0 \qquad \varkappa(\bar{b}, \bar{r}_1) = 0 \qquad (\bar{r}_2, \bar{t}, \bar{r}_1) = 0$$

$$(\bar{r}_2, \bar{t}) + (\bar{r}_1, \dot{\bar{r}}_1) = 0, \quad \varkappa(\bar{b}, \bar{r}_2) + \varkappa(\bar{n}, \dot{\bar{r}}_1, \bar{r}_1) + (\ddot{\bar{r}}_1, \bar{t}, \bar{r}_1) = 0$$

$$(\bar{r}_3, \bar{t}, \bar{r}_1) + (\bar{r}_2, \dot{\bar{r}}_1, \bar{r}_1) = 0.$$

On voit, sans peine que, tous les $\bar{r}_n$ sont déterminés jusqu'à une constante arbitraire ($\bar{r}_1$ par une quadrature et les autres par deux quadratures). Si Γ est une ligne de courbure sur la surface, on obtient un résultat analogue. Donc : parmi les surfaces qui passent par un arc de courbe Γ en l'admettant comme ligne asymptotique ou de courbure, il y a une infinité de surfaces minima, dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable.

Remarque: Dans le cas des surfaces minima, la relation (17) devient

$$N^2 + T^2 + K_\Gamma = 0 \tag{23}$$

elle représente l'équation naturelle des courbes d'une surface minima.

Les géodésiques de ces surfaces ont l'équation naturelle :

$$\varkappa^2 + \tau^2 + K_\Gamma = 0. \tag{24}$$

V. *Sur le problème de Plateau.* Ou sait que, dans ce problème, on cherche la surface passant par un contour donné de manière que l'aire de la calotte limitée par ce contour soit minima. En étudiant la variation première de l'aire respective, on prouve aisément que la surface doit être de courbure moyenne nulle ; mais, cette condition est seulement nécessaire. Schwarz, dans son étude sur la variation seconde de l'aire, a donné la condition suffisante, condition qu'on peut énoncer comme il suit [2] : „si l'image sphérique de la portion S, limitée par le contour Γ est entièrement intérieure à une demi-sphère il est valable la propriété du minimum de l'aire". Nous pouvons nous poser la question suivante: comment est placée, en ce cas, l'image sphérique (γ) des normales à la surface le long de la courbe Γ par rapport à l'image sphérique de cette calotte ? Nous avons les deux possibilités : ou (γ) est le contour qui limite la calotte sphérique Σ, ou elle est à son intérieur. Excluons la deuxième possibilité dans le cas d'une surface de courbure moyenne nulle. Pour cela, nous allons établir comment varie la normale à la surface le long de la ligne $s=$const. (v variable). Soit σ l'angle de la normale à la surface dans un point quel-

conque de la ligne v et la normale à la surface dans le point M où cette ligne coupe Γ. Nous avons:

$$\cos\sigma = \left(\frac{[\dot{\overline{R}}, \overline{R'}]}{\sqrt{E}}, \overline{N_0} \right). \tag{25}$$

Les extrêmums de cette fonction, le long de la ligne v, seront donnés par:

$$\frac{\partial}{\partial v}(\cos\sigma) = 0$$

c'est à dire par:

$$(2E[\dot{\overline{R}}, \overline{R'}]_v - E_v[\dot{\overline{R}}, \overline{R'}], \overline{N_0}) = 0 \tag{26}$$

où:

$$\overline{N_0} = [\overline{t}, \overline{r_1}]$$

et les autres expressions se déterminent par (5-6). (26) se réduit en ce cas (quand S est à courbure moyenne nulle) à:

$$0 = (2G^2 + N^2 + T^2)\, v + \ldots$$

Puisque $v = 0$ est une solution de l'équation dérivée pour tout point de Γ et, d'autre part, le coefficient de v est toujours positif, il en résulte que (λ) est le lieu des positions extrêmums des normales à la surface sur toute la calotte puisque les portions des lignes $s = \text{const.}$ avec un signe fixe pour v, se trouvent à l'intérieure de la calotte. Donc la condition suffisante peut être précisée comme il suit: si l'image sphérique des normales à la surface le long du contour Γ est intérieure à une demi-sphère, alors, par Γ, passe une surface de courbure moyenne nulle ayant l'aire de la calotte limitée par Γ, minima. Ainsi donc la résolution du problème de Plateau se réduit à la détermination d'une développable D qui passant par Γ dont l'arête de rebroussement étant une courbe fermée, ait une image sphérique des binormales contenue entièrement dans une demi-sphère, ou, ce qui est la même chose: étant donnée une courbe fermée Γ, déterminer ses antidérivées δ fermées, ayant l'image sphérique des binormales contenue dans une demi-sphère.

Reciproquement: si nous avons une courbe fermée δ, dont l'image sphérique des binormales est contenue dans une demi-sphère, par n'importe quelle de ses dérivées fermées, on peut mener une surface minima tangente à la développable des plans osculateurs de la courbe δ qui corresponde au problème de Plateau. En ce cas, le problème de Plateau se réduit au problème de Björling et la surface

se détermine ou par la résolution classique de ce problème (en appliquant les formules de Schwarz) ou par la méthode exposée plus haut.

Conséquences : I. La surface de courbure moyenne nulle qui passe par un contour et est tangente, le long de celui-ci, à la développable rectifiante du contour ne peut satisfaire la condition de minimum de l'aire puisque l'image sphérique des normales à la surface le long de ce contour enfermerait, conformément au théorème de Jacobi, une aire égale à une demi-sphère, donc ne pourrait pas être intérieure à une demi-sphère.

2. Des résultats précédents, il s'en suit que les lignes asymptotiques et celles de courbures d'une surface minima ne peuvent être fermées.

3. En utilisant les relations entre les éléments naturels d'une courbe et ceux de ses dérivées[3]) :

$$N = \varkappa_1 \sin \varphi = \tau \sin \theta \frac{ds}{ds_1}$$

$$T = \tau_1 + \dot{\varphi} = \tau \cos \theta \frac{ds}{ds_1}$$

$$G = \varkappa_1 \cos \varphi = \varkappa \frac{ds}{ds_1} + \frac{d\theta}{ds_1}$$

on déduit :

$$N^2 + T^2 = \tau^2 \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2.$$

En vertu de la relation (23), elle devient :

$$\tau^2 \left(\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + K_\Gamma = 0 \tag{27}$$

ou

$$\tau \, ds = \sqrt{-K_\Gamma} \, ds_1$$

où τ est la torsion de la courbe δ, ds son arc, ds_1 l'arc de la courbe dérivée Γ et K_Γ la courbure totale de la surface minima le long de Γ.

VI. *Applications.* Pour les courbes fermées qui ont l'image sphérique des binormales contenue dans une demi-sphère, on peut généraliser le théorème suivant de Steiner concernant les aires des courbes planes : étant donnée une courbe plane C, fermée et convexe, le lieu des points pour lesquels l'aire de la podaire est constante, est un cercle ayant le centre dans le centre de gravité des courbures de la courbe C.

Soit Γ une courbe gauche fermée dont l'image des binormales

est contenue dans une demi-sphère ; cherchons les points de l'espace les podaires desquels par rapport à Γ aient une aire constante sur la surface minima qui les contient. La podaire d'une courbe étant une de ses courbes dérivées, on peut appliquer le théorème précédent. La podaire sur la tangente à Γ d'un point $P(\bar{p})$ sera :

$$\bar{r}_1 = \bar{p} + \lambda \bar{u}, \qquad (\bar{u}, \bar{t}) = 0$$

d'autre part :

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \mu \bar{t}$$

d'où :

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + [(\bar{p}, \bar{t}) - (\bar{r}, \bar{t})]\bar{t}. \tag{28}$$

La surface minima qui contient la podaire (P) et est tangente à la développable des plans osculateurs à Γ aura l'aire donné par [4]).

$$A = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} (\bar{r}_1, d\bar{r}_1, \bar{b}). \tag{29}$$

En dérivant (28), on obtient :

$$\bar{r}_1' = \varkappa \left\{ \left[(\bar{p}, \bar{n}) - (\bar{r}, \bar{n}) \right] \bar{t} + \left[(\bar{p}, \bar{t}) - (\bar{r}, \bar{t}) \right] \bar{n} \right\}$$

et alors :

$$(\bar{r}_1, \bar{r}_1', \bar{b}) = \varkappa \left\{ (\bar{p}, \bar{t})^2 + (\bar{r}, \bar{n})^2 - (\bar{p}, \bar{r} - (\bar{r}, \bar{b})\bar{b}) \right\}$$

et :

$$2A = \int_{\Gamma} \left\{ (\bar{p}, \bar{t})^2 + (\bar{r}, \bar{x})^2 - (\bar{p}, \bar{r} - (\bar{r}, \bar{b})\bar{b}) \right\} \varkappa \, ds .$$

En projetant ces vecteurs sur un trièdre fixe, nous avons :

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}, \quad \bar{t} = \alpha\bar{i} + \beta\bar{j} + \gamma\bar{k}$$

$$\bar{p} = p\bar{i} + q\bar{j} + r\bar{k}, \ (\bar{p}, \bar{t}) = p\alpha + q\beta + r\gamma \quad \text{etc.}$$

(30) en ce cas, devient :

$$p^2 \int_{\Gamma} \alpha^2 d\varphi + q^2 \int_{\Gamma} \beta^2 d\varphi + r^2 \int_{\Gamma} \gamma^2 d\varphi + 2pq \int_{\Gamma} \alpha\beta \, d\varphi + \ldots .$$

$$- p \int_{\Gamma} [x - \lambda(x\lambda + y\mu + z\nu)] d\varphi - \ldots . = 2A - \int_{\Gamma} (\bar{r}, \bar{n})^2 d\varphi$$

où $d\varphi = \varkappa \, ds$.

D'où : le lieu des points de l'espace les podaires (P) desquels par rapport à une courbe Γ, fermée et regulière, avec l'image des binormales contenue dans une demi-sphère, détermine une aire constante

sur la surface minima qui contient (P) et est tangente le long du contour (P) à la développable des plans osculateurs à Γ, est une quadrique.

Dans le cas particulier des courbes planes, la quadrique se réduit au cylindre, la section duquel avec le plan de la courbe est le cercle de Steiner.

Séminaire Mathématique
de l'Université
de Jassy

(Reçu le 28 Septembre 1947)

Travaux cités

1) Bianchi L. – Lez. Geom. Diff. terza ediz. vol I, pag. 363.
2) » » » » » » » » 605.
3) Gheorghiev Gh. – *Sur certaines courbes dérivées* etc. Bull. Ec. Polyt., Jassy, 1_2 (1946) pag. 226.
4) Blaschke W. – Diff. Geom. B. I § 94.

DER INDIZES-KALKUL UND SEINE ANWENDUNG IN DER ALGEBRA

von

K. REICHENEDER

In der Mathematik versteht man bekanntlich unter einer Matrix ein Schema von Zahlen, allgemein von Grössen, welche nach Reihen und Kolonnen geordnet sind, und seit Cayley bezeichnet man ihre Gesamtheit durch einen einzigen Buchstaben; z. B.

$$\left\| \begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{v1} & c_{v2} & \cdots & c_{vn} \end{array} \right\| = C$$

Einen Wert, jene wichtige Eigenschaft einer algebraischen Grösse, besitzt C nicht; es ist nur ein Name für ein Zahlenschema und obige Gleichung daher nur symbolisch aufzufassen. Nichtsdestoweniger operiert man mit diesen Symbolen, bildet Produkte und Reihen, ja sogar Funktionen von Matrizen. Fast möchte man von einer Sünde wider den heiligen Geist der Mathematik sprechen, aber oft handelt es sich dabei gar nicht um reine Spekulationen der Mathematiker, sondern um Entwicklungen, welche sich bei praktischen Problemen aufdrängen. So spiegelt das Matrizenprodukt $C = AB$ das Bedürfnis wider, zwei aufeinanderfolgende lineare Transformationen A und B durch eine einzige Transformation C kurz auszudrucken und ähnlich liegen die Verhältnisse in den meisten Fällen.

Es ist indessen gar nicht notwendig den festen Boden der Algebra zu verlassen, wenn man das einzelne Glied $c_{\lambda m}$ statt deren Gesamtheit C als Grundlage der Matrizenrechnung benutzt. Da sich der Namei „Matrix" im letzten Sinne eingebürgert hat, möchte ich im Gegensatz hierzu c_{λ_m} als „Matrikel" bezeichnen. Dieses stellt also den allgeme-

einen Vertreter der Glieder ein Matrix C dar, indem λ und m sämtliche im Bereich der Aufgabe liegenden Werte annehmen können und bedeutet andererseits bei einem bestimmten λ, m eine ganz bestimmte Grösse im algebraischen Sinne. Durch die Verwendung verschiedener Alphabete bei der Indizesbezeichnung will ich äusserlich zum Ausdruck bringen, dass hier die beiden Indizes einen verschieden grossen Bereich (rechteckige Matrix) durchlaufen können.

Damit nun das Rechnen mit Matrikeln dasselbe einfache Gesicht erhält, welches man bei der nur symbolischen Matrizenrechnung schätzt, sind freilich einige zum Teil neue Begriffe notwendig Es ist eine Eigentümlichkeit des Matrizenkalküls, dass dort das einzelne Produkt zweier Glieder gar kein Interesse beansprucht, sondern stets nur die Summe solcher Produkte. Dieser Eigenart Rechnung tragend, spreche ich kurz von „Multisummation" und meine damit die Bildung solcher Produktsummen, also jene kombinierte Rechenoperation. Da ausnahmslos über sämtliche Werte summiert wird, welche ein Index annehmen kann, besteht über die Zahl der Summanden keinerlei Zweifel. Diese Tatsache erlaubt als weitere Vereinfachung, – welche der Mathematik übrigens nicht fremd ist (Riccikalkül) –, das Summenzeichen überhaupt fortzulassen. An seine Stelle tritt die Summationsregel, derzufolge über jeden innerhalb eines Ausdsucks doppelt auftretenden Index zu summieren ist. Man schreibt also z. B. statt $\sum_{m} c_{m\lambda}\, c_{m\mu}$ einfach $c_{m\lambda}\, c_{m\mu}$ oder auch $c_{i\lambda}\, c_{i\mu}$ – der „Summationsindex" kann ja irgendwie heissen – und sagt kurz $c_{m\lambda}$ und $c_{m\mu}$ werden „multisummiert". Als eine Selbstverständlichkeit möchte ich nur erwähnen, dass eine Gleicnung richtig bleibt, wenn beide Seiten mit derselben Matrikel multisummiert werden.

Bei diesem Kalkül, welcher sich auf den Begriffen Matrikel, Multisummation und Summationsregel aufbaut, liegt das Schwergewicht der Rechnung bei den Indizes und daher spreche ich von einem „Indizes-Kalkül". Im Gegensatz zur Matrizenrechnung gilt hier das kommutative Gesetz uneingeschränkt; d. h. es ist $a_{m\lambda}\, b_{m\mu} = b_{m\mu}\, a_{m\lambda}$. Wie könnte es auch anders sein, wo wir es mit gewöhnlichen algebraischen Grössen zu tun haben. Die Indizes selbst dürfen jedoch nur bei symmetrischen Grössen vertauscht werden, während im allgemeinen $c_{m\lambda} \neq c_{\lambda m}$ ist.

Wir führen noch die Einheitsmatrikel I_{ik} ein – diese Abkürzung erscheint mir sinngemässer als das Kroneckersche Zeichen δ_{ik} –

$$(1)\qquad I_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ für } i = k \\ 0 \;\;„\;\; i \neq k \end{cases} \quad ; \quad \text{in Matrizendarstellung } I = \left\| \begin{matrix} 100..0 \\ 010..0 \\ ..... \\ 000..1 \end{matrix} \right\|$$

und das inverse Matrikel. Man nennt $\Phi_{\lambda\mu}$ invers zu $F_{\mu\varrho}$, wenn die „Gleichung" (in Wirklichkeit sind es mehrere Systeme von Gleichungen) besteht

(2) $$\Phi_{\lambda\mu} F_{\mu\varrho} = I_{\lambda\varrho} \quad \text{oder auch} \quad F_{\mu\varrho} \Phi_{\varrho\delta} = I_{\mu\delta}.$$

Bei eindimensionalen Grössen entsprechen die Einheitsmatrikel der Zahl 1 und die inverse Matrikel der reziproken Zahl.

Da wir den Indizeskalkül nur als Hilfsmittel benutzen, nicht als Selbstzweck betreiben, wollen wir seine Nützlichkeit und die Einfachheit seiner Handhabung an praktischen Beispielen zeigen, eine ausführliche Darstellung findet man in [1].

1) Zwei aufeinanderfolgende lineare Transformationen $y_i = a_{ik} x_k$ und $z_m = b_{mi} y_i$ lassen sich durch eine einzige ersetzen. Substituiert man y_i aus der ersten in die zweite Gleichung, so ergibt sich unmittelbar $z_m = b_{mi} a_{ik} x_k = c_{mk} x_k$, wo also $c_{mk} = b_{mi} a_{ik}$ ist. Man beachte, dass nach dem üblichen Matrizenkalkül auch sehr einfach $C = BA$ geschrieben werden kann, aber wegen der Produktdefinition „Reihen mit Spalten" ist $AB \neq BA$. Demgegenüber schliessen die *sichtbaren* (Summations-) Indizes bei Matrikeln jede Verwechslung von vornherein aus.

2) Es wurde behauptet, die Definitionsgleichungen (2) führen zur nämlichen Inversen $\Phi_{\lambda\mu}$. Zum Beweis nehmen nehmen wir einmal an, dass durch die zweite Gleichung eine andere Matrikel $\Psi_{\varrho\delta}$ definiert, statt dieser Gleichung also $F_{\mu\varrho}\Psi_{\varrho\delta} = I_{\mu\delta}$ zu schreiben wäre. Multisummieren wir sie mit $\Phi_{\lambda\mu}$, so folgt $\Phi_{\lambda\mu} F_{\mu\varrho} \Psi_{\varrho\delta} = \Phi_{\lambda\mu} I_{\mu\delta} = \Phi_{\lambda\delta}$; die Multisummation mit der Einheitsmatrikel $I_{\mu\delta}$ läuft nämlich ihrer Definition (1) zufolge immer auf einem blossen Indizesaustausch hinaus, da in der Produktsumme nur jenes Glied nicht verschwindet, wo $\mu = \delta$. Die linke Seite ergibt aber wegen der ersten Gleichung (2) $I_{\lambda\varrho}\Psi_{\varrho\delta} = \Psi_{\lambda\delta}$, sodass tatsächlich $\Psi_{\lambda\delta} = \Phi_{\lambda\delta}$ ist.

3) *Ausgleichung bedingter Beobachtungen.* Es sind die Verbesserungen v_i der n Beobachtungsgrössen l_i so zu bestimmen, dass die $r (< n)$ Bedingungsgleichungen $c_{i\lambda}(l_i + v_i) = 0$, bezw. nach Einführen der Widersprüche $w_\lambda = c_{i\lambda} l_i$ die Fehlerbedinungsgleichungen

$$f_\lambda(v) \equiv c_{i\lambda} v_i + w_\lambda = 0$$

streng erfüllt werden und gleichzeitig die Fehlerquadratsumme $v_i v_i = v_i^2$ am kleinsten wird.

Nach dem Lösungsverfahren von Lagrange bildet man eine neue Funktion $F(v) = v_i^2 + M_\lambda f_\lambda (v)$, worin die zunächst unbestimmten

Multiplikatoren M_λ aus den n Minimumsbedingungen $\frac{\partial F(v)}{\partial v_i} = 0$ ermittelt werden. Wir setzen $M_\lambda = -2k_\lambda$, bilden auf Grund der Ausgangsgleichungen $\frac{\partial F(v)}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i}\left[v^2_i - 2k_\lambda(c_{i\lambda} v_i + w_\lambda)\right] = 2v_i - 2k_\lambda c_{i\lambda}$ und bekommen gemäss der erwähnten Minimumsbedingung $v_i = c_{i\lambda} k_\lambda$. Diesen Wert subtituiert man in die Fehlerbedingungleichungen – da dort λ als charakteristischer Index bereits vorkommt, müssen wir oben den Summationsindex λ umbenennen um Irrtümern aus dem Wege zu gehen: Man substituiert also $v_i = c_{i\mu} k_\mu$, schreibt zur Abkürzung $c_{i\lambda} c_{i\mu} = C_{\lambda\mu}$ (Normalkoeffizienten) und erhält dann sog. Normalgleichungen $C_{\lambda\mu} k_\mu + w_\lambda = 0$ zur Berechnung der Korrelaten k_μ. Löst man sie „unbestimmt" auf; d. h. ermittelt man zu $C_{\lambda\mu}$ die Inverse $\Gamma_{\mu\varrho}$ (Gewichtskoeffizienten) aus den sog. Gewichtsgleichungen $C_{\gamma\mu}\Gamma_{\mu\varrho} = I_{\lambda\varrho}$, so erhält man nach Multisummation der Normalgleichung mit $\Gamma_{\varkappa\lambda}$ die bekannte Entwicklung der Korrelaten nach den Widersprüchen $k_\varkappa = -\Gamma_{\varkappa\lambda} w_\lambda$. Damit folgt für die Verbesserungen $v_i = -c_{i\mu}\Gamma_{\mu\lambda} w_\lambda = -\gamma_{i\lambda} w_\lambda$; welche man statt durch die Widersprüche w_λ auch unmittelbar in den ursprünglichen Beobachtungen l_r ausdrücken kann: $v_i = -\gamma_{i\lambda} c_{r\lambda} l_r = -E_{ir} l_r$; hierin bedeuten $\gamma_{i\lambda} = c_{i\mu}\Gamma_{\mu\lambda}$ und $E_{ir} = \gamma_{i\lambda} c_{r\lambda} = c_{i\mu}\Gamma_{\mu\lambda} c_{r\lambda}$ die Koeffizienten der entsprechenden Entwicklungen. Nach Multisummation von f_λ (v) mit k_λ ergibt sich $k_\lambda c_{i\lambda} v_i + k_\lambda w_\lambda = 0$, also wegen $k_\lambda c_{i\lambda} = v_i$ die bekannte Kontrollformel für die Fehlerquadratsumme $v_i^2 = -k_\lambda w_\lambda$.

4) Die Determinante eines Systems von Normalkoeffizienten (Normdeterminante)

$$D = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{1v} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{v1} & C_{v2} & \dots & C_{vv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{p1}\,c_{p1} & c_{p1}\,c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{p1}\,c_{pv} \\ c_{q2}\,c_{q1} & c_{q2}\,c_{q2} & \dots & c_{q2}\,c_{qv} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{tv}\,c_{t1} & c_{tv}\,c_{t2} & \dots & c_{tv}\,c_{tv} \end{vmatrix}$$

lässt sich bekanntlich als Summe der Quadrate all jener ν-reihigen Determinanten darstellen, welche in der Matrix der zugehörigen Normal-

elemente $c_{r\delta}$ enthalten sind. Zum Beweis setzen wir die allen Gliedern einer Reihe gemeinsamen „Faktoren" vor die Determinante

$$D = c_{p1}\, c_{q2} \ldots c_{tv} \begin{vmatrix} c_{p1} & c_{p2} & \ldots & c_{pv} \\ c_{q1} & c_{q2} & \ldots & c_{qv} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{t1} & c_{t2} & \ldots & c_{tv} \end{vmatrix} = c_{p1}\, c_{q2} \ldots c_{tv}\; D_{pq\ldots t}.$$

Wie ersichtlich, ist $D_{pq\ldots t}$ abkürzend für jene v-reihigie Determinante gebraucht, welche aus der p^{ten}, q^{ten}, $\ldots$ t^{ten} Zeile der Normalelementen-Matrix gebildet wird und gemäss unserer Summationsregel ist über alle möglichen $p, q, \ldots t$ summieren. Eine Vertauschung der einmal herausgegriffenen v Indizes ist wegen ihrer Bedeutung als Summationsindizer für D belanglos, bedeutet aber in $D_{pq\ldots t}$ eine Zeilenvertauschung und daher für jede Transposition zweier Zeilen einen Vorzeichenwechsel dieser Determinante. Da sich v Indizes auf v Arten umstellen lassen, könnte man ebensoviele Darstellungen von D hinschreiben, welche mit $c_{p'1}\, c_{q'2}\, c_{t'1}$ beginnen, wo $p', q', \ldots t'$ irgend eine Permutation der v Indizes $p, q, \ldots t$ bedeutet, und alle den gemeinsamen Faktor $\pm D_{qp\ldots t}$ besitzen. Die Summe aller mit dem zugehörigen Vorzeichen versehenen Produkte $\pm c_{p1}\, c_{q2} \ldots c_{t'v}$ gibt gemäss der Determinantendefinition selbst wieder $D_{pq\ldots t}$ und daher erhält man nach Addition der $v!$ Darstellungen von D

$$v!\; D = D_{pq\ldots t}\; D_{pq\ldots t} = D^2_{pq\ldots t}, \text{ oder auch } D = D^2_{(pq\ldots t)}.$$

Die Einklammerung der Indizes soll hier andeuten dass ihre Permutation ausgeschlossen werde; eine solche ist ja für das Quadrat der Determinante ohne Bedeutung. $D^2_{(pq\ldots t)}$ stellt somit eine Summe von $\binom{n}{v}$ Quadraten vor; den Zeilen $p, q, \ldots t$ lassen sich auf $\binom{n}{v}$ Arten aus den n Zeilen de Normalelementen-Matrix $c_{r\delta}$ herausgreifen. Damit ist gleichzeitig der stets positive Charakter einer Normdeterminante bewiesen.

5) *Reihenentwicklung.* Differentiiert man die grundlegende Gleichung (2) nach den üblichen Regeln: $\Phi_{\lambda\mu}\, dF_{\mu\varrho} + d\Phi_{\lambda\mu}\, F_{\mu\varrho} = 0$ und multisummiert dann mit $\Phi_{\varrho\delta}$, so folgt wegen (2)

$$\Phi_{\lambda\mu}\; dF_{\mu\varrho}\; \Phi_{\varrho\delta} = -\, d\Phi_{\lambda\mu}\; I_{\mu\delta} = -\, d\Phi_{\lambda\delta}$$

als Ausdruck für das Differential der zu $F_{\mu\varrho}$ inversen Matrikel.

Wir fassen nun beliebig grosse Aenderungen $\Delta F_{\mu\varrho}$ ins Auge und

fragen nach den dadurch verursachten Aenderungen $\Delta \Phi_{\lambda\mu}$. Die streng gültige Gleichung

$$(3) \qquad (\Phi_{\lambda\mu} + \Delta \Phi_{\lambda\mu})\,(F_{\mu\varrho} + \Delta F_{\mu\varrho}) = I_{\lambda\varrho}$$

führt mit Berücksichtigung von (2) nach ähnlicher Rechnung zu

$$(3a) \qquad \Delta \Phi_{\lambda\delta} = -\Phi_{\lambda\mu}\,\Delta F_{\mu\varrho}\,\Phi_{\varrho\delta} - \Delta \Phi_{\lambda\mu}\Delta F_{\mu\varrho}\,\Phi_{\varrho\delta} = \\ = -\Phi_{\lambda\eta}\,\Delta K_{\mu\delta} - \Delta \Phi_{\lambda\mu}\Delta K_{\mu\delta},$$

wo abkürzend $\Delta K_{\mu\delta} = \Delta F_{\mu\varrho}\,\Phi_{\varrho\delta}$ eingeführt wurde. Leider kommt in dieser Formel die gesuchte Grösse $\Delta \Phi_{\lambda\mu}$ auch noch auf der rechten Seite vor, wenn auch nur in einem Glied „höherer" Ordnung. Diesen Übelstand versuchen wir durch das Verfahren der sukzessiven Approximation zu beseitigen, welches bei der Lösung von Integralgleichungen 2. Art bekannt ist. Man substituiert nämlich in dem erwähnten Glied den durch dieselbe Gleichung ausgedrückten Näherungswert $\Delta\Phi_{\lambda\mu} = -\Phi_{\lambda\alpha}\,\Delta K_{\alpha\mu} - \Delta\Phi_{\lambda\alpha}\,\Delta K_{\alpha\mu}$ und erhält

$$\Delta\Phi_{\lambda\delta} = -\Phi_{\lambda\mu}\,\Delta K_{\mu\delta} + (\Phi_{\lambda\alpha}\,\Delta K_{\alpha\mu} + \Delta\Phi_{\lambda\alpha}\,\Delta K_{\alpha\mu})\,\Delta K_{\mu\delta} = \\ - \Phi_{\lambda\alpha}\,(\Delta K_{\alpha\delta} - \Delta K_{\alpha\mu}\,\Delta K_{\mu\delta}) + \Delta\Phi_{\lambda\alpha}\,\Delta K_{\alpha\mu}\,\Delta K_{\mu\delta}\,.$$

Das letzte Glied, in welchem wieder die gesuchte Grösse auftritt, erscheint hier von dritter Ordnung klein und man kann daher annehmen, dass die nunmehr erreichte Näherung $\Delta\Phi_{\lambda\delta}$ schon besser ist. Fährt man in gleicher Weise fort, so gelangt man schliesslich zu folgendem Ausdruck

$$(4) \qquad \Delta\Phi_{\lambda\delta} = -\Phi_{\lambda\alpha}\,(\Delta K_{\alpha\delta} - \Delta K_{\alpha\beta}\Delta K_{\beta\delta} + \Delta K_{\alpha\beta}\Delta K_{\beta\lambda}\,\Delta K_{\lambda\delta} - + \ldots) \\ = -\Phi_{\lambda\alpha}\,S_{\alpha\delta};$$

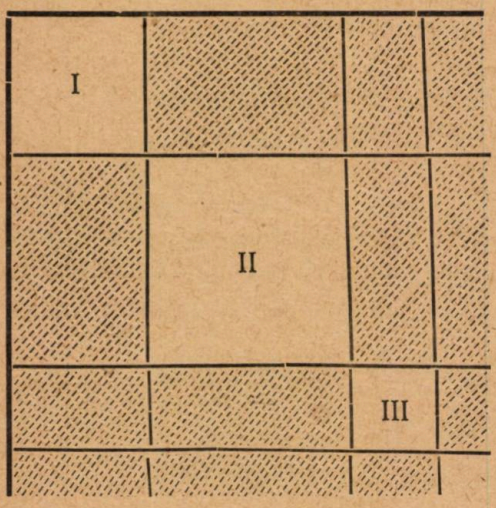
dabei nehmen wir an, dass die in Klammern stehende Reihe $\Delta K_{\alpha\delta} - \Delta K^{(2)}_{\alpha\delta} + \Delta K^{(3)}_{\alpha\delta} - + \ldots$ konvergiert und die Summe $S_{\alpha\delta}$ besitzt. Multisummiert man sie mit $\Delta K_{\delta\tau}$, berücksichtigt, dass bei dieser Schreibweise $\Delta K^{(n)}_{\alpha\delta}\,\Delta K_{\delta\tau} = \Delta K^{(n+1)}_{\alpha\tau}$ ist, so ergibt sich $S_{\alpha\delta}\,\Delta K_{\delta\tau} = \Delta K^{(2)}_{\alpha\tau} - - \Delta K^{(3)}_{\alpha\tau} + \Delta K^{(4)}_{\alpha\tau} - + \ldots$ und man erhält nach Addition der ursprünglichen Reihe $S_{\alpha\tau}$

$$(5) \qquad S_{\alpha\tau} + S_{\alpha\delta}\,\Delta K_{\delta\tau} = S_{\alpha\delta}\,(I_{\delta\tau} + \Delta K_{\delta\tau}) = \Delta K_{\alpha\tau},$$

woraus sich $S_{\alpha\sigma}$ und damit nach (4) auch $\Delta\Phi_{\lambda\delta}$ ermitteln lassen. Man

überzeugt sich leich, dass diese Werte die Ausgangsgleichung (3) befriedigen. Zu diesem Zweck formen wir (3a) um in $\Delta\Phi_{\lambda\mu}\ (I_{\mu\delta} + \Delta K_{\mu\delta}) = -\Phi_{\lambda\mu}\,\Delta K_{\mu\delta}$, setzen $\Delta\Phi_{\lambda\mu}$ aus (4) ein und bekommen wegen (5) die Identität $0 \equiv 0$. Damit enthebt uns die letzte Gleichung (5), welche immer eindeutige und endliche Lösungen besitzt, sobald nur die Determinante $| I_{\delta\tau} + \Delta K_{\delta\tau} |$ nicht verschwindet, aller weiteren Konvergenzbetrachtungen und rechtfertigt nachträglich unsere Reihenentwicklung. Freilich, zur praktischen Bestimmung der geänderten Inversen $\Phi_{\lambda\delta} + \Delta\Phi_{\lambda\delta}$ wird man im allgemeinen einfacher die Gleichungen (3) neu auflösen; es sei denn, die gegebenen Aenderungen $\Delta F_{\mu\varrho}$ sind so gering, dass man mit der eingangs angegebenen Differentialformel auskommt.

6) Ein umfangreiches lineares Gleichungssystem $a_{\mu\lambda}\ x_\lambda = c_\mu$ lässt sich fast immer in geeigneter Weise aufgliedern – s. Abb! Man vernachlässigt zunächst die im schraffierten Teil gelegenen Glieder, löst die Gruppen I, II, III, ... unbestimmt auf ($a_{\mu 1, \lambda 1}\ \bar{\Phi}_{\lambda 1, \varrho 1} = I_{\mu 1, \varrho 1}$; $a_{\mu 2, \lambda 2}\ \bar{\Phi}_{\lambda 2, \varrho 2} = I_{\mu 2, \varrho 2}$; ..) und berechnet mit den gefundenen Inversen $\bar{\Phi}_{\lambda 1, \varrho 1}$; $\bar{\Phi}_{\lambda 2, \varrho 2}$ ... Näherungswerte der in diesen Teilen auftretenden Unbekannten–vgl.3)–



$$\bar{x}_{\varrho 1} = \bar{\Phi}_{\varrho 1, \mu 1}\, c_{\mu 1};$$

$$\bar{x}_{\varrho 2} = \bar{\Phi}_{\varrho 2, \mu 2}\, c_{\mu 2}; \ldots$$

Meistens liegt die umgekehrte Ausgabe vor, z. B. beim Zusammenschluss geodätischer Netze, wo obige Grössen für die Teilsysteme bekannt sind und erst durch den Zusammenschluss die „Zusatzkoeffizienten" im schraffierten Gebiet auftreten.

Schreibt man das gesamte Gleichungssystem entsprechend der Aufteilung auseinandergezogen

$$a_{\lambda_1, \mu_1} x_{\lambda_1} + a_{\lambda_1, \mu_2} x_{\mu_2} + a_{\lambda_1, \mu_3} x_{\mu_3} + \ldots = c_{\lambda_1},$$

$$a_{\lambda_2, \mu_1} x_{\mu_1} + a_{\lambda_2, \mu_2} x_{\mu_2} + a_{\lambda_2, \mu_3} x_{\mu_3} + \ldots = c_{\lambda_2}$$

. . . . . .

multisummiert die erste Zeile mit $\bar{\Phi}_{\varrho_1,\lambda_1}$, die zweite mit $\bar{\Phi}_{\varrho_2,\lambda_2}$, usw., setzt zur Abkürzung $\bar{\Phi}_{\varrho_i,\gamma_i}\, a_{\lambda_i\,\mu_j} = Z_{\varrho_i\,\mu_j}$ und berücksichtigt die vorangegangenen Beziehungen ($Z_{\varrho_i\,\mu_i} = I_{\varrho_i\,\mu_i}$), so erhält man

$$x_{\varrho_1} + Z_{\varrho_1\mu_2}\, x_{\mu_2} + Z_{\varrho_1\mu_3}\, x_{\mu_3} + \ldots = \bar{x}_{\varrho_1},$$
$$Z_{\varrho_2\mu_1}\, x_{\mu_1} + x_{\varrho_2} + Z_{\varrho_2\mu_3}\, x_{\mu_3} + \ldots = \bar{x}_{\varrho_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Da hier die Unbekannten einer Gruppe explizit durch jene der anderen ausgedrückt sind, kann man sie leicht durch Substitution eliminieren. Auf diese Weise gewinnt man ein System, welches eine ganze Gleichungsgruppe weniger enthält.

7) Das eben geschilderte Verfahren ist besonders vorteilhaft, wenn in dem schraffierten Gebiet nur vereinzelt Glieder auftreten. Um das zu zeigen, gehen wir von den letzen Gleichungen $Z_{\varrho_i\mu_j}\, x_{\mu_j} = \bar{x}_{\varrho_i}$ aus und machen folgende neue Einteilung. Gemäss unserer Annahme soll es nämlich Spalten geben – wir charakterisieren sie durch einmal gestrichene Indizes –, in welchen keine Zusatzkoeffizienten $a_{\lambda_i\,\mu_j}$ $(i \neq j)$ vorkommen, also $a_{\lambda_i\,\mu'_j} = 0$ und mithin auch $Z_{\varrho_i\,\mu'_j} = 0$, bzw. mit Einschluss von $i = j$ allgemein $Z_{\varrho_i\,\mu'_j} = I_{\varrho_i\,\mu'_j}$ wird. Alle übrigen Spalten, in denen folglich mindestens ein von Null verschiedener Zusatzkoeffizient auftritt, seien durch doppelt gestrichene Indizes gekennzeichnet, sodass $Z_{\varrho_i\,\mu''_j} \neq 0$ ist, solange $i \neq j$; für $i = j$ aber bleibt $Z_{\varrho_i\,\mu''_i} = I_{\varrho_i\,\mu''_i} = 0$, wenn $\varrho_i \neq \mu''_i$.

Der neuen Einteilung entsprechend ziehen wir das gegebene Gleichungssystem auseinander:

$$Z_{\varrho_i\,\mu'_j}\, x_{\mu'_j} + Z_{\varrho_i\,\mu''_j}\, x_{\mu''_j} = \bar{x}_{\varrho_i};$$

darin reduziert sich das erste Glied auf $x_{\varrho'_i}$, wenn $\varrho_i = \varrho'_i$ zur ersten Gruppe gehört, und es verschwindet überhaupt für $\varrho_i = \varrho''_i$. Im letzten Fall bleibt also nur das Gleichungssystem

(6 a) $$Z_{\varrho''_i\,\mu''_j}\, x_{\mu''_j} = \bar{x}_{\varrho''_i}$$

zu lösen, dessen Umfang durch die Zahl jener Spalten bestimmt ist, in welchen Zusatzkoeffizienten auftreten, während die Unbekannten der anderen Gruppe (erster Fall $\varrho_i = \varrho'_i$) sich dann durch lineare Substitution ergeben:

(6 b) $$x_{\varrho'_i} = \bar{x}_{\varrho'_i} - Z_{\varrho'_i \mu''_i} x_{\mu''_i} .$$

Hierin liegt der tiefere Sinn des Boltz'schen Substitutionsverfahrens [2], welches beim Zusammenschluss ausgeglichener Dreiecksnetze in der Geodäsie eine Rolle spielt.

8) Ein beliebiges trigonometrisches Netz sei mit Berücksichtigung der Dreiecksschlussbedingungen nach Richtungen ausgeglichen und die Koeffizienten $\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}$ der Korrelatenentwicklungen $\bar{k}_\mu = -\bar{\Gamma}_{\mu\lambda} w_\lambda$ seien bekannt - vgl. 3)! Wir legen ein genau gleiches Dreiecksnetz über das erste und heften es damit längs des Randes zusammen, sodass eine geschlossene Fläche entsteht, wenn beide Netze von verschiedenen Seiten betrachtet werden. Nach den vorhergehenden Abschnitt kann man das Normalgleichungssystem des auszugleichenden Gesamtgebildes auf die Lösung eines im allgemeinen viel kleineren Gleichungssystems (6 a) zurückführen $Z_{\mu''\varrho''} k_{\varrho''} = \bar{k}_{\mu''}$, in welchem nur die Korrelaten $k_{\varrho''}$ der Randdreiecke vorkommen; denn nur diese liefern beim Zusammenschluss des oberen (o) und unteren (u) Teilnetzes für jede aneinandergeheftete Randseite einen Beitrag -2 für die Zusatzkoeffizienten $C_{\lambda_0 \mu_u}$ bezw. $C_{\lambda_u \mu_0}$.

Belegt man entsprechende Dreiecke in beiden Netzen mit gleichen Index und bedenkt, dass jedes Randdreieck λ_0'' (λ_u'') nur mit dem darunter (darüber) liegenden eine Verbindung eingeht, so wird $C_{\lambda''_0 \varrho''_u}$ $(C_{\lambda''_u \varrho''_0}) = -cI_{\lambda''\varrho''}$, wo $c = -2$, bzw. $= -4$ ist, je nachdem das Randdreieck Nr. λ'' eine oder zwei freie Randseiten im ursprünglichen Einzelnetz besass. Ausserdem ist nach früherem $Z_{\mu''_0 \varrho''_0} = I_{\mu''_0 \varrho''_0}$, sowie $Z_{\mu''_0 \varrho''_u} = \bar{\Gamma}_{\mu''_0 \lambda_0} C_{\lambda_0 \varrho''_u}$ und daher lässt sich die linke Seite unserer reduzierten Ausgangsgleichung $Z_{\mu''\varrho''_0} k_{\varrho''_0} + Z_{\mu''\varrho''_u} k_{\varrho''_u} = \bar{k}_{\mu''}$ für $\mu'' = \mu''_0$ umformen in $I_{\mu''_0 \varrho''_0} k_{\varrho''_0} - c\bar{\Gamma}_{\mu''_0 \varrho''} k_{\varrho''_u}$. Der analoge Fall für $\mu'' = \mu''_u$ ergibt sich hieraus einfach durch Vertauschung von o und u. Man kann daher auf diese Unterscheidung ganz verzichten und sich mit der einen Gleichung begnügen $(I_{\mu''\varrho''} - c\bar{\Gamma}_{\mu''\varrho''}) k_{\varrho''} = \bar{k}_{\mu''}$.

Jedes Dreieck auf der geschlossenen Fläche grenzt an drei Nachbardreiecke, in jeder Zeile des gesamten Normalgleichungssystems ist daher die Summe der Koeffizienten $(+6, -2, -2, -2)$ bezw. $(+6, -2, -4)$ gleich Null. Seine Determinante muss daher ebenfalls verschwinden und folglich bleiben die Korrelaten k_ϱ unbestimmt. Dasselbe gilt dann auch von jenen $k_{\varrho''}$ der Randdreiecke, sodass auch die Koeffizientendeterminante unserer letzten Gleichung verschwindet. Divi-

dieren wir noch durch c und schreiben r statt $''$, so ergibt sich also der Satz

$$\text{Det.} \left| \Gamma_{\mu_r\, \varrho_r} - \frac{1}{c} I_{\mu_r\, \varrho_r} \right| = 0,$$

worin nur auf die Randdreiecke (r) sich beziehende Indizes auftreten.

Wie mir Herr Friedrich, München, mitteilte, handelt es sich hierbei rein mathematisch gesehen um folgenden bisher nicht bekannten Determinantensatz: Bezeichnen a_{ik} eine quadratische Matrikel, α_{ik} ihre Inverse, ferner $s_{(i,k)}$ und $\sigma_{(i,k)}$ die Summen aller in einer Reihe oder Kolonne stehenden Glieder; d. h. entweder $s_{(i,k)} = \sum_i a_{ik}$, $\sigma_{(i,k)} = \sum_i \alpha_{i,k}$ für alle k oder $s_{(i,k)} = \sum_k a_{ik}$, $\sigma_{(i,k)} = \sum_k \alpha_{ik}$ für alle i, so verschwinden die Determinanten

$$\left| a_{ik} - \frac{I_{ik}}{\sigma_{(i,k)}} \right| \quad \text{und} \quad \left| \alpha_{ik} - \frac{I_{ik}}{s_{(i,k)}} \right|$$

deren Umfang auf jene Indizes beschränkt werden kann, für welche $s_{(i,k)}$ bezw. $\sigma_{(i,k)}$ nicht gleich Null sind.

Beispiel:

$$a_{ik} \equiv \begin{array}{rrr|l} 3 & -1 & -2 & 0 \\ -4 & 7 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 8 \\ \hline 1 & 7 & 6 & s_{(i,k)} \end{array}; \quad |a_{ik}| = 106 = \frac{1}{|\alpha_{ik}|}; \quad \alpha_{ik} \equiv \frac{1}{106} \begin{array}{rrr|l} 32 & 26 & -18 & 40 \\ 3 & 19 & -5 & 17 \\ 11 & -1 & 17 & 27 \\ \hline 46 & 44 & -6 & \sigma_{(i,k)} \end{array};$$

nach obigem Satz verschwinden daher folgende Determinanten

$$\left| \begin{array}{ccc} 3 - \frac{106}{40} & -1 & -2 \\ -4 & 7 - \frac{106}{17} & 3 \\ 2 & 1 & 5 - \frac{106}{27} \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{ccc} 3 - \frac{106}{46} & -1 & -2 \\ -4 & 7 - \frac{106}{44} & 3 \\ 2 & 1 & 5 + \frac{106}{6} \end{array} \right|;$$

$$\left| \begin{array}{cc} \left(\frac{19}{106} - \frac{1}{6}\right) & -\frac{5}{106} \\ -\frac{1}{106} & \left(\frac{17}{106} - \frac{1}{8}\right) \end{array} \right|, \quad \left| \begin{array}{ccc} \left(\frac{32}{106} - 1\right) & \frac{26}{106} & -\frac{18}{106} \\ \frac{3}{106} & \left(\frac{19}{106} - \frac{1}{7}\right) & -\frac{5}{106} \\ \frac{11}{106} & -\frac{1}{106} & \left(\frac{17}{106} - \frac{1}{6}\right) \end{array} \right|.$$

9) Bei der Ausgleichung kettenartiger Gebilde stösst man auf Gleichungen von folgendem Koeffizientenschema:

$$
\begin{array}{l}
P-1 \\
-1\,P-1 \\
\quad -1\,P-1 \\
\quad\quad \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Je nach der Gestalt der Kettenglieder (Dreieck, Raute, Zentralsystem,...) kann darin P die verschiedensten Werte annehmen. Die Berechnung der Inversen $\Gamma_{i,k}$; d. h. die unbestimmte Auflösung der entsprechenden Gleichungen

$$
\begin{array}{rl}
P\Gamma_{1,k} - \Gamma_{2,k} & = I_{1,k} \\
-\Gamma_{1,k} + P\Gamma_{2,k} - \Gamma_{3,k} & = I_{2,k} \\
\quad -\Gamma_{2,k} + P\Gamma_{3,} - \Gamma_{4,k} & = I_{3,k} \\
\quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\text{allgemein} \quad -\Gamma_{i-1,k} + P\Gamma_{i,k} - \Gamma_{i+1,k} & = I_{i,k} \\
\text{für } 1 < i < n &
\end{array}
$$

gestaltet sich einfach, wenn eine der Unbekannten, etwa $\Gamma_{1,k}$ bekannt ist. Man findet nämlich aus der ersten Gleichung $\Gamma_{2,k} = P\Gamma_{1,k} - I_{1,k}$ nach Substitution aus der zweiten dann $\Gamma_{3,k} = (P^2 - 1)\,\Gamma_{1,k} - PI_{1,k} - I_{2,k}$ und falls die gefundenen Werte in die dritte Gleichung eingesetzt werden $\Gamma_{4,k} = (P^3 - 2P)\;\Gamma_{1,k} - (P^2 - 1)\;I_{1,k} - PI_{2,k} - I_{3,k}$, usw. Diesen Gedanken, welcher ja auch zur Anwendung von Kettenbruchmethoden geführt hat, weiterspinnend versuchen wir folgenden Ansatz

$$
(7) \qquad \Gamma_{i,k} = U_i\,\Gamma_{1,k} - \sum_{r=1}^{i} U_{i-r}\,I_{r,k} = U_i\,\Gamma_{1,k} - \begin{cases} U_{i-k} & \text{für } k \leqq i \\ 0 & \text{„ } k \geqq i \end{cases},
$$

worin die Koeffizienten U_i mit Hilfe obiger Gleichungen noch zu ermitteln sind. Zu diesem Zweck bilden wir zunächst gemäss (7) $\Gamma_{1,k} = U_1\,\Gamma_{1,k} - U_0\,I_{1,k}$, woraus unmittelbar $U_1 = 1$, $U_0 = 0$ folgt –, $\Gamma_{2,k} = U_2\,\Gamma_{1,k} - U_1\,I_{1,k} - U_0\,I_{2,k}$, ferner $\Gamma_{i-1,k} = U_{i-1}\,\Gamma_{1,k} -$ $- \sum_{r=1}^{i-1} U_{i-1-r} I_{r,k} = U_{i-1}\,U_{1,k} - \sum_{r=1}^{i} U_{i-1\;r}\,I_{r,k}$ und $\Gamma_{i+1,k} = U_{i+1}\,\Gamma_{1,k} -$ $- \sum_{r\;1}^{i} U_{i+1-r}\,I_{r,k} - U_0\,I_{i+1,k}$. Setzen wir die letzten drei Werte in die erste, sowie in die allgemeine Ausgangsgleichung so ergibt sich nach Ordnen der Glieder

$$
(P - U_2)\,\Gamma_{1,k} + (U_1 - 1)\,I_{1,k} + U_0\,I_{2,k} = 0
$$

$$
(-U_{i-1} + PU_i - U_{i+1})\,\Gamma_{1,k} - \sum_{r=1}^{i} (-U_{i-1-r} + PU_{i-r} - U_{i+1-r})\,I_{r,k} -
$$

$$
-(U_{-1} + 1)\,I_{i,k} + U_0\,I_{i+1,k} = 0
$$

und da diese Bedingungen für alle k erfüllt sein müssen, erhält man die Formeln

$$(8) \qquad U_{-1} = -1;\ U_0 = 0;\ U_1 = 1;\ U_2 = P;\ -U_{i-1} + PU_i - U_{i+1} = 0 \quad \text{für } 0 \leqq i \leqq n-1,$$

welche zur Berechnung aller Zahlen U_i genügen. Es ist somit nur noch $\Gamma_{1,k}$ in (7) unbekannt. Mit $k = 1$ folgt daraus $\Gamma_{i,1} = U_i \Gamma_{1,1} - U_{i-1}$ und da wegen der Symmetrie des gegebenen Koeffizientenschemas auch $\Gamma_{i,k} = \Gamma_{k,i}$ sein muss, ergibt sich $\Gamma_{1,k} = \Gamma_{k,1} = U_k \Gamma_{1,1} - U_{k-1}$. Bei einer endlichen aus n Gliedern bestehenden Kette sind Anfang und Ende vertauschbar; d. h. $\Gamma_{1,1} = \Gamma_{n,n}$. Nun erhält man aus (7) $\Gamma_{n,n} = U_n \Gamma_{1,n} = U_n (U_n \Gamma_{1,1} - U_{n-1}) = U_n^2 \Gamma_{1,1} - U_n U_{n-1}$ und daraus mit Hilfe der vorangegangenen Bedingung $\Gamma_{1,1} = \Gamma_{n,n} = \dfrac{U_n U_{n-1}}{U_n^2 - 1}$. Somit lässt sich das inverse Matrikel $\Gamma_{i,k}$ (7) vollständig in den Zahlen U_i ausdrücken. Es würde zu weit führen, hier alle Eigenschaften dieser Grössen abzuleiten, auf Grund deren der erhaltene Ausdruck umgeformt werden kann, -s [5]- und ich begnüge mich hier als Ergebnis mitzuteilen

$$\Gamma_{i,k} = \frac{1}{U_{n+1}} \begin{cases} U_i\, U_{n+1-k} & \text{für } i \leqq k \\ U_k\, U_{n+1-i} & \text{„ } i \geqq k. \end{cases}$$

Die hier eingeführte Zahlenreihe U_i ist der Mathematik nicht fremd. Um den Zusammenhang mit den von Lucas [3] untersuchten algebraischen Funktionen $U_m = \dfrac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}$ herzustellen, bilden wir die Funktion $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} U_i\, x^i$ und setzen darin nach (8) $U_i = PU_{i-1} - U_{i-2}$. Man erhält

$$S_n = P \sum_{i=1}^{n} U_{i-1} x^{i-1} - x^2 \sum_{i=1}^{n} U_{i-2} x^{i-2} = Px \sum_{r=0}^{n-1} U_r\, x^r - x^2 \sum_{s=-1}^{n-2} U_s\, x^s =$$

$$= Px(S_n - U_n x^n) - x^2 (U_{-1} x^{-1} + U_0 x^0 + S_n - U_{n-1} x^{n-1} - U_n x^n).$$

Nun fassen wir alle Glieder mit S_n zusammen und berücksichtigen die Formeln (8):

$$(x^2 - Px + 1)\, S_n = U_n x^{n+2} - U_{n+1} x^{n+1} - x.$$

Bezeichnet man mit α, β die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 - Px + 1 = 0$, so muss oben auch die rechte Seite für $x = \alpha$ und $x = \beta$ verschwinden. Aus

$$U_n \alpha^{n+1} - U_{n+1} \alpha^n - 1 = 0 \quad \text{und} \quad U_n \beta^{n+1} - U_{n+1} \beta^n - 1 = 0$$

ergibt sich aber wegen $\alpha\beta = 1$ unmittelbar $U_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$.

Auf den Zusammenhang mit den Hyperbel- bezw. Kreisfunktionen geht besonders Günther [4] ein; hier sei nur die Identität erwähnt $U_m = \frac{2i}{\sqrt{P^2-4}} \sin\left[\frac{mi}{2} \ln \frac{\alpha}{\beta}\right]$ mit $i = \sqrt{-1}$. Eine ausführliche Behandlung der Funktionen U_m und der damit verwandten Funktionen V_m findet man in [5].

Geodätisches Institut
Potsdam

(Reçu le 30 Septembre 1947)

Schrifttum

1) K. Reicheneder – *Algebraische Darstellung der Geodätischen Ausgleichsrechnung, insbesondere beim Aufbau grosser Dreiecksnetze.* Verhandlungen der Balt. Geod. Kommission. Helsinki 1944, S. 58–147.

2) H. Boltz – *Substitutionsverfahren zum Ausgleichen grosser Dreiecksnetze in einem Gussnach der Methode der kleinsten Quadrate.* Veröff. d. Geod. Inst. N. F. Nr. 108. Potsdam 1938.

3) E. Lucas – *Theorie des fonctions numériques simplement périodiques.* Bruxelles 1878.

4) S. Günther – *Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen.* Halle 1881.

5) K. Reicheneder – *Fehlertheorie und Ausgleichung von Rautenketten in der Nadirtriangulation.* Veröff. des Geod. Inst. Potsdam.

SUR UNE FAMILLE DE SURFACES EN RELATION AVEC LES DÉVELOPPABLES D'UNE CONGRUENCE DE DROITES ET SUR LES SURFACES À RÉSEAU ORTHOGONAL DE COURBES PLANES [1])

par

ADOLF HAIMOVICI

On a étudié diverses surfaces ayant un réseau particulier de courbes planes. Parmi les plus importantes, citons les surfaces ayant le réseau de lignes de courbure formé de courbes planes [2]) et celles ayant un réseau de lignes conjuguées planes [3]). Nous nous proposons d'étudier dans cette Note une catégorie de surfaces généralisant celles à lignes de courbure planes : ce seront les surfaces ayant un réseau orthogonal de courbes planes. Les plans de ces courbes engendreront deux surfaces développables et les droites d'intersection des deux plans passant par un point de la surface engendreront une congruence de droites dont les développables seront précisément les plans des courbes du réseau en question ; dès lors, le problème peut être généralisé de la manière suivante : trouver les surfaces coupées par les développables d'une congruence quelconque d'après un réseau orthogonal. D'ailleurs ce dernier problème généralise un autre problème posé récemment par M. C. E. Springer [4]), qui consiste à trouver les surfaces coupées par les développables d'une congruence, d'après le réseau des lignes de courbure. Nous trouverons le théorème suivant : *Si l'on se donne arbitrairement une congruence de droites, par chaque courbe de l'espace il passe une surface sur laquelle les développables de la congruence déterminent un réseau orthogonal.* Le cas des surfaces à lignes planes orthogonales entre elles, est un cas particulier de celui-ci. On remarquera que les génératrices de la congruence en question sont situées dans les plans des courbes du réseau. Or, ces plans enveloppent des surfaces développables, qui sont les focales de la congruence ; notre théorème devient alors : *Si l'on se donne arbitrairement une congruence de droites à focales développables et une courbe de*

l'espace, il existe une surface et une seule passant par la courbe donnée et sur laquelle les plans tangents aux focales déterminent un réseau orthogonal de courbes planes. On peut encore énoncer ce théorème de la manière suivante : *Si l'on se donne arbitrairement deux surfaces développables, il existe une surface et une seule passant par une courbe quelconque de l'espace et sur laquelle les plans générateurs des développables déterminent un réseau orthogonal de courbes planes.*

Dans le cas général, l'équation aux dérivées partielles qui détermine les surfaces cherchées ne donne pas comme intégrale des fonctions élémentaires ; c'est pourquoi, nous l'intégrerons seulement dans quelques cas particuliers.

§ 1. – *Rappel de quelques notions concernant les congruences de droites* [5]). Soient :

$$\xi_i = x_i + \lambda X_i, \qquad (i = 1, 2, 3,) \tag{1}$$

les équations d'une droite quelconque. Si x_i et X_i sont des fonctions de deux paramètres u et v, alors cette droite engendre une congruence de droites. Supposons :

$$\sum_{i=1}^{3} X_i^2 = 1 .$$

Il suit alors que les X_i sont les cosinus directeurs de la droite génératrice et que λ est l'abscisse sur cette génératrice à partir du point x_i. Par chaque rayon de la congruence il passe, en général, deux développables ; les points d'intersection de la génératrice avec les deux arêtes de rebroussement de ces développables sont les deux *foyers* de la génératrice ; le milieu du segment compris entre ces deux points est *le point moyen* de la génératrice ; les points moyens des génératrices de la congruence engendrent *la surface moyenne* ; les foyers engendrent *les deux surfaces focales*. Désignons par 2ϱ la distance entre les deux foyers, par u et v les paramètres des deux surfaces développables et prenons la surface moyenne comme surface de départ. Dans ce cas, entre les coordonnées x_i, la distance 2ϱ et les cosinus directeurs de la droite génératrice, il y a les relations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} + 2b\varrho \right) X_i - \varrho \dfrac{\partial X_i}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial v} = -\left(\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + 2a\varrho \right) X_i + \varrho \dfrac{\partial X_i}{\partial v}, \end{cases} \tag{2}$$

où nous avons désigné par a et b les symboles de Christoffel :

(3) $$a=\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} \qquad b=\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\},$$

respectivement ; ces symboles sont pris par rapport à la forme fondamentale :

(4) $$E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2\ ,$$

qui représente l'élément d'angle $d\varphi$ compris entre deux droites u, v, et $u+du$, $v+dv$ infiniment voisines, de la congruence. Enfin ϱ doit encore satisfaire à la relation :

(5) $$\frac{\partial^2\varrho}{\partial u\,\partial v}+a\frac{\partial\varrho}{\partial u}+b\frac{\partial\varrho}{\partial v}+\varrho\left(\frac{\partial a}{\partial u}+\frac{\partial b}{\partial v}+F\right)=0\,.$$

§ 2. – Soient maintenant :

(6) $$\xi_i=x_i+\lambda X_i\,,$$

les équations d'une congruence de droites ; soient 2ϱ la distance entre les deux foyers, x_i les coordonnées du point moyen de la droite courante de la congruence, u et v les paramètres des surfaces développables et E, F, G les coefficients de la seconde forme fondamentale

$$d\varphi^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

de la congruence. Si nous posons maintenant :

$$\lambda=\lambda(u,v).$$

nous obtenons, évidemment, les coordonnées d'un point d'une surface, rapportée aux lignes d'intersection avec les développables de la congruence. La condition d'orthogonalité de ces lignes s'écrit :

(7) $$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{\partial\varrho}{\partial u}+2b\varrho\right)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}-\frac{\partial\varrho}{\partial v}-2a\varrho\right)+(\lambda^2-\varrho^2)\,F=0\,,$$

où nous avons tenu compte de (2). Le théorème d'existence et la généralité de la solution de notre problème énoncé dans l'introduction, ressort de l'existence et de la généralité de la solution de cette équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Dans les paragraphes suivants, nous allons étudier quelques cas particuliers, dont l'intégration se fait par des fonctions élémentaires.

§ 3.–*Notre réseau est celui des lignes de courbure.* Posons alors :

(8) $$\begin{cases}\dfrac{\partial\lambda}{\partial u}+\dfrac{\partial\varrho}{\partial u}+2b\varrho=(\lambda-\varrho)\,P,\\[2ex] \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}-\dfrac{\partial\varrho}{\partial v}-2a\varrho=(\lambda+\varrho)\,Q,\end{cases}$$

P et Q étant deux fonctions qui satisfont à la relation:

$$PQ+F=0. \tag{9}$$

Pour que les lignes u et v soient des lignes de courbure, il faut avoir $D'=0$, c'est-à-dire:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial u} & \frac{\partial \xi_1}{\partial v} & \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial u} & \frac{\partial \xi_2}{\partial v} & \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial u} & \frac{\partial \xi_3}{\partial v} & \frac{\partial^2 \xi_3}{\partial u \partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

qui, après avoir effectué tous les calculs, en tenant compte de (2), s'écrit:

$$\frac{\partial Q}{\partial u}=\frac{\partial P}{\partial v}=aP+bQ. \tag{10}$$

Avec ces relations on satisfait aussi les conditions d'intégrabilité des relations (8). Posons maintenant:

$$Q=\frac{\partial \phi}{\partial u} \quad , \quad P=\frac{\partial \phi}{\partial v}$$

ϕ étant une fonction quelconque qui doit encore satisfaire aux relations

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial u}\frac{\partial \phi}{\partial v}+F=0, \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}=a\frac{\partial \phi}{\partial u}+b\frac{\partial \phi}{\partial u}, \end{cases} \tag{11}$$

déduites de (4). La deuxième s'écrit:

$$\left(G\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial G}{\partial u}\right)\frac{\partial \phi}{\partial u}+\left(E\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial E}{\partial v}\right)\frac{\partial \phi}{\partial v}=2(EG-F^2)\frac{\partial^2 \phi}{\partial u \partial v}=0.$$

En posant:

$$M=\frac{E+\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)^2}{\frac{\partial \phi}{\partial u}} \; ; \; N=\frac{G+\left(\frac{\partial \phi}{\partial v}\right)^2}{\frac{\partial \phi}{\partial v}} ;$$

cette dernière s'écrit:

$$\frac{\partial \phi}{\partial u}\frac{\partial \log M}{\partial v}+\frac{\partial \phi}{\partial v}\frac{\partial \log N}{\partial u}=0.$$

On déduit alors :

$$\frac{\partial \log M}{\partial v} = \psi(u, v)\frac{\partial \phi}{\partial v} \quad , \quad \frac{\partial \log N}{\partial u} = -\psi(u,v)\frac{\partial \phi}{\partial v},$$

ψ étant une nouvelle fonction arbitraire. En intégrant ce système, en tenant compte de la première équation (11), on obtient :

$$E = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial v}\right)^2 + C_1(u)\frac{\partial \phi}{\partial v}\, e^{\int \psi(u,v)\frac{\partial \phi}{\partial v}\, dv},$$

$$F = -\frac{\partial \phi}{\partial u}\frac{\partial \phi}{\partial v},$$

$$G = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)^2 + C_2(u)\frac{\partial \phi}{\partial u}\, e^{\int \psi(u,v)\frac{\partial \phi}{\partial u}\, du}.$$

Il est bien entendu que ces fonctions doivent encore satisfaire à la condition que la courbure de la forme (4) soit égale à l'unité. L'abscisse λ sera donnée par :

$$\lambda = e^{\phi}\left[C - \int\left(\frac{\partial \varrho}{\partial u} + 2b\varrho + \varrho\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)e^{-\phi}\, du\right], \quad C = \text{const.}$$

ϱ étant donné par (5).

§ 4. – *Le cas des lignes de courbure planes.* Trouvons dans ce cas l'élément d'arc de la représentation sphérique de la congruence des droites d'intersection des plans des courbes planes. Soient :

$$\sum_{i=1}^{3} A_i x_i = D \qquad A_i = A_i(u)$$

$$\sum_{i=1}^{3} B_i x_i = E \qquad B_i = B_i(v)$$

les équations des plans des deux familles de courbes planes qui, dans notre cas particulier, sont des lignes de courbure. Supposons encore :

$$\sum_{i=1}^{3} A_i^2 = 1 \quad , \quad \sum_{i=1}^{3} B_i^2 = 1,$$

c'est-à-dire, supposons que les vecteurs A_i, B_i sont des vecteurs unitaires ; supposons encore :

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dA_i}{du}\right)^2 = 1 \quad \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dB_i}{dv}\right)^2 = 1,$$

ce que veut dire que les paramètres u et v sont les arcs des représentations sphériques des vecteurs unitaires A_i, B_i. Posons maintenant

(12) $$\sum_{i=1}^{3} A_i B_i = \cos\varphi ;$$

la sphère sera décrite par le vecteur :

$$v = \frac{A \times B^{6)}}{\sin\varphi}$$

et l'élément d'arc de la représentation sphérique sera alors :

$$d\varphi^2 = \frac{1-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{\sin^2\varphi} du^2 + 2\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} du\,dv + \frac{1-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}{\sin^2\varphi} dv^2.$$

D'autre part, de l'égalité ;

$$\left(AB\frac{dA}{du}\right)^2\left(AB\frac{dB}{dv}\right)^2 = \left[\left(AB\frac{dA}{du}\right)\left(AB\frac{dB}{dv}\right)\right]^2,$$

on tire :

$$\sin\varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = \sqrt{1-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}.$$

Posons encore :

$$P = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}}{\sin\varphi}\operatorname{tang} z, \qquad Q = \sqrt{1-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}\cot\varphi\cot z$$

z étant une nouvelle fonction arbitraire de u et de v, et remplaçons ces valeurs dans (10). Nous obtenons alors:

$$\frac{\sin z\frac{\partial z}{\partial u}}{\cos z} = \cot\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}; \qquad \frac{\cos z\frac{\partial z}{\partial u}}{\sin z} = -\frac{1}{\sin\varphi\cos\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

c'est-à-dire :

$$\cos z = \frac{C_1(u)}{\sin\varphi} = \frac{\sin\lambda}{\sin\varphi}; \qquad \sin z = C_2(v)\cot\varphi = \frac{\operatorname{tang} u}{\cos\varphi},$$

C_1 et λ étant des fonctions de u et C_2 et φ des fonctions de v. Des relations de plus haut on tire :

(13) $$\cos\varphi = \cos\lambda\cos\mu.$$

De l'égalité (12) et (13), nous allons trouver les vecteurs A_i et B_i. Posons :

$$b_i = \frac{B_i}{\cos\mu}.$$

La relation (12) devient alors :

(14) $$\sum_{i=1}^{3} A_i b_i = \cos\lambda$$

et, par dérivation :

$$\sum_{i=1}^{3} A_i \frac{\partial b_i}{\partial v} = 0. \tag{15}$$

En posant :

$$\beta_i = \frac{\dfrac{\partial b_i}{\partial u}}{\dfrac{\partial b_3}{\partial v}}, \tag{16}$$

cette dernière équation devient :

$$\sum_{i=1}^{3} A_i \beta_i = 0 \quad , \quad \beta_3 = 1, \tag{17}$$

qui, par une nouvelle dérivation, devient :

$$A_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial v} + A_2 \frac{\partial \beta_2}{\partial v} = 0. \tag{18}$$

Cette dernière équation est satisfaite dans l'une des hypothèses suivantes :

a. $A_1 = A_2 = 0$

cette hypothèse ne satisfait pas (17).

b. $\beta_1 = h = \text{const.}, \qquad \beta_2 = k = \text{const.}$

(17) nous donne :

$$A_2 = -\frac{A_3 + A_1 h}{k}$$

et puis :

$$\begin{aligned} b_1 &= h b_3 + h_1 \\ b_2 &= k b_3 + k_1 \\ b_3 &= b_3 . \end{aligned}$$

De (14) nous tirons :

$$A_3 = \frac{(k h_1 - h k_1) A_1 - k \cos\lambda}{k_1}$$

et puis

$$A_2 = \frac{h_1 A_1 - \cos\lambda}{k_1}.$$

On voit aisément qu'on peut déterminer des constantes m, n, p de manière que : $m b_1 + n b_2 + p b_3 = 0$, ce que signifie que le vecteur b_1, b_2, b_3 est orthogonal à une droite fixe que nous pouvons prendre comme Ox.

Il restera alors :

$$\begin{aligned} k &= h_1 = 0 \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= k b_3 + k_1 \\ b_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} A_1 &= A_1 \\ A_2 &= \frac{1}{k}\cos\lambda \\ A_3 &= -\frac{k}{k_1}\cos\lambda. \end{aligned}$$

Comme le vecteur A_1, A_2, A_3 est orthogonal au vecteur $\left(0, k_1, \frac{k_1}{k}\right)$ du plan $y\,O\,z$, nous pourrons choisir ce vecteur de manière qu'il soit l'axe des z. Il résultera alors $k = 0$, et les deux vecteurs

$$A_1, A_2, A_3 ; \qquad b_1, b_2, b_3$$

seront respectivement ;

$$(0, k_1, b_3), \qquad \left(A_1, \frac{\cos\lambda}{k_1}, 0\right)$$

et parsuite :

$$\cos\mu = \sqrt{k_1^2 + b_3^2}.$$

Enfin, on a comme conséquence :

$$B_1 = 0, \qquad B_2 = \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + b_3^2}}, \qquad B_3 = \frac{b_3}{\sqrt{k_1^2 + b_3^2}}$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{k_1^2 - \cos^2\lambda}}{k_1}, \qquad A_2 = \frac{\cos\lambda}{k_1}, \qquad A_3 = 0.$$

Il suit que les plans de nos lignes de courbure enveloppent deux cylindres d'axes Ox et Oy, c'est-à-dire d'axes orthogonales ; d'après la manière dont nous avons choisi les paramètres u, v, il suit que nous avons encore :

$$\frac{\cos\lambda}{k_1} = \cos u, \qquad \frac{k}{\sqrt{k^2 + b_3^3}} = \cos v .$$

c. $\qquad A_1 = 0 \quad , \quad \dfrac{\partial \beta_2}{\partial v} = 0 .$

Nous aurons successivement :

$$A_1 = 0, \quad \beta_2 = h, \quad A_3 = -hA_2 ; \quad b_2 = h b_3 + k, \quad A_2 = \frac{\cos\lambda}{k}.$$

Les vecteurs A_1, A_2, A_3, et b_1, b_2, b_3 s'écriront :

$$(0, A_2, -hA_2) \quad , \quad (b_1, hb_3 + k, b_3).$$

Le premier est orthogonal à $(0, h, 1)$. Prenons ce dernier vecteur

comme Oz. Il suit alors $h = 0$ et on voit que le vecteur A_1, A_2, A_3 est un vecteur constant.

$$d. \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial v} = k \frac{\partial \beta_1}{\partial v} \qquad A_1 = k A_2 .$$

Le vecteur A_1, A_2, A_3 est alors orthogonal à $(l, k, 0)$, que nous allons prendre comme Ox. Il suivra $k = 0$ et nous nous trouverons dans le cas précédent.

e. Dans le cas *c*, on peut avoir aussi $\cos \mu = \text{const.}$; le vecteur B_1, B_2, B_3 sera aussi constant.

On peut alors énoncer le résultat général suivant :

Si A_i est un vecteur unitaire normal á un plan qui dépend seulement de u et B_i un vecteur unitaire normal à un plan qui dépend du paramètre v, u et v étant les arcs des représentations sphériques de ces vecteurs, si A_i, B_i satisfont à la condition :

$$\sum_{i=1}^{3} A_i B_i = \cos \lambda \cos \mu , \qquad \lambda = \lambda (u), \ \mu = \mu (v),$$

alors les plans $\sum_{i=1}^{3} A_i X_i = D$ *et* $\sum_{i\ 1}^{3} B_i X_i = E$ *enveloppent deux cylindres avec les axes orthogonales* ; les vecteurs A_i, B_i peuvent être choisis de manière à avoir :

$$A_i : \quad o, \ \sin u, \ \cos u$$
$$B_i : \quad \sin v, \quad o, \quad \cos v$$

et parsuite :

$$\cos \varphi = \cos u \cos v .$$

Dans ce cas général, on peut considérer aussi le cas particulier où l'une des familles de plans est formée par les plans parallèles à une direction fixe.

Pour trouver nos surfaces il faut trouver λ, des équations (8) ; Or, en tenant compte des valeurs des coefficients E, F, G de la première forme fondamentale, il suivra :

$$a = \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2} \qquad b = \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2} .$$

Choisissons encore les lignes de coordonnées de manière à avoir :

$$\lambda = u, \qquad \mu = v.$$

Notons encore que le cas où les plans de l'une, ou des deux familles de lignes de courbure sont parallèles à une direction fixe est exclu de notre étude faite par cette méthode, parce que la représentation

sphérique des reglées correspondantes n'est pas formée de deux familles de courbes. Les équations :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}+2b\varrho=(\lambda-\varrho)\frac{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda\varphi}{\partial u}\right)^2}}{\sin\varphi}\operatorname{tang} z$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v}-\frac{\partial\varrho}{\partial v}-2a\varrho=(\lambda+\varrho)\frac{\sqrt{1-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}}{\sin\varphi}\cot\varphi\cot z$$

s'écrivent dans ce cas :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}+\frac{\partial\varrho}{\partial u}+3\varrho\frac{\cos u\sin^2 v}{\sin u\sin^2\varphi}=\lambda\frac{\sin^2 v\cos u}{\sin u\sin^2\varphi}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v}-\frac{\partial\varrho}{\partial v}-3\varrho\frac{\cos v\sin^2 u}{\sin v\sin^2\varphi}=\lambda\frac{\sin^2 u\cos v}{\sin v\sin^2\varphi}$$

et la valeur de λ sera :

$$\lambda=\left[k-\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\varrho\frac{\partial\phi}{\partial u}+2b\varrho\right)e^{-\Phi}\,du\right]e^{-\Phi}$$

ϕ étant la fonction :

$$\phi=\log\frac{\sin u\sin v}{\sin\varphi}$$

et ϱ une intégrale de l'équation (5).

§ 5. – *La congruence de droites est une congruence de normales.*

Comme la condition nécessaire et suffisante pour que la congruence soit de normales s'écrit :

$$f=f'\ ^{7})$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial X_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}=\frac{\partial X_i}{\partial v}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial u},$$

il suit :

$$F=0.$$

L'équation (5) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}+2b\varrho\right)=-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\varrho}{\partial v}+2a\varrho\right)=\frac{\partial^2\phi}{\partial u\,\partial v}$$

et parsuite, ϕ étant une nouvelle fonction arbitraire :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial u} + 2b\varrho = -\frac{\partial \phi}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial \varrho}{\partial v} + 2a\varrho = \frac{\partial \phi}{\partial v}.$$

L'équation (7) peut alors s'écrire sous l'une des formes:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = 2\frac{\partial \phi}{\partial u} \quad ; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 2\frac{\partial \phi}{\partial v}.$$

Etudions par exemple la première: il suit:

$$\lambda = 2\phi + \alpha(v)$$

α étant une fonction arbitraire de v.

Il est assez facile d'obtenir une telle surface en partant d'une congruence de normales. Soit (Σ) une surface normale à la congruence, (T) la famille de lignes de courbure $v = \text{const.}$, et (C) une ligne de cette famille. Nous obtenons une surface de la catégorie cherchée en prenant sur chaque génératrice de la congruence un point situé à la distance λ à partir du point moyen de la génératrice ou à la distance α, à partir du point d'une surface normale. En effet:

$$\xi_i = x_i + 2\phi X_i$$

est une surface normale à notre congruence: on vérifie aisément cette affirmation par les égalités:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial u} = (\varrho + 2\phi)\frac{\partial X_i}{\partial u} \quad , \quad \frac{\partial \xi_i}{\partial v} = (\varrho + 2\phi)\frac{\partial X_i}{\partial v},$$

qu'on obtient de (6) en tenant compte de (2). La surface:

$$\xi_i = x_i + (2\phi + \alpha) X_i$$

est alors évidemment celle qu'on obtient de la manière décrite plus haut. Il est évident que la nouvelle surface n'a plus les lignes d'intersection avec les développables de la congruence comme lignes de courbure, mais seulement orthogonales entre elles. Ces nouvelles lignes seront aussi des lignes de courbure seulement dans le cas $\alpha = \text{const.}$, c'est-à-dire dans le cas où la nouvelle surface sera aussi une surface normale à la congruence.

§ 6. — *Le cas où les surfaces focales se réduisent à des courbes.* On aura alors:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial u} + b\varrho = \frac{\partial \varrho}{\partial v} - a\varrho = 0\ ^{8});$$

l'équation (5) se réduit alors à:

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} - \varrho F = 0 \tag{19}$$

et l'équation (7) devient :

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial u}-\frac{\partial\varrho}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial v}+\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right)+(\lambda^2-\varrho^2)\,F=0. \tag{20}$$

Etudions le cas particulier où la surface moyenne fait partie de la catégorie de surfaces cherchée. Il faudra avoir alors.

$$\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{\partial\varrho}{\partial v}+\varrho^2 F=0 \tag{21}$$

qui, comparée à (19), donne :

$$\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{\partial\varrho}{\partial v}+\varrho\,\frac{\partial^2\varrho}{\partial u\partial v}=0$$

ou :

$$\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial v}=\frac{1}{2}\frac{dV}{dv}\qquad V=V(v),$$

c'est-à-dire :

$$\varrho^2=U(u)+V(v),$$

U et V étant des fonctions de u et de v respectivement, et :

$$a=-\frac{1}{2}\frac{1}{(U+V)}\frac{dV}{dv},\qquad b=-\frac{1}{2(U+V)}\frac{dU}{du}.$$

Il suit alors :

$$F=-\frac{1}{2(U+V)^2}\frac{dU}{du}\frac{dV}{dv}.$$

Des valeurs de a et b on peut tirer les valeurs des coefficients de la seconde forme fondamentale E, F, G qui doivent encore satisfaire à la condition que la courbure de la forme (4) soit égale à l'unité.

Etudions enfin le cas plus particulier où les deux courbes focales se réduisent aux deux droites :

$$x=0\ ,\quad z=h$$
$$y=0\qquad z=-h.$$

Comme dans le cas des lignes de courbure planes, nous aurons :

$$E=\frac{\sin^2 v}{\sin^4\varphi}\ ,\quad F=-\frac{\sin u\sin v\cos u\cos v}{\sin^4\varphi}\ ,\quad G=\frac{\sin^2 u}{\sin^4\varphi},$$
$$\cos\varphi=\cos u\cos v.$$

Les développables de la congruence seront :

$$x\sin u+(z-h)\cos u=0$$
$$y\sin v+(z+h)\cos v=0$$

et les foyers d'une droite :

$$x_1 = 2h\cot u\,,\quad y_1 = 0\,,\quad z_1 = h\,;$$
$$x_2 = C\,,\quad y_2 = -2h\cot v\,,\quad z_2 = h\,.$$

On aura encore :

$$\varrho = \frac{h\sin\varphi}{\sin u\sin v}\,.$$

L'équation (20) s'écrit :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{\partial\varrho}{\partial v} + \frac{\partial\varrho}{\partial v}\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \lambda^2 F = 0.$$

Cette équation donnera la surface cherchée. Une solution de la forme :

$$\lambda = f(\varrho)$$

sera :

$$\lambda = \frac{k^2}{\varrho} \quad \text{ou} \quad \lambda = k^2\varrho.$$

La deuxième solution conduit à des surfaces à lignes de courbure planes. Etudions de plus près la première : la surface moynne sera :

$$x = h\cot u\,,$$
$$y = h\cot v\,,$$
$$z = C\,;$$

les consinus directeurs de la droite génératrice seront :

$$\frac{\sin v\cos u}{\sin\varphi}\,,\quad \frac{\sin u\cos v}{\sin\varphi}\,,\quad \frac{\sin u\sin v}{\sin\varphi}$$

et les équations de notre surface seront :

$$x = h\cot u - \frac{k^2}{h}\frac{\sin u\cos u\sin^2 v}{\sin\varphi}$$
$$y = h\cot v - \frac{k^2}{h}\frac{\sin^2 u\sin v\cos v}{\sin^2\varphi}$$
$$z = \frac{k^2}{h}\frac{\sin^2 u\sin^2 v}{\sin^2\varphi}\,.$$

On peut encore arriver à l'équation en coordonnées cartésiennes de ces surfaces de la manière suivante : le point de notre surface divisera le segment compris entre les deux foyers dans le rapport :

$$-\frac{\varrho - \dfrac{k^2}{\varrho}}{\varrho + \dfrac{k^2}{\varrho}} = \frac{k^2-\varrho^2}{k^2+\varrho^2}\,;$$

les coordonnées cartésiennes de ce point seront :

$$x = \frac{(\varrho^2 - k^2)\, x_1}{2\varrho^2}$$

$$y = \frac{(k^2 - \varrho^2)\, y_2}{2\varrho^2}$$

$$z = \frac{k^2 h}{\varrho^2}$$

les courbes $\varrho = \text{const.}$ sont aussi des courbes $z = \text{const.}$ et ont l'équation

$$\frac{4\varrho^4 x^2}{(\varrho^2 - k^2)^2} + \frac{4\varrho^4 y^2}{(\varrho^2 + k^2)^2} = 4(\varrho^2 - h^2);$$

ce sont donc d'élipses ; éliminons encore ϱ à l'aide de

$$z = \frac{k^2 h}{\varrho^2}.$$

On trouve alors :

$$\frac{x^2}{(z-h)^2} = \frac{y^2}{(z+h)^2} = \frac{k^2 h - h^2 z}{h^2 z}.$$

Le lieu des sommets des ellipses est formé par les cubiques:

$$x = (z-h)\sqrt{\frac{m}{z} - 1} \qquad m = \frac{k^2}{h} > 0$$

$$y = (z+h)\sqrt{\frac{m}{z} - 1}.$$

§7. - *Les deux surfaces focales se confondent en un point :* Prenons ce point comme origine. On aura alors $\varrho = 0$. L'équation (7) devient :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda^2 F = 0,$$

ou :

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}\frac{\partial \sigma}{\partial v} + F = 0 \qquad \text{où} \qquad \sigma = \log \lambda. \tag{21}$$

Considérons le cas particulier où les plans des courbes du réseau passent par l'origine et sont orthogonales entre eux. L'élément d'arc de la sphère unité (4) sera celui d'une sphère rapportée à deux familles de géodésiques situées dans des plans qui passent par l'origine. On trouve sans peine que l'on doit avoir :

$$F = -\frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial \Phi}{\partial v}, \tag{22}$$

étant une fonction arbitraire de u et de v. L'équation (21) devient alors :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{\partial\sigma}{\partial v}=\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial\phi}{\partial v}.$$

Pour intégrer cette équation posons :

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}=\frac{\partial\phi}{\partial u}\operatorname{tang} z,$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v}=\frac{\partial\phi}{\partial v}\cot z.$$

Les conditions d'intégrabilité tirées de ces équations s'écrivent

$$(\operatorname{tang} z-\cot z)\frac{\partial^2\phi}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{\cos^2 z}\frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}+\frac{1}{\sin^2 z}\frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}=0.$$

En excluant le cas $z=\frac{\pi}{4}$, l'équation caractéristique tirée de cette équation est :

$$\frac{\sin^2 z\,du}{\frac{\partial\phi}{\partial u}}=\frac{\cos^2 z\,du}{\frac{\partial\phi}{\partial u}}\qquad\frac{dv}{\frac{\partial^2\phi}{\partial u\,\partial v}(\operatorname{tang} z-\cot z)}$$

et donne :

$$\operatorname{tang} z=F.\mathcal{F}_1\left(\frac{\frac{\partial\phi}{\partial u}}{\sqrt{\operatorname{tang}^2 z-1}}\right),$$

$\mathcal{F}$ étant une fonction arbitraire d'un argument. La connaissance de z conduit à la connaissance de λ et parsuite de notre surface.

Etudions de plus près le cas exclu $z=\frac{\pi}{4}$. Si dans ce cas on impose encore aux deux familles de plans de passer par Ox et Oy respectivement, on obtient :

$$x=-a\frac{\cos u\sin v}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}},\qquad y=a\frac{\sin u\cos v}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}},\qquad z=a\frac{\sin u\cos v}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$

comme équation de la surface cherchée. L'équation de cette surface s'écrit encore :

$$z(x^2+y^2+z^2-a^2)\pm 2axy=0.$$

Les intersections de cette surface avec les plans $z=kx$ sont données par :

$$x^2(1+k)+y^2-a^2\pm 2ay=0$$

comme on s'assure aisément. La même observation pour les courbes d'intersection avec les plans $z = ky$.

§ 8. — Etudions maintenant le cas exclu auparavant, où *l'une des familles de développables se réduit à une famille de plans parallèles.* Soit :

$$z = u$$

cette famille. Soit :

$$Ax + By + Cz - D = 0$$

la seconde famille de plans, A, B, C, D, étant des fonctions d'un paramètre v. Le point de notre surface sera à l'intersection de ces plans avec, pour plus de symétrie, un troisième plan que nous prenons :

$$Ay - Bx = E,$$

E étant une fonction de u et v. Supposons que nous avons :

$$A = \cos v, \qquad B = \sin v.$$

Les coordonnées du point courant de notre surface seront alors :

$$x = (Cu + D)\cos v - E\sin v$$

$$y = E\cos v = (Cu + D)\sin v.$$

La condition d'orthogonalité des lignes u et v s'écrit ;

$$\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial E}{\partial v} + (Cu + D)\frac{\partial E}{\partial u} + (Cu + D) + EC = 0, \tag{23}$$

C'est une équation du même type que l'équation (7). *Quelques cas particuliers de cette équation : a) Les plans de la deuxième famille sont orthogonaux aux plans de la première famille.* On aura alors :

$$C = 0$$

et l'équation (23) se réduit à :

$$\frac{\partial E}{\partial u}\left(\frac{\partial E}{\partial v} + D\right) = 0,$$

qui conduit aux deux cas suivants :

α) $$E = E(v);$$

ce cas donne évidemment des cylindres, comme on s'assure par de considérations géométriques immédiates.

β) $$E = -\int D\,dv + \varphi(u),$$

qui conduit à des surfaces moulures, comme on voit par des calculs qui n'offrent aucune difficulté.

b) Le cas où la seconde famille de plans enveloppe un cône des

révolution d'axe Oz. On aura alors $D=0$ (En supposant le sommet à l'origine et $C=$ const., l'équation (23) se réduit à :

$$\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial E}{\partial v}+Cu\frac{\partial E}{\partial u}+C^2u+EC=0.$$

Une intégrale particulière de cette équation sera :

$$E=\frac{a}{u}-\frac{Cu}{2}=\frac{a}{z}-\frac{Cz}{2},$$

qui conduit à la surface :

$$4z^2(x^2+y^2-C^2x^2)=(2a-Cz^2)^2,$$

dont l'intersection avec les plans $z=$ const. est formée de cercles.

Séminaire Mathématique
de l'Université de Jassy

(Reçu la 26 Octobre 1947)

Travaux cités

1) Une Note comprenant les principaux résultats de cet article a été publiée dans les *C. R.*, *T.* 225 (1947) pp. 275-277.

2) Pour la bibliographie concernant ces surfaces, voir l'article de R. v. Lilienthal dans *Encyklopädie der Math. Wiss.* Tome III_3, pp. 295-305.

3) Voir *p. ex.* G. Darboux, *Théorie des surfaces*, Tome I, IIe éd. Paris 1914, pp. 176-185.

4) *Rectilinear congruences whose developpables intersect a surface in its lines of curvature*, *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, T. 51 (1945) pp. 990-996.

5) Pour tout ce que concerne ce paragraphe, voir L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, *vol. I, parte II, Cap. X*, (IIIe éd. Bologna).

6. Nous avons designé par $A\ B$ le produit vectoriel des deux vecteurs A_i, B

7. Voir L. Bianchi, loc. cit.

8. Voir L. Bianchi, loc. cit.

ISTITUTO NAZIONALE PER LE APPLICAZIONI DEL CALCOLO

Attività svolta dal 1° Marzo 1945 al 30 Settembre 1947

di

MAURO PICONE

Nella precedente relazione sull'attività dell'Istituto ho fatto menzione di alcuni lavori, ai quali l'Istituto si era dedicato, prendendo in considerazione problemi la cui soluzione poteva essere utile alla ricostruzione del Paese.

Fra i detti lavori è stato ultimato, in collaborazione con l'Istituto Nazionale per gli Studi e la Sperimentazione edilizia, quello riguardante la compilazione di un prontuario per il calcolo del cemento armato, che ha fruttato un manuale già pubblicato e posto in vendita.

La pubblicazione delle tabelle per il calcolo delle oscillazioni dell'acqua nei pozzi piezometrici inseriti negli impianti idroelettrici, che erano già state compilate alla data della precedente relazione, è stata sospesa poichè ulteriori perfezionamenti ad esse si sono palesati opportuni. Con questi il lavoro è stato completato e costituisce un manuale da pubblicarsi.

Sono state proseguite le ricerche relative al calcolo degli sforzi nelle piastre con ossature incrociate, addivenendo ad una trattazione dell'importante argomento da ritenersi la più soddisfacente possibile per le effettive necessità del costruttore. Sono in corso i calcoli per la compilazione di un manuale di uso pratico.

Le ricerche relative al calcolo degli sforzi nelle grandi dighe di ritenuta hanno assorbito, in notevole parte, l'attività scientifica, durante quest'ultimo biennio, dei miei collaboratori e mia.

Alla razionale soluzione del difficile problema sono stati premessi molti esperimenti di vari metodi (classici e nuovi) di integrazione numerica dei sistemi di equazioni a derivate parziali, traducenti l'equilibrio dell'arco e della trave incastrata, ponendosi al di fuori della teoria approssimata dei sistemi sottili. Tali esperimenti hanno rivelato che la condizione d'incastro tradotta con l'annullamento degli spostamenti non è compatibile con le qualità infinitesimali di essi, assunte come ipotesi

per stabilire le equazioni dell'elasticità piana. Presumendo che un'analoga circostanza si verifichi nei solidi elastici incastrati, si sta indagando se non si debba sostituire alla consueta condizione d'incastro, che pone nulli gli spostamenti sulle superficie del solido in contatto con l'ostacolo l'uguaglianza su esse degli spostamenti di quello e di questo, con continuità degli sforzi nel passaggio dal solido all'ostacolo, imponendo a quest'ultimo, supposto indefinitamente esteso, di avere spostamenti infinitesimi all'infinito.

Nel frattempo le ricerche dei metodi di integrazione dei sistemi di equazioni a derivate parziali compiute nell'Istituto hanno condotto alla conquista di risultati di notevole importanza, anche teorica, costituenti, a mio avviso, una svolta nella teoria di quelle equazioni. Devo menzionare al riguardo l'opera di Luigi Amerio, Aldo Ghizzetti, Gaetano Fichera, la quale ha validamente contribuito al progresso della sistemazione teorica dei detti metodi.

Per quanto riguarda l'attuazione pratica dei metodi stessi, si deve lamentare la grande difficoltà, in cui pare si trovi oggi l'Italia, di procurarsi qualcuna delle potenti macchine calcolatrici elettroniche che si sono recentemente costruite negli Stati Uniti d'America, l'impiego delle quali è indispensabile per il compimento dei necessari calcoli numerici. Intanto le possibilità di dette macchine hanno vieppiù affermato in tutti i Paesi la grande utilità, per il progresso delle Scienze e della Tecnica, di Istituti per le Applicazioni del Calcolo simili a questo, con gli stessi obbiettivi che io ebbi ad assegnare ad esso fin dal 1927, quando lo fondai nell'Università di Napoli, presso la mia cattedra di Analisi infinitesimale. Gli Istituti che sono gia sorti in America, in Inghilterra ed in Francia e progettati in Olanda, in Svezia ed in Svizzera, saranno in grado di provvedersi delle sopradette macchine ed è prevedibile che se questo Istituto non farà altrettanto, esso, a lungo andare, non potrà più competere con quelli!

D'altra parte l'interesse degli ambienti scientifici e tecnici internazionali per Istituto è sempre vivo. Esso ha ricevuto le visite del Prof. Alessandro Ostrovski dell'Università di Basilea che vi ha tenuto una conferenza dal titolo „Sui tipi di convergenza nell'analisi numerica", del Prof. Stig Ekelof del Politecnico di Goteborg che vi ha tenuto una conferenza sulle moderne macchine calcolatrici americane e studiato a fondo la nostra organizzazione, onde modellare ad essa quella dell'Istituto che si ha in proggetto di construire in Svezia, del Prof. Nils Zeilon dell'Università di Lund che ha frequentato per notevole tempo questo Istituto studiandone i lavori compiuti ed in corso e l'organizzazione, del Dott. E. J. Schremp dell'Ufficio di Ricerche Navali degli Stati Uniti

d'America, inviato dal „Computation Laboratory" di New-York per prendere visione dei lavori di questo Istituto ed in particolare di quello relativo alla tabellazione della funzione gamma. L'Università di Basilea ha inviato un suo discepolo per un anno, a scopo di studio. Un analogo invio sarà fatto dall'Osservatorio Astronomico di Cracovia. L'Istituto ha attivamente partecipato ai congressi internazionali di „Meccanica applicata" (Parigi, 22-29 settembre 1945) e per „L'Educazione dell'ingegnere" (Darmstadt, 31 luglio-agosto 1947). Nel primo è stato rappresentato dai suoi collaboratori Prof. Luigi Amerio, Piero Giorgio Bordoni, Enrico Volterra e nel secondo dal Prof. Fabio Conforto i quali hanno riferito su taluni lavori compiuti dall'Istituto e sui progressi in esso conseguiti nell'integrazione dei sistemi di equazioni a derivate parziali dell'alta Tecnica.

La missione affidata all'Istituto, secondo la quale esso deve poter fornire opera di collaborazione o di consulenza in questioni di calcolo, su richiesta di Enti industriali, scientifici o tecnici o di studiosi isolati, è stata, anche in quest'ultimo biennio, attivamente esercitata dall'Istituto con ottimi risultati.

Devo però dichiarare, con mio vivo rincrescimento, che l'industria, la quale, prima della guerra, forniva all'Istituto notevole mole di lavoro, con sue frequenti proposte di ricerche, non si è più valsa di esso!

Collaboraxione con uffici statali

La DIREZIONE GENERALE DEL CATASTO E DEI SERVIZI TECNICI ERARIALI del MINISTERO DELLE FINANZE si è rivolta all'Istituto per la risoluzione numerica, in media, di un sistema di 110 equazioni algebriche lineari in 28 incognite. Il compito richiesto all'Istituto è stato assolto rapidamente con espressa piena soddisfazione del proponente.

L'UFFICIO RAGIONERIA del SENATO ha richiesto la compilazione di una tabella per il calcolo del valore attuale di una rendita.

Collaborazione con enti di ricerca scientifica e con scienziati isolati

ISTITUTO NAZIONALE DI GEOFISICA, ha chiesto la collaborazione in una ricerca relativa al *comportamento delle onde di Rayleigh in un mezzo stratificato firmo-elastico*. Il compito dell'Istituto ha consistito nel calcolo delle radici di numerose equazioni algebriche di 3^0 grado a coefficienti complessi.

ISTITUTO NAZIONALE DI ELETTROACUSTICA, ha chiesto la collaborazione nelle seguenti tre ricerche:

a) *sull'influenza del coefficiente di Poisson nelle autofrequenze*

diametrali di una piastra circolare libera. A tale ricerca già in passato collaborò l'Istituto come riferii nella precedente relazione, calcolando le autofrequenze diametrali di una piastra circolare libera per un numero di raggi nodali non superiore a 12, dando al coefficiente di Poisson il valore 0,25, ed è stato ora ripetuto lo stesso calcolo considerando i valori 0; 0,05; 0,10; 0,15; 0,20 di detto coefficiente, indicati dall'Istituto proponente;

b) *sulla massa di radiazione di un diaframma rigido munito di scherno acustico chiuso.* Il compito dell'Istituto, il cui completo assolvimento è merito principalmente del ricercatore W. Gross, ha constistito nel tabellare la somma di una serie di lentissima convergenza. Tale lavoro fornisce anche un pratico procedimento per la tabellazione dell'integrale del rapporto $\frac{x}{\text{sen } x}$;

c) *sulla radiazione sonora di un cilindro.* L'Istituto ha calcolato la soluzione di un particolare problema esterno di Neumann relativo ad un cilindro circolare retto.

- ISTITUTO DI CHIMICA GENERALE DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA, ha chiesto la collaborazione in ricerche riguardanti la *struttura molecolare*, proponendo la risoluzione di due sistemi rispettivamente di 20 e 22 equazioni lineari omogenee in altrettante incognite i cui coefficienti dipendono da un parametro da determinarsi in modo che detti sistemi abbiano soluzioni non nulle. La determinazione del parametro ha richiesto il calcolo di tutte le radici, che risultano reali, di due equazioni secolari, rispettivamente di 20^0 e 22^0 grado.

- LABORATORIO DI AERONAUTICA DEL POLITECNICO DI TORINO, ha chiesto la collaborazione su una ricerca concernente la *teoria del trasporto turbolento.* L'Istituto ha integrato una equazione differenziale lineare del 2^0 ordine a coefficienti variabli determinando e tabellando la soluzione che verifica prescritte condizioni ai limiti.

- CENTRO DI STUDIO PER LA FISICA NUCLEARE DELL'UNIVERSITÀ DI ROMA, ha chiesto la collaborazione nelle seguenti due ricerche:

a) *sulla misura dell'eccesso positivo della radiazione cosmica.* Per la soluzione di una certa equazione differenziale del 2^0 ordine dipendente da parametri, l'Istituto ha delimitato gli intervalli in cui occorre tenere i dati iniziali affinchè le soluzioni abbiano il prescritto comportamento nell'intervallo di loro definizione;

b) *sull'effetto fotoelettrico del deuterio.* L'Istituto ha tabellato un certo integrale, non elementarmente calcolabile, in funzione dei tre parametri da cui esso dipende.

– STAZIONE CHIMICO-AGRARIA SPERIMENTALE DI ROMA, ha chiesto la collaborazione per la *rappresentazione analitica di un certo fenomeno.* L'Istituto ne ha date diverse.

OSSERVATORIO ASTRONOMICO DI MONTE MARIO, ha chiesto all'Istituto la risoluzione di un sistema di equazioni algebriche e lineari.

ISTITUTO DI CHIMICA APPLICATA DELL'UNIVERSITÀ DI TRIESTE, ha chiesto collaborazione per una ricerca concernente *l'autocombustione dei cereali.* L'Istituto ha calcolato la distribuzione della temperatura in una sfera conduttrice del calore, isotropa e omogenea, immersa in un ambiente a temperatura costante, coincidente con quella iniziale in tutti i punti della sfera stessa, alla quale è fornita una nota quantità di calore indipendente dal tempo e dal posto.

— Prof. Giancarlo Wick dell'Università di Roma. Come già ebbi a riferire nella precedente relazione il Prof. Wick propose all'Istituto la costruzione di una tavola della funzione euleriana gamma per valori complessi dell'argomento, additandola come utile per gli studi di Fisica teorica qualora fosse dotata di taluni espressi requisiti. Il procedimento di calcolo adottato in un primo tempo, di cui già feci cenno, si rivelò di difficile attuazione in prossimità dell'asse reale. Si dovè perciò sottoporre a studio altri procedimenti pervenendo a scoprirne alla fine unr che, in qualche mese, ha portato alla compilazione della tavola desiderata.

Mentre essa stava per essere compiuta sono venuto a conoscenza che, tanto nel „Scientific Computing Service Limited" di Londra, quanto al „Computation Laboratory" di New York, la stessa tavola era stata iniziata. Non mi consta che sia stata già condotta a termine.

Prof. Giulio Krall dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica. Ha chiesto la collaborazione nelle seguenti tre ricerche :

a) *su questioni asismiche.* L'Istituto ha ricercato ed ottenuto formule di maggiorazione per gli integrali di una certa equazione differenziale lineare del 2^0 ordine ;

b) *intorno al moltiplicatore critico di una distribuzione di carico su una volta autoportante.* L'Istituto ha tabellato numerose funzioni inditate dal proponente ;

c) *sugli sforzi in un tubo cilindrico a base ellittica con pressione esterna, timpanato agli estremi.* L'Istituto ha controllato alcuni calcoli compiuti dal proponente, procedendo poi alla tabellazione di funzioni dallo stesso indicate.

Prof. Luigi Amoroso dell'Università di Roma. Dietro sua richiesta, l'Istituto ha tabellato, con sei cifre decimali esatte, i seguenti integrali:

$$\int_x^\infty \frac{dt}{\Gamma(t)} \quad , \quad \int_x^\infty \frac{tdt}{\Gamma(t)} \,.$$

ove $\Gamma(t)$ designa la solita funzione gamma.

– Prof. Carlo Minelli dell'Istituto Universitario di Venezia. Ha chiesto la collaborazione dell'Istituto nelle seguenti ricerche:

a) *sulla cinematica dei sistemi rigidi.* L'Istituto ha dimostrato analiticamente un'identità algebrica a cui era già arrivato il proponente per via meccanica;

b) *sull'inflessione di una trave a doppio T vincolata in un estremo e caricata sull'altro.* L'Istituto ha fornito al proponente una esauriente trattazione teorica del problema, fondata sulla teoria di De Saint Venant.

– Prof. Alfio di Bella dell'Istituto di Architettura Navale dell'Università di Genova. Ha richiesto la collaborazione in una ricerca concernente la *determinazione della forma più conveniente per la carena di una nave.* L'Istituto ha fornito al proponente una prima soluzione approssimata del difficile ed importante problema, ed una profonda rielaborazione di una memoria, fondamentale per tali ricerche di G. H. Michell pubblicata nel vol. 45 del Philosophical Magazine. Ulteriori ricerche, rivolte allo stesso problema, sono in corso presso l'Istituto.

– Ing. Dott. Antonino Riggio delle Ferrovie dello Stato. Ha chiesto la collaborazione sul calcolo della *resistenza in curva di un autoveicolo.* L'Istituto ha tabellato, in funzione dei parametri da cui dipende, un integrale doppio indicato dal proponente.

Ing. Dott. Luigi Ammendola delle Ferrovie dello Stato. Ha chiesto la collaborazione dell'Istituto sulla *configurazione di conduttori di linee elettriche.* L'Istituto ha costruito due nomogrammi utili alle calcolazioni.

Ing. Mario Marcello de Leva di Torino. Ha richiesto la collaborazione nel *calcolo per la costruzione di un trasformatore a secondari multipli.* L'Istituto ha dato il metodo e lo ha applicato in un caso particolare, per determinare il dimensionamento dei circuiti secondari in modo che sia realizzata una certa condizione indicata dal proponente.

Dott. Jose' Sebastião e Silva dell'Università di Lisbona. Dietro sua richiesta, l'Istituto ha sperimentato un suo nuovo metodo di calcolo delle radici complesse di un'equazione algebrica.

Dott. Paolo Tortorici della Facoltà di Economia e Commercio dell'Università di Roma. Ha proposto all'Istituto di controllare alcuni calcoli laboriosi con i quali egli è pervenuto ad una funzione

che verifica approssimativamente una certa equazione integrale traducente un problema di Statistica matematica. L'Istituto ha anche sperimentato che la sopradetta soluzione fornita dal proponente, consente, con buona approssimazione, di ritenere esistenti coppie di variabli casuali gaussiane, dipendenti fra loro, la cui somma è del pari gaussiana.

Prof Mario Torrioli della Clinica Medica dell'Università di Roma. Dietro sua richiesta, l'Istituto ha dato una rappresentazione analitica atta alla previsione dell'efficacia di un certo metodo di cura dell'anemia perniciosa.

* * *

Numerose sono state pure le consulenze richieste all'Istituto. Oltre alla consulenza data alla Presidenza del C. N. R. nell'esame di lavori matematici ad esso presentati, l'Istituto ne ha anche data all'ing. Alfredo Foschini, al dott. Carlo Bernasconi, all'ing. Saverio Bianchi, all'ing. Livio Meloni, al colonnello F. Galanzino.

Tesi di laurea compiute presso l'Istituto

Una notevole attività dei ricercatori dell'Instituto è spesa nel dirigere talune tesi per la laurea in Scienze Matematiche o in Matematica e Fisica, che si compiono nell'Istituto stesso, e nel controllarne i calcoli analitici e numerici. Nel periodo di tempo a cui si riferisce la presente relazione vi si sono compiutamente svolte 38 tesi di laurea. Di queste, cominciando dalle più importanti, quattro si riferiscono al calcolo delle sollecitazioni di una lastra piana quadrata con foro circolare al centro, uniformemente tesa lungo due lati opposti del quadrato ; è da segnalare quella dovuta al Colonnello del Genio Aeronautico Giuseppe Schepisi che è riuscito a tradurre il problema in una equazione integrale di I specie. Una, dovuta all'ing. Domenico Gentiloni Silveri, si riferisce al calcolo delle sollecitazioni in un anello di giunzione di parti di macchine. Quattro si riferiscono al calcolo delle sollecitazioni in una trave grossa incastrata ed uniformemente caricata ; notevole fra queste quella dovuta al dott. Renato Ricci che consegue la migliore approssimazione della soluzione. Una, dovuta all dott. ssa Silvia Conforto, riguarda il calcolo, con metodo integrale, dell'equilibrio elastico di una diga a forma di parallelepipedo. Quattro sono dedicate al calcolo delle frequenze nelle oscillazioni proprie di membrane di varia forma e variamente vincolate ; notevole fra queste quella compilata dalla dott. ssa Jole Miglio-rini nella quale è conseguito, per la prima volta, il tracciamento

delle linee nodali per la membrana di forma ellittica con orlo fisso. In una, dovuta alla dott. ssa Rita Giancane, è applicato il metodo della trasformata parziale di Laplace, nella forma recentemente studiata dal Prof. Aldo Ghizzetti, al problema dell'equilibrio di una piastra, appoggiata su tutto il contorno, a forma di dominio normale. Due sono dedicate ad esperimenti di taluni metodi di integrazione numerica di equazioni differenziali ordinarie. Una alla costruzione di un nuovo tipo di polinomi ortogonali. Una ad esperimenti sui metodi iterativi per la risoluzione numerica dei sistemi di equazioni algebriche e lineari; notevole la conclusione di questo lavoro secondo la quale, salvo casi eccezionali privi di interesse, si deve rifiutare ogni pregio di praticità a qualsivoglia di detti metodi, anche ai più celebri come, ad esempio, quello di Seidel. In tre si tratta il problema dell'equilibrio di un arco circolare incastrato uniformemente premuto; e in altre tre si considera il problema della torsione in un prisma quadrato cavo. Notevoli le tesi della dott. ssa Angela Trombetti e Tina Leanza, nelle quali si studiano, con esperimenti, metodi di risoluzione numerica delle equazioni algebriche, pervenendo a stabilire alcuni accorgimenti pratici, la prima è dedicata al metodo, del quale ho sopra già fatto cenno, del prof. Silva, la seconda a quello che io ho sistemato nelle mie „Lezioni di Algebra" per gli allievi d'Ingegneria. Le rimanenti tesi sono dedicate al problema di Dirichle con dati discontinui sulla frontiera, ad esperimenti di taluni nuovi metodi di integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali, al calcolo degli sforzi in un telaio piano quadrato uniformemente premuto, alla costruzione di funzioni armoniche in due variabili, periodiche rispetto ad una di queste, alla compilazione di tabelle per il collaudo di partite di numerosi oggetti, al calcolo per mezzo di sviluppi in serie dell'oscillazione dell'aqua in un impianto idraulico munito di due pozzi piezometrici, al calcolo delle sollecitazioni in una larghezza partecipante, all'equilibrio di un parallelepipedo rettangolo elastico incastrato su due faccie opposte e uniformemente premuto su una, al metodo di Weinstein per il calcolo delle frequenze nelle vibrazioni proprie di una piastra incastrata di qualsivoglia forma.

Pubblicazioni dell'Istituto

Nel periodo di tempo a cui si riferisce la presente relazione, il numero delle pubblicazioni dell'Istituto è aumentato dal n. 163 al n. 205. Esse sono dovute a me ed ai ricercatori dell'Istituto: Aquaro, Caligo, Fichera, Ghizzetti, Grioli, Gross, Roma, Tolotti; ai consulenti ordinari Amerio e Volterra; ai collaboratori Birin

delli, Bordoni Giorgio Piero, Crocco Luigi, Krall, Miranda, Signorini, Silva.

Esse investono: studi esistenziali e metodi di calcolo delle soluzioni delle equazioni e dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie o a derivate parziali; la struttura delle funzioni iperarmoniche di qualsivoglia ordine e in quante si vogiano variabili; l'integrale di Lebesgue; l'analisi funzionale; le delimitazioni di autovalori nelle equazioni integrali lineari e dei momenti di una funzione; l'interpolazione; i metodi di calcolo delle radici delle equazioni e dei sistemi di equazioni lineari algebriche; la geometria delle masse; le deformazioni finite delle lastre; le pressioni critiche e le autofrequenze nelle piastre anulari; le pressioni critiche negli involucri cilindrici; le dighe a volta sottile non cilindrica; la trave o la piastra appoggiata su suolo elastico; l'aerodinamica; la radiazione sonora.

L'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, C.N.R., Roma

(Reçu le 20 février 1948)

ÉTUDE DES COURBES DÉFINIES PAR CERTAINES RELATIONS ENTRE LEUR ÉLÉMENTS INTRINSÈQUES

par

ION IRIMESCU

1. Dans une étude profonde sur les courbes et les surfaces gauches, M. O. Mayer [1]) a considéré comme élément fondamental du second ordre d'une courbe sa sphère osculatrice de rayon donné r, au lieu du plan osculateur.

On peut définir, en partant de cette sphère, un trièdre mobile dont la variation le long de la courbe est régie par des équations analogues à celles de Frenet et presque aussi simples. Ces équations ont permis à M. Mayer de généraliser systématiquement toute la théorie classique des courbes de l'espace ordinaire.

2. Soit la courbe Γ

$$x = x(s) \quad , \quad y = y(s) \quad , \quad z = z(s)$$

rapportée à un trièdre orthogonal sinistrorsum et à son arc s comme paramètre. Considérons la sphère osculatrice Ω de rayon constant r, relative au point M de la courbe. M. Mayer a attaché à ce point le trièdre orthogonal composé des droites suivantes:

1) La tangente Mu, orientée dans le sens de croissance de l'arc s.

2) La normale Mv tangente en M à le sphère Ω, orientée d'une manière quelconque.

3) La droite Mw qui joint le point M au centre P de la sphère Ω, orientée de façon que le trièdre $Muvw$ soit sinistrorsum.

Ce sera le trièdre principale r de la courbe Γ. On conviendra, en outre, d'appeler normale principale r et binormale r les droites Mv et Mw. Le trièdre de Frenet correspond à $r = \infty$.

J'appelle ce trièdre (r) $Muvw$, le trièdre de M. O. Mayer et je l'indiquerai dorénavant par M_r.

3. Soient (α, β, γ), (ξ, η, ζ), (λ, μ, ν), les cosinus de la tangente, de la normale principale r et de la binormale r et $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{T}$ la cour-

bure et la torsion de la courbe dans le système M_r. M Mayer a établit dans ce système les formules analogues à celles de Frenet que voici :

$$(1)\qquad \begin{aligned} \alpha &= \frac{dx}{ds}, \dots \\ \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\xi}{R} + \frac{\lambda}{r}, \dots \\ \frac{d\xi}{ds} &= -\frac{\alpha}{R} + \frac{\lambda}{T}, \dots \\ \frac{d\lambda}{ds} &= -\frac{\alpha}{r} - \frac{\xi}{T}, \dots \end{aligned}$$

Dans cet article je me propose d'étudier la généralisation des courbes gauches de Bertrand, de Mannheim et de Cesàro dans le système M_r.

4. La généralisation des courbes de Bertrand [2]).

Considérons une courbe gauche Γ définit par ses coordonnées x, y, z, fonctions de l'arc s. Soit sur la normale principale r dans un point M de la courbe Γ un segment $u = MM_1$, u étant une fonction de l'arc s. Quand le point M décrira la courbe Γ, le point M_1 décrira Γ_1. Imposons à la courbe Γ_1 d'avoir la même normale principale r que la courbe Γ.

La courbe Γ_1 est donnée par les équations

$$(2)\qquad x_1 = x + u\xi, \qquad y_1 = y + u\eta, \qquad z_1 = z + u\zeta$$

$$(3)\qquad \xi_1 = \xi, \qquad \eta_1 = \eta \qquad \zeta_1 = \zeta.$$

Posons

$$(4)\quad \alpha_1 = \alpha\cos\sigma + \lambda\sin\sigma, \quad \beta_1 = \beta\cos\sigma + \mu\sin\sigma, \quad \gamma_1 = \gamma\cos\sigma + \nu\sin\sigma$$

où σ est l'angle entre les tangentes de la courbe Γ et Γ_1 dans les points qui se correspondent. Nous en déduisons :

$$(5)\quad \lambda_1 = \lambda\cos\sigma - \alpha\sin\sigma, \quad \mu_1 = \mu\cos\sigma - \beta\sin\sigma, \quad \nu_1 = \nu\cos\sigma - \gamma\sin\sigma.$$

En dérivant les formules (2) par rapport à s et en tenant compte des formules (1), on en déduit que $u = h = \text{constant}$, et les équations (2) deviennent :

$$(6)\qquad x_1 = x + h\xi, \qquad y_1 = y + h\eta, \qquad z_1 = z + h\zeta.$$

Si on dérive les formules (6) par rapport à s et on tient compte des formules (1), on obtient :

$$(7)\qquad \alpha_1 \frac{ds_1}{ds} = \left(1 - \frac{h}{R}\right)\alpha + \frac{h}{T}\gamma, \dots$$

En multipliant les formules (7) par α, β, γ et successivement par λ, μ, ν et en tenant compte des formules (4) nous obtenons :

$$\cos\sigma\frac{ds_1}{ds}=1-\frac{h}{R},\quad \sin\sigma\frac{ds_1}{ds}=\frac{h}{T}. \tag{8}$$

En éliminant $\frac{ds_1}{ds}$ entre les formules (8) on obtient:

$$\frac{\sin\sigma}{R}+\frac{\cos\sigma}{T}=\frac{\sin\sigma}{h}. \tag{9}$$

Si on dérive les formules (4) par rapport à s et on tient compte des relations (1) et (5), on obtient:

$$\frac{d\sigma}{ds}=\frac{1}{r_1}\frac{ds_1}{ds}-\frac{1}{r}. \tag{10}$$

D'autre part, de la formule (8), on obtient:

$$\frac{ds_1}{ds}=\sqrt{\left(1-\frac{h}{R}\right)^2+\left(\frac{h}{T}\right)^2}$$

et donc la formule (10) devient:

$$\sigma=\frac{1}{r_1}\int\sqrt{\left(1-\frac{h}{R}\right)^2+\left(\frac{h}{T}\right)^2}\,ds-\frac{1}{r}s+C \tag{10'}$$

et nous montre l'expression de l'angle σ considéré comme fonction de l'arc s.

La relation (9) devient:

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{T}\operatorname{cotag}\sigma=\frac{1}{h} \tag{11}$$

et caractérise les courbes que constituent la généralisation des courbes de Bertrand dans le système M_r.

5. La généralisation des courbes de Mannheim[3]).

a) Considérons une courbe gauche Γ de coordonnées x,y,z fonctions de l'arc s et une courbe Γ_1 qui a la binormale r la même que la normale principale r de la courbe Γ. Dans ce cas, la courbe Γ est une courbe de Mannheim de première espèce.

Les équations de la courbe Γ_1 sont:

$$x_1=x+u\xi,\quad y_1=y+u\eta,\quad z=z+u\zeta \tag{12}$$

$$\lambda_1=\xi\qquad \mu_1=\eta\qquad \nu_1=\zeta \tag{13}$$

$$\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta=0,\quad \xi_1\xi+\eta_1\eta+\zeta_1\zeta=0. \tag{14}$$

Si on dérive les formules (12) par rapport à l'arc s et on tient compte des formules (1), on déduit que $u=h=$ constant. Donc les formules (12) deviennent

$$x_1=x+h\xi,\quad y_1=y+h\eta,\quad z_1=z+h\zeta. \tag{15}$$

En dérivant les formules (15) par rapport à s et en tenant compte des formules (1), on obtient :

$$(16)\quad x_1' = \alpha\left(1-\frac{h}{R}\right)+\frac{h}{T}\lambda\ ,\ \ldots$$

$$(17)\quad x_1'' = \alpha h\left(\frac{R'}{R^2}-\frac{1}{rR}\right)+\xi\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R^2}-\frac{h}{T^2}\right)+\lambda\left(\frac{1}{r}-\frac{h}{rR}-\frac{hT'}{T^2}\right),\ldots$$

En multipliant les formules (17) par ξ, η, ζ, en les sommant on obtient la relation :

$$(18)\qquad \frac{1}{R^2}+\frac{1}{T^2}=\frac{1}{hR}$$

qui constitue l'équation généralisant les courbes de Mannheim dans le système M_r.

b) Considérons maintenant une courbe Γ_1 qui a la normale principale r la même que la binormale r de la courbe Γ.

Les équations de la courbe Γ_1 sont :

$$(19)\qquad x_1 = x+u\lambda\ ,\quad y_1 = y+u\mu\ ,\quad z_1 = z+u\nu$$

$$(20)\qquad \xi_1 = \lambda\ ,\quad \eta_1 = \mu\ ,\quad \zeta_1 = \nu\ .$$

$$(21)\qquad \lambda\alpha_1+\mu\beta_1+\nu\gamma_1 = 0\ ,\quad \lambda\lambda_1+\mu\mu_1+\nu\nu_1 = 0$$

et on parvient par les mêmes considérations aux formules

$$22)\quad x_1 = x+h\lambda\ ,\ y_1 = y+h\mu,\ z_1 = z+h\nu,\ u = h = \text{constant.}$$

En dérivant les formules (22) deux fois et en tenant compte des ormules (1) on obtient :

$$x_1' = \alpha\left(1-\frac{h}{R}\right)-\frac{h}{T}\xi,\ \ldots$$

$$x_1'' = \frac{h}{RT}\alpha+\left(\frac{1}{R}-\frac{h}{rR}+\frac{hT'}{T^2}\right)\xi-\frac{h}{T}\lambda,\ \ldots$$

Puisque on a [4])

$$\begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ x_1' & y_1' & z_1' \\ x_1'' & y_1'' & z_1'' \end{vmatrix} = 0$$

on obtient :

$$\begin{vmatrix} & \lambda & & \mu & \nu \\ & \left(1-\frac{h}{R}\right)\alpha-\frac{h}{T}\xi & & \cdots & \cdots \\ \frac{h}{RT}\alpha+\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{rR}+\frac{hT'}{T^2}\right)\xi-\frac{h}{T^2}\lambda & & & \cdots & \cdots \end{vmatrix}=0$$

En calculant le déterminant ci-dessus, on obtient

$$\left(1-\frac{h}{r}\right)^2 T^2+hRT'\left(1-\frac{h}{r}\right)+h^2=0 \tag{23}$$

ou, par la séparation des termes en T et en R,

$$\frac{\dfrac{h}{1-\dfrac{h}{r}}\,dT}{T^2+\left(\dfrac{h}{1-\dfrac{h}{r}}\right)^2}=\frac{ds}{R}$$

d'où, par intégration,

$$T=\left(\frac{h}{1-\frac{h}{r}}\right)\operatorname{tg}\int\frac{ds}{R}. \tag{24}$$

Les équations (23) ou (24) représentent la courbe de Mannheim de deuxième espèce généralisée dans le système M_r.

6. La généralisation des courbes de Cesàro.

Considérons une courbe gauche Γ de coordonnées x, y, z et faisant correspondre à chaque position du trièdre r une droite D liée invariablement à celui-ci et donnée par ses cosinus a, b, c et par un point M_0 (x_0, y_0, z_0). Cette droite, quand le point M décrit la courbe Γ, engendra une surface réglée dont les équations paramétriques sont [5])

$$\begin{aligned} X&=x+(\alpha x_0+\xi y_0+\lambda z_0)+(\alpha a+\xi b+\lambda c)\\ Y&=y+(\beta x_0+\eta y_0+\mu z_0)+(\beta a+\eta b+\mu c)\\ Z&=z+(\gamma x_0+\zeta y_0+\nu z_0)+(\gamma a+\zeta b+\nu c). \end{aligned} \tag{25}$$

Posons

$$\begin{aligned} p&=x+(\alpha x_0+\xi y_0+\lambda z_0) \\ q&=y+(\beta x_0+\eta y_0+\mu z_0) \\ r&=z+(\gamma x_0+\zeta y_0+\nu z_0) \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} l&=\alpha a+\xi b+\lambda c \\ m&=\beta a+\eta b+\mu c \\ n&=\gamma a+\zeta b+\nu c. \end{aligned} \tag{27}$$

Les formules (26), (27) représentent respectivement la directrice et l'indicatrice sphérique de la surface considérée.

Si on dérive les relations (26) et (27) en tenant compte des formules (1), en obtient

$$(28)\quad \begin{aligned} \frac{dp}{ds} &= \left(1-\frac{y_0}{R}-\frac{z_0}{r}\right)\alpha+\left(\frac{x_0}{R}-\frac{z_0}{T}\right)\xi+\left(\frac{x_0}{r}+\frac{y_0}{T}\right)\lambda, \ldots \\ \frac{dl}{ds} &= -\left(\frac{b}{R}+\frac{c}{r}\right)\alpha+\left(\frac{a}{R}-\frac{c}{T}\right)\xi+\left(\frac{a}{r}+\frac{b}{T}\right)\lambda, \ldots \end{aligned}$$

Si ω désigne l'arc de la directrice, en obtient par le calcul

$$(29)\quad \frac{d\omega}{ds}=\sqrt{\left(1-\frac{y_0}{R}-\frac{z_0}{r}\right)^2+\left(\frac{x_0}{R}-\frac{z_0}{T}\right)^2+\left(\frac{x_0}{r}+\frac{y_0}{T}\right)^2}=\sqrt{H}$$

et les formules (28) deviennent

$$(30)\quad \begin{aligned} \frac{dp}{d\omega} &= \frac{1}{\sqrt{H}}\left[\left(1-\frac{y_0}{R}-\frac{z_0}{r}\right)\alpha+\left(\frac{x_0}{R}-\frac{z_0}{T}\right)\xi+\left(\frac{x_0}{r}+\frac{y_0}{T}\right)\lambda\right], \ldots \\ \frac{dl}{d\omega} &= \frac{1}{\sqrt{H}}\left[-\left(\frac{b}{R}+\frac{c}{r}\right)\alpha+\left(\frac{a}{R}-\frac{c}{T}\right)\xi+\left(\frac{a}{r}+\frac{b}{T}\right)\lambda\right], \ldots \end{aligned}$$

Si on désigne par Θ l'angle entre la génératrice de la surface reglée et la courbe directrice, on obtient :

$$(31)\quad \cos\Theta = l\frac{dp}{d\omega}+m\frac{dq}{d\omega}+n\frac{dr}{d\omega}$$

et grâce aux formules (27) et (30) on a :

$$(32)\quad \cos\Theta=\frac{1}{\sqrt{H}}\left[a\left(1-\frac{y_0}{R}-\frac{z_0}{r}\right)+b\left(\frac{x_0}{R}-\frac{z_0}{T}\right)+c\left(\frac{x_0}{r}+\frac{y_0}{T}\right)\right].$$

Si on fait l'angle Θ constant, on obtient :

$$(33)\quad \begin{aligned} &\left[a\left(1-\frac{y_0}{R}-\frac{z_0}{r}\right)+b\left(\frac{x_0}{R}-\frac{z_0}{T}\right)+c\left(\frac{x_0}{r}+\frac{y_0}{T}\right)\right]^2- \\ &-K^2\left[\left(1-\frac{y_0}{R}-\frac{z_0}{r}\right)^2+\left(\frac{x_0}{R}-\frac{z_0}{T}\right)^2+\left(\frac{x_0}{r}+\frac{y_0}{T}\right)^2\right]=0 \end{aligned}$$

ou bien sous une forme définitive :

$$(34)\quad \frac{A}{R^2}+\frac{B}{T^2}+\frac{C}{RT}+\frac{Dr+D_1}{rR}+\frac{Er+E_1}{rT}+\frac{Fr^2+F_1r+F_2}{r^2}=0.$$

On en déduit donc la définition suivante :

Si une courbe gauche Γ *possède la propriété qu'une droite D, invariablement liée au trièdre r de la courbe, forme dans son mouvement un angle constant avec la courbe décrit par un point*

de la droite D, la courbure, la torsion et l'inverse du rayon r sont liés par une équation quadratique aux coefficients constants.

Si $\Theta = \frac{\pi}{2}$ il résulte que $k = 0$ et l'équation (33) devient

$$a\left(1 - \frac{y_0}{R} - \frac{z_0}{r}\right) + b\left(\frac{x_0}{R} - \frac{z_0}{T}\right) + c\left(\frac{x_0}{r} + \frac{y_0}{T}\right) = 0 \tag{35}$$

ou bien

$$\frac{D}{R} + \frac{E}{T} + \frac{Fr + F_1}{r} = 0. \tag{36}$$

L'équation (36) représente la courbe de Bertrand généralisée dans le système M_r.

Si la surface réglée (25) est développable, son équation est [6])

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ \frac{dp}{ds} & \frac{dq}{ds} & \frac{dr}{ds} \\ \frac{dl}{ds} & \frac{dm}{ds} & \frac{dn}{ds} \end{vmatrix} = 0. \tag{37}$$

En tenant compte des relations (27) et (28) et en développant le déterminant (37), on obtient :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \xi & \lambda \\ \beta & \eta & \mu \\ \gamma & \zeta & \nu \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 - \frac{y_0}{R} - \frac{z_0}{r} & \frac{x_0}{R} - \frac{z_0}{T} & \frac{x_0}{r} + \frac{y_0}{T} \\ -\frac{b}{R} - \frac{c}{r} & \frac{a}{R} - \frac{c}{T} & \frac{a}{r} + \frac{b}{T} \end{vmatrix} = 0. \tag{38}$$

Cette expression devient:

$$\frac{A}{R^2} + \frac{B}{T^2} + \frac{C}{RT} + \frac{Dr + D_1}{rR} + \frac{Er + E_1}{rT} + \frac{F_1 r + F_2}{r^2} = 0. \tag{39}$$

L'équation (39) est analogue à (34) où $F = 0$.

Par conséquant on peut énoncer la définition suivante :

Si une courbe gauche Γ *possède la propriété qu'une droite D, invariablement liée au trièdre r de la courbe, décrit dans son mouvement une surface développable, la courbure, la torsion et l'inverse du rayon r de la courbe sont liés par une équation quadratique sans le terme libre aux coefficients constants.*

C'est une courbe de Cesàro, généralisée pour le système M_r [7]).

8. Si la surface réglée (25) est un hyperboloïde de rotation à une

nappe, la courbe Γ est une courbe de Bertrand qui se confond avec un cercle parallèle de la surface.

Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 15 Février 1948)

Travaux cités

1) Octave Mayer – „*Etude sur les courbes gauches I*" Buletinul Facultăţii de Ştiinţe din Cernăuţi, Vol. II. fasc. I (1928), pag. 208.
2) Bertrand – „*Mémoire sur les lignes courbes non planes*". Journ. de l'Ec. polyt., XXX, Cah. 1845 pag. 48.
L. Bianchi – *Lezioni di Geometria Differenziale* Vol. I_1, pag. 62.
3) Mannheim – „*Principes et développements de la géométrie cinématique*" Paris, (1894) pag. 536.
Gino Loria – *Curve sghembe* Vol. II, pag. 113.
4) „ „ „ Vol. I, pag. 3.
5) „ „ „ Vol. II, pag. 120.
6) „ „ „ „ „
7) Cesàro – *Geometria intrinseca* Napoli, (1896) pag. 144.
E. Salcowski – „*Cesàro'schen Kurven*" Sitzungsberichte der Bayer. Akad. 1911, pag. 523–37.

COARDE ORTOPTICE

de

A. MYLLER

Intrebuinţăm un sistem de coordonate în plan foarte apropiat de cel polar. Intr'un punct A pe axa Ox, la distanţa $+1$ de originea O, ridicăm o perpendiculară $y'Ay$. Luând un punct oarecare P, considerăm intersecţia M a lui OP cu $y'Ay$. Punctul P e definit prin coordonatele lui: *raza vectoare* r, care e distanţa OP socotită pozitivă sau negativă, după cum punctul P este sau nu de aceiaşi parte a lui O ca M, şi *panta* t, care e distanţa AM socotită pozitivă sau negativă dela A într'un sens sau altul.

O curbă oarecare C e dată de ecuaţia

$$r = f(t). \tag{1}$$

Ecuaţia aceleiaşi curbe în coordonate polare e

$$r = f(\operatorname{tg}\theta), \tag{2}$$

unde θ e unghiul AOM, iar în coordonate carteziane dreptunghiulare prin O e

$$\sqrt{x^2+y^2} = f(y/x). \tag{3}$$

Dacă însemnăm cu u, v coordonatele tangenţiale ale dreptei

$$ux + vy + 1 = 0,$$

atunci coordonatele r, t ale piciorului perpendicularei din O pe dreaptă sunt:

$$r = 1/\sqrt{u^2+v^2}, \qquad t = v/u. \tag{4}$$

De aci rezultă că podara negativă $\bar{C}$ a curbei C, adică învăluitoarea dreptei PI perpendiculară în P pe OP e dată în coordonate tangenţiale de ecuaţia

$$\sqrt{u^2+v^2}\, f(v/u) = 1. \tag{5}$$

Numim *coardă ortoptică* a curbei C o coardă PP', care e văzută din O sub un unghiu drept, adică la care razele OP și OP' sunt perpendiculare una pe alta. Numim triunghiul OPP' *triunghiu cordal ortoptic.*

Perpendicularele PI și $P'I$ la OP și OP', care se tae în I, sunt două tangente la $\bar{C}$ perpendiculare una pe alta. Curba C_1 generată de punctul I, când cele două tangente perpendiculare variază pe curba $\bar{C}$ a fost numită *curba ortoptică* a curbei $\bar{C}$. Raza vectoare OI a curbei C_1, ortoptică curbei $\bar{C}$, este egală cu coarda ortoptică corespunzătoare a podarei C a aceleiași curbe $\bar{C}$.

Problema I. Să se găsească curbele C a căror coarde ortoptice sunt de lungime constantă a.

Observând că două raze vectoare perpendiculare au pantele t și $-1/t$, obținem din triunghiul OPP' ecuația funcțională

$$f^2(t) + f^2(-1/t) = a^2. \tag{6}$$

Soluția ei, care dă ecuația curbei C, este

$$f(t) = r = \sqrt{F(t) - F(-1/t) + a^2/2} \tag{7}$$

unde F e o funcție arbitrară.

Aceste curbe C odată aflate, podarele lor negative $\bar{C}$ vor fi curbele a căror curbă ortoptică C_1 e un cerc *) cu centrul O.

Din cauza semnelor $\pm$ dinaintea radicalului și presupunând funcția f^2 uniformă, curba (7) e simetrică în raport cu O și închisă. Prin urmare romburile înscrise cu centrul în O au perimetrul constant $4a$. Deasemenea dreptunghiurile circumscrise podarei negative au diagonalele de lungime constantă $2a$. Se poate constata încă că punctele de contact ale dreptunghiurilor circumscrise formează paralelograme cu laturile paralele diagonalelor dreptunghiului și cu perimetrul constant $4a$.

Cazul particular cunoscut al cercului ortoptic al elipsei cu axele a și b corespunde datelor

$$F(t) = \frac{a^2 + b^2 t^2}{2(1 + t^2)}, \tag{8}$$

$$r^2 = f^2(t) = F(t) - F(-1/t) + (a^2 + b^2)/2 = \frac{a^2 + b^2 t^2}{1 + t^2}.$$

Enunțăm încă câteva probleme, care se tratează asemănător problemei I, și indicăm la dânsele numai ecuația funcțională și soluția ei, întrebuințând notațiile precedente.

*) Doucet, Nouv. Ann. Ser. 2, vol. 12, pag. 328, (1873).

Problema 2. Curbele a căror triunghiuri ortoptice au aria constantă $a^2/2$.

$$f(t)\,f(-1/t) = a^2, \qquad f(t) = a\,\frac{F(t)}{F(-1/t)}. \tag{9}$$

Problema 3. Curbele cu triunghiurile ortoptice de perimetru constant p.

$$f(t) + f(-1/t) + \sqrt{f^2(t) + f^2(-1/t)} = p, \tag{10}$$

$$f(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,p\,\frac{F(t) + \sqrt{2}\,F(-1/t)}{F(-1/t)}.$$

Problema 4. Curbele la care suma (sau diferența) a două raze vectoare perpendiculare este constanta a.

$$\text{(11)}\quad \begin{cases} \text{pentru sumă:} & f(-1/t) + f(t) = a, \\ & f(t) = F(t) - F(-1/t) + a/2 \\ & f(-1/t) - f(t) = a, \\ \text{pentru diferență:} & f(t) = F(t) + F(-1/t) + 2a/\pi \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

Problema 5. Curbele la care triunghiurile ortoptice sunt asemenea între ele.

$$f(-1/t) = c\,f(t), \quad c = \operatorname{tg} OPP', \tag{12}$$

$$f(t) = e^{(2\log c)/\pi \operatorname{arc\,tg} t}\,\big(F(t) + F(-1/t)\big).$$

Problema 6. Curbele la care medianele ce trec prin O (înălțimile, bisectoarele) ale triunghiurilor ortoptice au lungimea constantă.

Problema conduce la ecuații asemănătoare celor tratate.

Cordes orthoptiques

Résumé. L'auteur étudie les courbes dont les cordes vues sous un angle droit d'un point fixe O ont des propriétés telles que: la longueur constante; forment avec le point O des triangles d'aire, de périmètre, d'angles constants, etc. On obtient des équations fonctionnelles dont on donne les solutions.

Séminaire Mathématique
de l'Université de Jassy

(Reçu le 15 février 1948).

A THEOREM CONCERNING REGULAR POLYGONS.

by

I. S. GAL

1. Introduction

In this paper I shall give an inequality between the distances $\overline{A_1 P}$, $\overline{A_2 P}$, $\overline{A_n P}$ of o point P lying in the plane of a regular polygon $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ from the vertices of this polygon. This inequality supplies the full solution of a circle of problems discussed by the Roumanian geometrical school.

D. Pompeiu [1]) has proved by means of the identity

$$(z_1 - z_0)(z_2 - z_3) + (z_2 - z_0)(z_3 - z_1) + (z_3 - z_0)(z_1 - z_2) \equiv 0$$

for the complex numbers z_0, z_1, z_2, z_3 that the segments $\overline{A_1 P}$, $\overline{A_2 P}$, $\overline{A_3 P}$ form a triangle, provided that the point P lies in the plane of the regular triangle (A_1, A_2, A_3); i. e. we have

$$\overline{A_1 P} + \overline{A_2 P} + \overline{A_3 P} \geqslant 2 \max_{(i=1,2,3)} (\overline{A_i P}). \tag{1}$$

Later on, E. Abason [2]), H. Hilton [3]), N. Obrechkoff [4]) and many others have given alternative, elementary proofs for this theorem; from these proofs that of G. Bratu [5]) is the simplest one, moreover, it is valid in the hyperbolical plane too.

Pompeiu [6]) showed in 1940 the analogous inequality

$$\overline{A_1 P} + \overline{A_2 P} + \overline{A_3 P} + \overline{A_4 P} \geqslant 2 \max_{(i=1,2,3,4)} (\overline{A_i P}) \tag{2}$$

for the square (A_1, A_2, A_3, A_4); in another paper [7]) he has could state an essentially similar theorem for regular polygons. Finally, T. Angheluţa [8]) and S. Gheorghiu [9]) have proved the exact analogue

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{A_k P} \geqslant 2 \max_{(i=1,\ldots,n)} (\overline{A_i P}) \tag{3}$$

of the above inequalities for regular polygons $(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n)$.

Besides some generalisations in other directions for the case of a triangle, found by D. Barbilian[10]), N. G. Botea[11]), P. Montel[12]) and C. Postelnicesco[13]), a result of N. Racliş, relating to the case $n \geqslant 8$ is worth notice. Indeed, the inequality (3) cannot be obviously, the exact estimate, much more has to hold. Racliş[14]) has proved that it is possible to form a $\left[\frac{n}{4}\right]$-ply closed polygon from the segments $\overline{A_1 P}, \overline{A_2 P}, \ldots, \overline{A_n P}$. However, this is still a rather rough estimate; for instance, I shall prove at once the exact inequality

$$\sum_{h=1}^{4} \overline{A_k P} \geqslant (1+\sqrt{2}) \max_{(i=1,2,3,4)} (\overline{A_i P}) + \min_{(i=1,2,3,4)} (\overline{A_i P}) \tag{4}$$

instead of (2).

Indeed, let O the center of the square and draw OQ parallel to the straight line $A_1 A_2$. (Fig. 1) By symmetry reasons, we can suppose P to lie in the angular domain $\widehat{QOA_3}$: therefore

$$\overline{A_1 P} \geqslant \overline{A_4 P} \geqslant \overline{A_2 P} \geqslant \overline{A_3 P}$$

$$\max_{(i=1,2,3,4)} (\overline{A_i P}) = \overline{A_1 P} \text{ and } \min_{(i=1,2,3,4)} (\overline{A_i P}) = \overline{A_3 P}.$$

Define the points A_5, A_6, P' by the congruence

$$(A_1 A_2 A_3 A_4 P) \equiv (A_1 A_6 A_5 A_2 P') \tag{5}$$

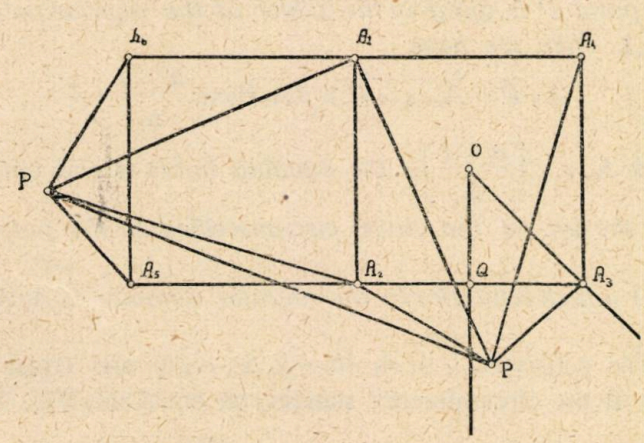


Fig. 1.

(that is, be (A_1, A_2, A_5, A_6) the image of the square by a rotation by 90^0 round A_1). Obviously, we have $\overline{A_4 P} = \overline{A_2 P'}$ and $\overline{PP'} = \sqrt{2}\,\overline{A_1 P}$, hence

(6) $\overline{A_2P}+\overline{A_4P}=\overline{A_2P}+\overline{A_2P'}\geqslant\overline{PP'}=\sqrt{2}\max_{(i=1,2,3,4)}(\overline{A_iP})$;

furthermore, the equality holds if and only if the points P', A_2, P are lying on the same staight line, that is to say in virtue of (5), $\overset{\frown}{P'A_2}A_1+\overset{\frown}{A_1A_2}P=P\overset{\frown}{A_4}A_1+A_1\overset{\frown}{A_2}P=\pi$, i. e. P is lying on the circumscribed circle (A_1, A_2, A_3).

Now (6) implies that

$$\overline{A_1P}+\overline{A_2P}+\overline{A_3P}+\overline{A_4P}=\max_{(i)}(\overline{A_iP})+(\overline{A_2P}+\overline{A_2P'})+$$

$$+\min_{(i)}(\overline{A_iP})\geqslant(1+\sqrt{2})\max_{(i)}(\overline{A_iP})+\min_{(i)}(\overline{A_iP})$$ and

equality holds if and only if P is a point of the circumscribed circle, q.e.d.

In this paper, I shall prove the generalisation of (4), that is to say, for a regular polygon $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ and for every point P, lying not necessarily in the plane of the polygon, an exact inequality, changing into an equality for each point of the circle circumscribed to the polygon and only for these points.

2. The plane problem.

In the planar case, we can estimate $\overline{A_1P}$ by means of arbitrary two distances $\overline{A_iP}$. Indeed, we have the following Lemma: *Suppose the point P is lying in the plane of the regular polygon $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Then we have*

$$\overline{A_kP}+\overline{A_{n-k+2}P}\geqslant 2\overline{A_1P}\cos\frac{h-1}{n}\pi$$

for $h=2, 3, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$; *the equality holds if and only if P is lying on the arc of the circle circumscribed to the polygon $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ which is interior to the angular domain* $\overset{\frown}{A_kA_1A_{n-h+2}}$.

Proof: The angles $\overset{\frown}{A_{k-1}A_1A_h}$ $(h=2, 3, \ldots, n)$ are equal, for they are angles at the circumference standing on equal arcs (Fig. 2); hence, as $\overset{\frown}{A_2A_1A_n}=\frac{n-2}{n}\pi$ and therefore $\overset{\frown}{A_{k-1}A_1A_k}=\frac{\pi}{n}$ and

(7) $$\overset{\frown}{A_kA_1A_{n-h+2}}=\overset{\frown}{A_2A_1A_n}-2\sum_{\nu=3}^{h}\overset{\frown}{A_{\nu-2}A_1A_\nu}=\frac{\pi}{n}(n-2h+2).$$

Now, define the points P' and A'_k by the congruence

$$(A_1\ A_k\ P\ A_{n-k+2}) \equiv (A_1\ A_k\ P'\ A_k) \tag{8}$$

which is possible, for $\overline{A_1\ A_k} = \overline{A_1\ A_{n-k+2}}$. Obviously

$$\overline{A_{n-h+2}\ P} = \overline{A_k\ P'} \tag{9}$$

furthermore, the triangle (A_1, P', P) being isosceles and since

$$\widehat{P'A_1P} = \widehat{A_h\ A_1\ A_{n-h+2}} = \frac{\pi}{n}(n-2h+2),$$ we have

$$\overline{PP'} = 2\overline{A_1P}\sin\frac{\pi}{2n}(n-2h+2) = 2\overline{A_1\ P}\cos\frac{h-1}{n}\pi.$$

Hence (9) implies

$$\overline{A_h\ P} + \overline{A_{n-h+2}\ P} = \overline{A_k P} + \overline{A_h P'} \geqslant \overline{PP'} = 2\overline{A_1 P}\cos\frac{h-1}{n}\pi$$

equality holding if and only if A_h is lying on the straight line PP', between P and P' (the cases $A_k = P$ and $A_k = P'$ allowed too). This means in virtue of (8), that (A_1, A_k, P, P_{n-h+2}) is a chord tetragon and P belongs to the angular domain $\widehat{A_k\ A_1\ A_{n-h+2}}$ q. e. d.

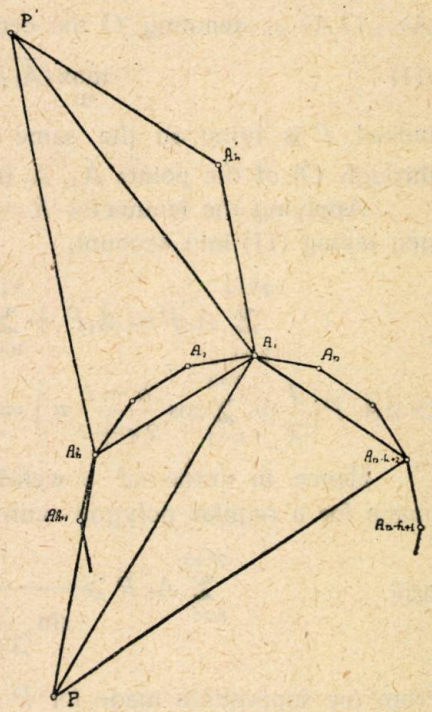


Fig. 2.

By means of this lemma we can prove the following

Theorem 1. Is $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ *a regular polygon and* P *a point of its plane, then we have te inequality,*

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{A_k P} \geqslant \frac{\left(\cos\frac{\pi}{2n}\right)^{\frac{1+(-1)^n}{2}}}{\sin\frac{\pi}{2n}} \max_{(i)}(\overline{A_i P}) + \frac{1}{2}\left[1+(-1)^n\right]\min_{(i)}(\overline{A_i P}) \tag{10}$$

and equality holds if and only if P *is lying on the circle circumscribed to the polygon.*

Proof: a) Suppose first, n is odd, $n=2\nu+1$. By the symmetry of the polygon we can suppose, P belongs to the angular domain $\overset{\frown}{A_{\nu+1}\,O\,A_{\nu+2}}$, denoting O the centre of the polygon. Then

$$\max_{(i)}(\overline{A_i P}) = \overline{A_1 P} \tag{11}$$

indeed, P is lying on the same side of the simmetry-axes (going through O) of the points A_1, A_i $(i=2, 3, \ldots, n)$ thus $\overline{A_1 P} \geqslant \overline{A_i P}$.

Applying the lemma for $h=2, 3, \ldots, \nu+1$ and summing, we get, taking (11) into account,

$$\sum_{h=1}^{2\nu+1} \overline{A_k P} = \overline{A_1 P} + \sum_{h=2}^{\nu+1} (\overline{A_k P} + \overline{A_{2\nu-h+3} P}) \geqslant$$

$$\geqslant 2\overline{A_1 P}\left(\frac{1}{2} + \sum_{h=2}^{\nu+1} \cos\frac{h-1}{2\nu+1}\pi\right) = 2\max_{(i)}(\overline{A_i P})\left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^{\nu} \cos\frac{l\pi}{2\nu+1}\right).$$

Hence in virtue of a well-known trigonometrical identity, we obtain for a regular polygon with an odd number of corners

$$\sum_{h=1}^{2\nu+1} \overline{A_h P} \geqslant \frac{1}{\sin\dfrac{\pi}{2(2\nu+1)}} \max_{(i)}(\overline{A_i P}). \tag{12}$$

From the supposition made for P we conclude that if P is lying on the circle circumscribed to the polygon, than it belongs to each of the angular domains $\overset{\frown}{A_k\,A_1\,A_{n-h+2}}$ $(h=2, 3, \ldots, \nu+1)$. Consequently, by the lemma equality holds in (12) if and only if P is lying on the circumscribed circle.

b) Suppose now, n is pair, $n=2\nu$. We can suppose now that P belongs to the angular domain $\overset{\frown}{Q_1\,O\,Q_2}$, Q_1 and Q_2 denoting the middle points of the segments $\overline{A_\nu A_{\nu+1}}$ and $\overline{A_{\nu+1} A_{\nu+2}}$ respectively. Than we have

$$\max_{(i)}(\overline{A_i P}) = \overline{A_i P} \text{ and } \min_{(i)}(\overline{A_i P}) = \overline{A_{\nu+1} P}. \tag{13}$$

We can apply the lemma again for $h=2, 3, \ldots, \nu$; hence summing and taking (13) into account, we obtain

$$\sum_{h=1}^{2\nu} \overline{A_h P} = \overline{A_1 P} + \sum_{h=2}^{\nu} (\overline{A_k P} + \overline{A_{2\nu+2-h} P}) + \overline{A_{\nu+1} P} \geqslant$$

$$\geqslant 2 \max_{(i)} (\overline{A_i P}) \left(\frac{1}{2} + \sum_{h=2}^{\nu} \cos \frac{h-1}{2\nu} \pi \right) + \min_{(i)} (\overline{A_i P}) \tag{13}$$

and

$$\sum_{h=1}^{2\nu} \overline{A_k P} \geqslant \max_{(i)} (\overline{A_i P}) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4\nu} + \min_{(i)} (\overline{A_i P}) \tag{14}$$

and we have equality again only for the points of the circumscribed circle.

c) Finally, we can unite (12) and (14) by means of the function

$$\frac{1+(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 \text{ if } n \equiv 1 \pmod 2 \\ 1 \text{ if } n \equiv 0 \pmod 2 \end{cases}$$

e. g. ; , that is to say, we have for each regular polygon with n corners the inequality (10) and equality holds only in the case stated in Theorem 1, q. e. d.

Theorem 1 contains of course for $n=3$ the theorem of Pompeiu ; for $n=4$ we conclude analogously (4). In the case of a regular pentagon, e. g., our theorem gives

$$\sum_{h=1}^{5} \overline{A_k P} \geqslant 2 \left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{5}}} \right) \max_{(i)} (\overline{A_i P}).$$

If $n=6$ than [15]), [16])

$$\sum_{h=1}^{6} \overline{A_k P} \geqslant (2+\sqrt{3}) \max_{(i)} (\overline{A_i P}) + \min_{(i)} (\overline{A_i P}).$$

3. The problem in the space.

Theorem 1 allows several generalisations. The most immediate one is the case when we do not suppose that P has to lie in the plane of the polygon. The theorem applies word for word in this case too :

Theorem 2. Let P an arbitrary point, not necessarily in the plane of the regular polygon, $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Then the distances $\overline{A_1 P}$ $\overline{A_2 P}, \ldots, \overline{A_n P}$ satisfy the inequality (10) ; *moreover, equality cannot hold unless P belongs to the plane of the polygon.* [17])

Proof: The polygon being regular, we can suppose that

$$\max (\overline{A_i P}) = \overline{A_1 P} \geqslant \overline{A_k P} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

Denote Q the projection of P to the plane of the polygon, further, let A'_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ that point of the segment $\overline{A_1 Q}$ for which we have $\overline{A'_k Q} = \overline{A'_k Q}$, whence $\overline{A'_k P} = \overline{A_k P}$. From the triangles (A_1, P, Q) and (A'_k, P, Q) we have obviously

$$\frac{\overline{A'_k P}}{\overline{A'_k Q}} = \frac{\overline{A_k P}}{\overline{A_k Q}} \geqslant \frac{\overline{A_1 P}}{\overline{A_1 Q}} \tag{16}$$

and equality holds only if either $P = Q$ or $A_1 = A_k$; further

$$\max_{(i)} (\overline{A_i Q}) = \overline{A_1 Q}. \tag{17}$$

Further, if $\min_{(i)} (\overline{A_i Q}) = \overline{A_i Q}$ then $\min_{(i)} (\overline{A_i P}) = \overline{A_i P}$ therefore, we may suppose also

$$\min_{(i)} (\overline{A_i P}) = \overline{A_{\nu+1} P}. \tag{18}$$

a) Suppose first n to be odd, $n = 2\nu + 1$. From theorem 1 we may conclude by (15) and (16)

$$\sum_{k=1}^{2\nu+1} \overline{A_k P} = \sum_{k=1}^{2\nu+1} \frac{\overline{A_k P}}{\overline{A_k Q}} \overline{A_k P} \geqslant \frac{\overline{A_1 P}}{\overline{A_1 Q}} \sum_{k=1}^{2\nu+1} \overline{A_k Q} \geqslant \tag{19}$$

$$\geqslant \max_{(i)} (\overline{A_i P}) \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2(2\nu+1)}}$$

and equality holds only on the circumscribed circle.

b) Suppose now n to be pair, $n = 2\nu$. From (10), (15) and (18) we conclude

$$\sum_{k=1}^{\nu} \overline{A_k Q} + \sum_{k=\nu+2}^{2\nu} \overline{A_1 Q} \geqslant \overline{A_k Q} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4\nu} \tag{20}$$

hence, by (16),

$$\frac{\overline{A_1 Q}}{\overline{A_1 P}} \left(\sum_{k=1}^{\nu} \overline{A_k P} + \sum_{k=\nu+2}^{2\nu} \overline{A_k P} \right) \geqslant \sum_{k=1}^{\nu} \overline{A_k Q} +$$

$$+ \sum_{k=\nu+2}^{2\nu} \overline{A_k Q} \geqslant \overline{A_1 Q} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4\nu}.$$

Consequently, on account of (18) we have

$$\sum_{k=1}^{2\nu} \overline{A_k P} = \min_{(i)} (\overline{A_i P}) + \sum_{k=1}^{\nu} \overline{A_k P} + \sum_{k=\nu+1}^{2\nu} \overline{A_k P} \geqslant \tag{21}$$

$$\geqslant \max_{(i)} (\overline{A_i P}) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4\nu} + \min_{(i)} (\overline{A_i P}).$$

Equality holds obviously only if it holds in (20) too, i. e. if $P = Q$

belongs to the circumscribed circle. (19) and (21) give by the function $\frac{1+(-1)^n}{2}$ the inequality (10), q. e. d.

4. Notes.

Another way of the generalisation consists in giving up the regularity of the polygon, and supposing it instead to be equilateral only. For the problem arising thus, apart from the case $n=3$ for which the theorem of Pompeiu applies, I do not know the solution but for the case $n=4$,

$$\sum_{h=1}^{4} \overline{A_h P} \geqslant 2 \max_{(i)} (\overline{A_i P})$$

and the constant 2 is exact. However, thi sinequality is triviality, for if $\overline{A_1 P} = \max_{(i)} (\overline{A_i P})$ e. g., then we have

$$\overline{A_1 P} + (\overline{A_2 P} + \overline{A_3 P}) + \overline{A_4 P} \geqslant \overline{A_1 P} + \overline{A_2 A_3} + \overline{A_4 P} =$$
$$\overline{A_1 P} + (\overline{A_1 A_4} + \overline{A_4 P}) \geqslant 2\,\overline{A_1 P}.$$

The proof shows that this inequality holds obviously in the hyperbolical plane too. An interesting task would be to continue the investigations of H. Meyer [18]) in this directions.

A problem analogous to that of Pompeiu arises for the regular tetrahedron ; however, it is easy to show by means of a counter-example that the inequality suggesting itself viz.

$$\overline{A_1 P} + \overline{A_2 P} + \overline{A_3 P} + \overline{A_4 P} \geqslant 3 \max_{(i)} (\overline{A_i P})$$

does not hold for every point P.

(Reçu le 15 Septembre 1947)

(Mathematical Department of the University of Szeged)

Bibliography and some remarks *)

1) D. Pompeiu - *Une identité entre nombres complexes et un théorème de géométrie élémentaire.* Bull. Math. Phys. Ecole polytechn. Bucarest 6, p. 6-7, (1936).

2) E. Abason - *Sur une propriété du triangle équilatéral.* Loc. cit. 7, p. 6-8, (1937).

3) H. Hilton - *Sur un théorème de M. Pompeiu.* Loc. cit 7, p. 5, (1937).

4) N. Obrechkoff - *Sur un théorème de M. Pompeiu.* Loc. cit. 7, p. 4-5, (1937).

5) G. Bratu - *Un théorème de M. Pompeiu.* Loc. cit. 7, p. 3, (1937).

6) D. Pompeiu - *La géométrie et les imaginaires : demnostration de quelques théorèmes élémentaires.* Loc. cit. 11, p. 29-34, (1940).

7) D. Pompeiu – *Un théorème de géométrie.* Acad. Roumaine, Bull. Sect. Sci. 24, p. 223-226, (1941).

8) T. Angheluță – *Une identité entre nombres complexes et un théorème de géométrie élémentaire.* Bull. sci. Ecole polytechn. Timișoara 10, p. 249-252, (1941).

9) S. Gheorghiu – *Sur un théorème de M. Pompeiu.* Mitt. techn. Hochschule Bukarest 12, p. 221-234 (1941).

10) D. Barbilian – *Eine Verallgemeinerung des Pompeiuschen Dreiecksatzes.* Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 39_1, p. 3-12, (1937).

11) N. G. Botea – *Une relation entre nombres complexes et la généralisation d'un théorème de géométrie élémentaire.* Bull. Math. Phys. Ecole polytechn. Bucarest 7, p. 13-14, (1937).

12) P. Montel – *Sur un problème de J. Bertrand.* Loc. cit. 9, p. 1-7, (1938).

13) C. Postelnicescu – *Sur un théorème de M. D. Pompeiu.* Loc. cit. 9, p. 38-39, (1938).

14) N. Racliș – *Théorème de fermeture.* Mitt. techn. Hochschule Bukarest, 12 p. 5-8, (1941).

15) We observe that we could get this inequality for a regular hexagon immediately by applying the inequality (1) twice.

16) By means of the method used in proving the lemma, we could verify the results of M. Botez (Rev. mat. Timișoara 21, p. 105-106' 1938-1940) and Tino (O. Tino – *Eine interessante Eigenschaft der regelmässigen Vielecke mit ungerader Seitenzahl.* Rev. mat. Timișoara 21, p. 101-107, 1941) concerning the sum of diagonales of a regular polygon and the sum $\sum_{k=1}^{2\nu+1} (-1)^k \overline{A_k P}$ respectively.

Mr. T. Gallai communicated to me a very simple proof, by the same method, of the theorem of Bertrand, loc. cit. 12),

17) For the case $n = 3$, this theorem has been proved already by G. Bratu – *Sur le trapèze rectangle,* Mathematica, Cluj 13, p. 265-269 (1937).

18) H. Meyer – *Eine Eigenschaft des gleichseitigen Dreiecks.* Mat. Tidsskr. A. Kobenhavn. 1940, p. 78-79.

*) N. R. Dans cet ordre d'idées, voir aussi les remarques essentielles faites par M. Ilie Popa, ce „Bulletin" II_1, 79-83 (1947) et par M. Tiberiu Popoviciu, *Bull. Math. Soc. Roum. des Sci.* 43, 1-2 (1941), 27-43.

513

ETUDE D'UNE INVOLUTION CYCLIQUE APPARTENANT À UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

par

LUCIEN GODEAUX

Dans une note récente [1]), nous avons indiqué la construction de surfaces algébriques contenant des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis de même espèce. Nous nous proposons, dans ce nouveau travail, d'utiliser cette construction dans un cas déterminé, de manière à montrer la portée exacte de nos développements.

1. Considérons, dans un espace linéaire $S_{\nu+4}$ à $\nu+4$ dimensions, une homographie H, de période $p=2\nu+1$, d'équations

$$\frac{x'_0}{x_0}=\frac{x'_1}{x_1}=\ldots=\frac{x'_{\nu+2}}{x'_{\nu+2}}=\frac{x'_{\nu+3}}{\varepsilon x_{\nu+3}}=\frac{x'_{\nu+4}}{\varepsilon^2 x_{\nu+4}},$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité. Nous supposerons, pour plus de simplicité, p premier.

Désignons par φ_i une forme algébrique de degré i et par ψ_p une forme algébrique de degré p, par rapport aux variables $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu+2}$ et considérons la surface algébrique F d'équations

$$(1)\quad \begin{cases} x_{\nu+3}\,x_{\nu+4}^{\nu}=\varphi_{\nu+1}\,,\ x_{\nu+3}^{3}\,x_{\nu+4}^{\nu-1}=\varphi_{\nu+2}\,,\ \ldots,\ x_{\nu}^{2i+1}\,x_{\nu+4}^{\nu-i}\varphi_{\nu+i+1}\,,\\ \ldots,\ x_{\nu+3}^{p}=\varphi_p\,,\ x_{\nu+4}^{p}=\psi_p\,. \end{cases}$$

La surface F est d'ordre np, où nous posons

$$n=(\nu+1)\,(\nu+2)\ldots(2\nu)\,p\,.$$

Elle est transformée en elle-même par l'homographie H et, sur cette surface, cette homographie engendre une involution I_p, d'ordre p.

---

1) *Sur la construction de modèles de surfaces algébriques contenant des involutions cycliques* (Bulletin de la Société des Sciences de Liége, 1948, sous presse). Voir aussi notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scient. et indust., Nr. 270. Paris, Hermann, 1935).

Appelons O_i le point dont toutes les coordonnées sont nulles saut x_i. L'homographie H possède trois axes ponctuels : l'espace $O_0 O_1 \ldots O_{\nu+2}$, à $\nu + 2$ dimensions, et les points $O_{\nu+3}$, $O_{\nu+4}$. La surface F ne passe pas par les points $O_{\nu+3}$, $O_{\nu+4}$, mais elle rencontre l'espace $O_0 O_1 \ldots O_{\nu+2}$ aux np points représentés par

$$\varphi_{\nu+1} = 0, \quad \varphi_{\nu+2} = 0, \ldots, \varphi_p = 0 \quad \psi_p = 0.$$

L'involution I_p possède donc np points unis isolés.

Pour obtenir une surface Φ, image de l'involution I_p, il suffit de projeter la surface F de la droite $O_{\nu+3} O_{\nu+4}$ sur l'espace

$$S_{\nu+2} = O_0 O_1 \ldots O_{\nu+2}.$$

On obtient ainsi la surface d'équations

$$\begin{vmatrix} \varphi_{\nu\ 1} & \varphi_{\nu+2} & \ldots & \varphi_{2\nu-1} & \varphi_{2\nu} & \psi_p \\ \varphi_{\nu+2} & \varphi_{\nu\ 3} & \ldots & \varphi_{2\nu} & \varphi_p & \varphi^2_{\nu+1} \end{vmatrix} = 0.$$

C'est une surface d'ordre n et les points de diramation occupent la même position que les points unis de I_p sur F.

2. Les np points unis de I_p sur F d'une part, et les np points de diramation de Φ d'autre part, sont évidemment de même nature, Pour étudier la structure de ces points, nous supposerons que l'un d'eux coïncide avec O_0. Il suffira de supposer que les hypersurfaces (1) passent simplement par ce point.

Nous indiquerons par α_i la forme linéaire en $x_1, x_2, \ldots, x_{\nu+2}$, coefficient de x_0^{i-1} dans φ_i et par β_p la forme linéaire coefficient de x_0^{p-1} dans ψ_p.

Le plan tangent à la surface F en O_0 coïncide avec le plan $O_0 O_{\nu+3} O_{\nu+4}$. Dans ce plan, l'homographie H détermine l'homographie

$$x'_0 : x'_{\nu+3} : x'_{\nu+4} = x_0 : \varepsilon x_{\nu+3} : \varepsilon^2 x_{\nu+4}$$

et par conséquent, le point infiniment voisin de O_0 sur la droite $O_0 O_{\nu+3}$ est uni parfait pour l'involution I_p. Il existe une suite de ν points infiniment voisins successifs de O_0, le premier étant sur la droite $O_0 O_{\nu+4}$, le dernier étant uni parfait et les autres unis non parfaits pour l'involution [1]).

Passons à l'examen du point de diramation O_0 sur la surface Φ. Le cône tangent en ce point à la surface a pour équations

1) L. Godeaux, *Sur les homographies planes cycliques* (Mémoires de la Société des Sciences de Liége, 1929) ; *Sur les surfaces représentant les involutions planes engendrées par des homographies planes cycliques* (Idem., 1930).

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{\nu+1} & \alpha_{\nu+2} & \dots & \alpha_{2\nu-1} & \alpha_{2\nu} & \beta_p \\ \alpha_{\nu+2} & \alpha_{\nu+3} & \dots & \alpha_{2\nu} & \alpha_p & 0 \end{matrix} \right\| = 0$$

Il se compose d'un cône d'ordre ν,

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{\nu+1} & \alpha_{\nu+2} & \dots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{\nu+2} & \alpha_{\nu+3} & \dots & \alpha_p \end{matrix} \right\| = 0, \quad \beta_p = 0$$

et d'un plan

$$\alpha_{\nu+2} = 0, \quad \alpha_{\nu+3} = 0, \dots, \quad \alpha_{2\nu} = 0, \quad \alpha_p = 0.$$

Ce cône et ce plan ont en commun la droite

$$\alpha_{\nu+2} = 0, \quad \alpha_{\nu+3} = 0, \dots, \quad \alpha_p = 0, \quad \beta_p = 0.$$

On voit donc que *la surface Φ, d'ordre n, possède np points de diramation qui sont des points multiples d'ordre $\nu + 1$; le cône tangent en chacun de ces points se compose d'un cône d'ordre ν et d'un plan, se rencontrant suivant une droite.*

3. Désignons par C les sections hyperplanes de la surface F. Le système linéaire $|C|$ comprend trois systèmes linéaires appartenant à l'involution I_p. L'un, que nous désignerons par $|C_0|$, est le transformé du système des sections hyperplanes $|\Gamma|$ de la surface Φ. Les deux autres sont formés de courbures isolées: la courbe $C_{\nu+3}$, découpée sur F par l'hyperplan $x_{\nu+3} = 0$ et la courbe $C_{\nu+4}$, découpée sur F par l'hyperplan $x_{\nu+4} = 0$.

Aux courbes $C_{\nu+3}$, $C_{\nu+4}$ correspondent sur Φ des courbes d'ordre n que nous désignerons par $\Gamma_{\nu+3}$, $\Gamma_{\nu+4}$. La courbe $\Gamma_{\nu+3}$ a pour équations

$$\varphi_{\nu+1} = 0, \quad \varphi_{\nu+2} = 0, \dots, \quad \varphi_{2\nu} = 0, \quad \varphi_p = 0$$

et la courbe $\Gamma_{\nu+4}$,

$$\varphi_{\nu+1} = 0, \quad \varphi_{\nu+2} = 0, \dots, \quad \varphi_{2\nu} = 0, \quad \psi_p = 0.$$

Si π est le genre des courbes Γ, les courbes C_0 et par conséquent les courbes C ont le genre $p(\pi - 1) + 1$. Les courbes $C_{\nu+3}$, $C_{\nu+4}$ passent par les np points unis de I_p, par conséquent les courbes $\Gamma_{\nu+3}$, $\Gamma_{\nu+4}$ ont le genre $\pi - n\nu$.

4. Considérons le système linéaire $|pC|$, découpé sur la surface F par les hypersurfaces d'ordre p de $S_{\nu+4}$. Ce système contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p et que nous

désignerons par $|(pC)_0|, |(pC)_1|, \ldots, |(pC)_{p-1}|$. Le système $|(pC)_i|$ est découpé par les hypersurfaces d'ordre p dont l'équation, lorsque l'on applique l'homographie H, se reproduit multipliée par ε^i.

Dans la formation de l'équation de chacun de ces systèmes d'hypersurfaces, nous devons tenir compte des équations de F. Il en résulte que le système $|(pC)_0|$ est découpé sur F par les hypersurfaces

$$\alpha_p(x_0, x_1, \ldots, x_{\nu+2}) = 0,$$

où α_p désigne une forme algébrique de degré p, à coefficients variables. Ce système a donc pour homologue, sur la surface Φ, le système $|p\Gamma|$.

Pour former l'équation des hypersurfaces découpant sur F le système $|(pC)_1|$, observons tout d'abord que nous rencontrerons, dans cette équation, les termes

$$x_{\nu+3}\,\alpha_{p-1}, \quad x_{\nu+4}^{\nu+1}\,\beta_\nu,$$

où α_{p-1}, β_ν sont des formes en $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu+2}$ de degrés respectifs $p-1$, ν.

Les autres termes sont de la forme

$$x_{\nu+3}^{2i+2}\, x_{\nu+4}^{\nu-i}\,\alpha_{\nu-i-1}, \quad (i = 0, 1, \ldots, \nu-1),$$

où $\alpha_{\nu-i-1}$ est une forme algébrique de degré $\nu-i-1$ en $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu+2}$. En tenant compte des équations de F, ces termes peuvent être remplacés par

$$x_{\nu+3}\quad \alpha_{\nu-i-1}\quad \varphi_{\nu+i+1}$$

et rentrent donc dans le terme $x_{\nu+3}\,\alpha_{p-1}$. Il en résulte que le système $|(pC)_1|$ est découpé sur F par les hypersurfaces

$$x_{\nu+3}\,\alpha_{p-1} + x_{\nu+4}^{\nu+1}\,\beta_\nu = 0,$$

où les coefficients des formes α_{p-1}, β_ν sont supposés variables.

Le même raisonnement peut être appliqué à la recherche des équations des hypersurfaces découpant, sur F, les systèmes $|(pC)_2|$, $|(pC)_3|, \ldots, |(pC)_{p-1}|$. On trouvera ainsi que le système $|(pC)_{2k+1}|$ est découpé sur F par les hypersurfaces

$$x_{\nu+3}^{2k+1}\,\alpha_{p-2k-1} + x_{\nu+4}^{\nu+k+1}\,\beta_{\nu-k} = 0$$

et le système $|(pC)_{2k}|$ par les hypersurfaces

$$x_{\nu+3}^{2k}\,\alpha_{p-2k} + x_{\nu+4}^{k}\,\beta_{p-k} = 0,$$

où α_i, β_i sont des formes de degré i en $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu+2}$, à coeffi-

cients variables. L'entier k prend les valeurs $0, 1, \ldots, \nu - 1$ dans la première équation et les valeurs $1, 2, \ldots, \nu$ dans la seconde.

Aux systèmes $|(pC)_1|, |(pC)_2|, \ldots, |(pC)_{p-1}|$ correspondent sur Φ, des systèmes linéaires complets $|(p\Gamma)_1|, |(p\Gamma)_2|, \ldots, |(p\Gamma)_{p-1}|$, de courbes d'ordre pn.

Les courbes $(p\Gamma)_{2k+1}$ sont découpées sur Φ par les hypersurfaces

$$\varphi_{\nu+2}^{k}\ \alpha_{p-2k-1} + \varphi_{\nu+1}^{k-1}\ \psi_p\ \beta_{\nu-k} = 0$$

et les courbes $(p\Gamma)_{2k}$ par les hypersurfaces

$$\varphi_{\nu+2}^{k}\ \alpha_{p-2k} + \varphi_{\nu+1}^{k}\ \beta_{p-k} = 0,$$

mais en dehors de parties fixes.

5. Nous allons obtenir d'une autre manière les équations des courbes $(p\Gamma)_1, (p\Gamma)_2, \ldots, (p\Gamma)_{p-1}$ et en même temps, en démontrer une propriété intéressante, que nous avons déjà établie par une tout autre voie dans le cas général [1]). Pour plus de simplicité, nous raisonnerons sur le système $|(p\Gamma)_1|$, mais nos développements s'étendent, sans autre difficulté qu'un changement de notation, aux autres systèmes.

Les courbes $(pC)_1$ sont découpées sur F par les hypersurfaces

$$x_{\nu+3}\ \alpha_{p-1} + x_{\nu+4}^{\nu+1}\ \beta_\nu = 0.$$

En élevant les deux membres de cette équation à la puissance p et en tenant compte des équations de F, on en déduit

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{\nu} \binom{p}{2i}\ \varphi_{2\nu-i+1}\ \psi_p^i\ \alpha_{p-1}^{p-2i}\ \beta_\nu^{2i} + \\ \displaystyle + \varphi_{\nu+1} \sum_{i=0}^{\nu} \binom{p}{2i+1}\ \varphi_{2\nu-i}\ \psi_p^i\ \alpha_{p-1}^{p-2i-1}\ \beta_\nu^{2i+1} = 0. \end{cases}$$

On convient de poser, dans cette équation, $\varphi_{\nu+1}\,\varphi_\nu = \psi_p$.

Dans l'espace $S_{\nu+2}$, cette équation représente une hypersurface d'ordre p^2 découpant sur Φ une courbe $(p\Gamma)_1$. Nous allons montrer que l'hypersurface (2) a précisément, le long de la courbe $(p\Gamma)_1$ qu'elle contient, un contact d'ordre $p-1$ avec Φ.

Dans α_{p-1}, β_ν, les coefficients sont supposés variables. Fixons ces coefficients sauf l'un d'eux, par exemple un des coefficients de α_{p-1} et cherchons l'enveloppe de l'hypersurface (2) lorsque ce coefficient varie.

En dérivant l'équation (2) par rapport à ce coefficient, on trouve

1) *Les involutions* . . . (loc cit).

$$(3)\qquad \sum_{i=0}^{\nu}\binom{p-1}{2i}\varphi_{2\nu\ i+1}\,\psi_p^i\,\alpha_{p-1}^{p-2i-1}\,\beta_\nu^{2i}+\varphi_{\nu+1}\sum_{i=0}^{\nu-1}\binom{p-1}{2i+1}\varphi_{2\nu-i}\,\psi_p^i\,\alpha_{p-1}^{p-2i-2}\,\beta_\nu^{2i+1}=0.$$

L'équation de l'enveloppe des hypersurfaces (2) s'obtiendra en éliminant le paramètre variable entre les équations (2) et (3), c'est-à-dire en éliminant α_{p-1} entre ces équations.

La dérivée d'ordre k du premier membre de l'équation (2) s'écrit, après suppression de facteurs indépendants du paramètre variable

$$(4)\qquad \begin{cases} \sum_{i=0}^{\nu}\binom{p-k}{2i}\varphi_{2\nu-i+1}\,\psi_p^i\,\alpha_{p-1}^{p-2i-k}\,\beta_\nu^{2i}+ \\ +\varphi_{\nu+1}\sum_{i=0}^{\nu}\binom{p-k}{2i+1}\varphi_{2\nu-i}\,\psi_p^i\,\alpha_{p-1}^{p-2i-1-k}\,\beta_\nu^{2i+1}, \end{cases}$$

les sommations s'étendant jusqu'aux premiers termes nuls.

En particulier, la dérivée d'ordre $p-1$ s'écrit

$$\varphi_p\,\alpha_{p-1}+\varphi_{\nu+1}\,\varphi_{2\nu}\,\beta_\nu .$$

Posons, dans (4),

$$\alpha_{p-1}=-\frac{\varphi_{\nu-1}\,\varphi_{2\nu}}{\varphi_p}\,\beta_\nu .$$

En utilisant les équations de la surface et précisément les relations

$$\varphi_p\,\psi_p=\varphi_{\nu+1}^2\,\varphi_{2\nu},$$

$$\varphi_{2\nu-i+1}\,\varphi_p^{i-1}=\varphi_{2\nu}^{\,i},\quad \varphi_{2\nu-i}\,\varphi_p^i=\varphi_{2\nu}^{i+1},$$

on trouve facilement que la quantité (4) est identiquement nulle. De même, dans les mêmes conditions, les relations (2) et (3) se réduisent à des identités. On en conclut qu'en un point caractéristique de l'hypersurface (2), appartenant à la surface Φ, cette hypersurface a un contact d'ordre $p-1$ avec la surface.

Observons que les courbes $(p\Gamma)_1$ passent par les points de diramation de la surface Φ.

Le raisonnement peut être repris pour les courbes $(p\Gamma)_2,\ldots,(p\Gamma)_{p-1}$ et on voit que : *Il existe sur la surface Φ, $p-1$ systèmes linéaires de courbes d'ordre pn, passant par tous les points de diramation ; le long de chaque courbe de ces systèmes, il y a une hypersurface d'ordre p^2 ayant un contact d'ordre $p-1$ avec la surface.*

(Académie des Sciences de Belgique et l'Université de Liége)

(Reçu le 20 avril 1948)

DIFFERENTIATION UND INTEGRATION BESTIMMTER INTEGRALE NACH EINEM PARAMETER

von

LOTHAR HEFFTER

Nicht nur der Mathematiker, sondern vornehmlich auch der Physiker steht oft vor der Frage, ob ein Integral

$$\int_a^b f(x, y)\, dx,$$

wo x und y reelle Variable, a und b reelle, endliche oder unendlich grosse Zahlen sind, nach dem Parameter y differenziert oder integriert werden darf, indem diese Operation *unter dem Integralzeichen* ausgeführt wird, m. a. W., ob die *Reichenfolge* von Differentiation und Integration, bzw der beiden Integrationen *vertauschbar* ist. Gerade der Physiker wird deshalb vielleicht dankbar sein, wenn für jede der beiden Fragen eine Gruppe wenigstens *hinreichender Bedingungen* gegeben wird, die in den meisten Fällen die Entscheidung liefern und dabei leicht auf ihr Bestehen nachzuprüfen sind. Einige Beispiele werden das bestätigen [1]).

1. Differentiation nach dem Parameter.

Die Funktion $f(x,y)$ habe folgende vier Eigenschaften:

a) $f(x,y)$ und $\int_a^b f(x,y)\, dx$

existieren mit eindeutig bestimmten, endlichen Werten für alle x im Intervall (a, b) und alle y im Intervall (α, β), d. h. für

$$a < x < b\,;\ \alpha < y < \beta,$$

1) O. Haupt und G. Aumann, *Differential- und Integralrechnung* III (1938) S. 118-119 geben für Lebesguesche Integrale hinreichende Bedingungen für die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration nach einem Parameter.

wo a, b; α, β endliche oder unendlich grosse konstante Zahlen sind. Das Integral definiert also im Intervall (α, β) eine Funktion von y

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\, dx. \tag{1}$$

b) In denselben Intervallen (a, b) und (α, β) existieren mit endlichen bestimmten Werten auch

$$f_2(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad \text{und} \quad \int_a^b f_2(x,y)\, dx.$$

c) Ebenso

$$f_{22}(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \quad \text{und} \quad \int_a^b f_{22}(x,y)\, dx.$$

d) Um den Wert y, für den man $F'(y)$ bilden soll, lässt sich ein Intervall (α_0, β_0) ganz innerhalb (α, β) so abgrenzen, dass für alle y aus (α_0, β_0), d. h. für die $\alpha_0 \leqq y \leqq \beta_0$, der absolute Betrag

$$\left| \int_a^b f_{22}(x,y)\, dx \right| \leqq g,$$

wo g eine feste positive endliche Zahl ist.

Liegen nun y und $y+h$ beide im Intervall (α_0, β_0), so darf in der Identität

$$F(y+h) - F(y) = \int_a^b [f(x, y+h) - f(x,y)]\, dx \tag{2}$$

nach den Voraussetzungen a), b), c) der Taylorsche Satz angewendet werden:

$$F(y+h) - F(y) = h \int_a^b f_2(x,y)\, dx + \frac{h^2}{2} \int_a^b f_{22}(x, y+\delta h)\, dx, \tag{3}$$

wo $0 < \delta < 1$, beide Integrale existieren und nach d)

$$|f_{22}(x, y+\delta h)| \leqq g \tag{4}$$

ist. Also ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(y+h) - F(y)}{h} = \frac{dF(y)}{dy} = \int_a^b f_2(x,y)\, dx \tag{5}$$

oder

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x,y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\, dx. \tag{6}$$

Die vier Bedingungen a), b), c), d), *die wir zusammen mit A bezeichnen, sind also hinreichend für die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration.*

Beispiele:

1. Für $y > 0$ ist das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-yx}\,dx = \left[-\frac{1}{y}e^{-yx}\right]_0^\infty = \frac{1}{y}, \tag{7}$$

existiert also ebenso wie e^{-yx} mit endlichem bestimmtem Wert. Ebenso existeren die durch beliebig oft wiederholte Differentiation nach y unter dem Integralzeichen entstehenden Integranden und ihre Integrale

$$\int_0^\infty -xe^{-yx}\,dx,\ \int_0^\infty x^2 e^{-yx}\,dx, \ldots, \tag{8}$$

weil für positives ganzzahliges n $(= 0, 1, 2, \ldots)$ und $y > 0$

$$\lim_{h \to \infty} x.x^n e^{-yx} = 0. \tag{9}$$

Endlich ist für $y \geq \alpha_0$, wo α_0 eine beliebige positive Zahl, und $\beta_0 > \alpha_0$ beliebig gross gewählt werden kann,

$$\left| \int_0^\infty x^n e^{-yx}\,dx \right| \leq g \equiv \int_0^\infty x^n e^{-\alpha_0 x}\,dx\,. \tag{10}$$

Alle Bedingungen A sind erfüllt. Man darf also Gleichung (7) links beliebig oft unter dem Integralzeichen differenzieren und erhält so die Integralwerte

$$\int_0^\infty x^n e^{-yx}\,dx = \frac{n!}{y^{n+1}} \quad (y > 0;\ n = 1, 2, \ldots). \tag{11}$$

2. Das Integral

$$F(y) \equiv \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx \tag{12}$$

existiert, wie leicht festzustellen ist, für jeden Wert von y. Aber die Differentiation unter dem Integralzeichen liefert das *nicht* existierende Integral

$$\int_0^\infty \cos yx\,dx. \tag{13}$$

Schon die für die Differenzierbarkeit von (12) unter dem Integralzeichen sicher *notwendige* Bedingung b) ist also nicht erfüllt.

Um aber festzustellen, ob ein Differentialquotient $F'(y)$ überhaupt existiert und welchen Wert er eventuell hat; kann man zunächst den Wert von $F(y)$ in anderer Form als (12) ermitteln. Setzt man

$$yx = z, \tag{14}$$

so folgt

(15) $$\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz = \pm\frac{\pi}{2}, \quad \text{je nachdem } y \gtrless 0.$$

Für $y = 0$ hat aber das Integral (12) den Wert 0, und man erkennt in ihm den sog. „*Diskontinuitätsfaktor*“:

(16) $$F(y) \equiv \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\,dx = -\frac{\pi}{2}, 0, +\frac{\pi}{2}, \text{ je nachdem } y <, =, > 0.$$

Also ist $F'(y) = 0$ für jedes negative und positive y, während für $y = 0$ der *vorwärts* genommene Differentialquotient $= +\infty$, der *rückwärts* genommene $= -\infty$ ist.

II. Integration nach dem Parameter.

(1) $$F(y) \equiv \int_a^b f(x,y)\,dx$$

sei nach y in dem Intervall (α, β) also auch in jedem Teilintervall desselben integrierbar, d. h.

(2) $$\int_\beta^\alpha F(y)\,dy \equiv \int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

habe einen bestimmten Wert. Die Frage ist aber, ob

(3) $$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dy?$$

Dazu ersetze man β – man könnte ebenso gut α wählen – zunächst durch einen beliebigen Wert y aus (α,β) und betrachte statt (2)

(4) $$\int_\alpha^y F(y)\,dy \equiv \int_\alpha^y dy \int_a^b f(x,y)\,dx,$$

woraus durch *Differentiation nach y* Gleichung (1) folgt.

Andererseits betrachte man

(5) $$\int_a^b dx \int_\alpha^y f(x,y)\,dy = \int_a^b \varphi(x,y)\,dx,$$

wenn zur Abkürzung

(6) $$\varphi(x,y) \equiv \int_\alpha^y f(x,y)\,dy$$

gesetzt wird. Dann darf das Integral in (5) rechts nach y unter dem Integralzeichen differenziert werden, wenn $\varphi(x,y)$ die Bedingugen A erfüllt, d. h. wenn

a) $\int_\alpha^\gamma f(x, y)\, dy$ und $\int_a^b dx \int_\alpha^\gamma f(x, y)\, dy$,

b) $f(x, y)$ und $\int_a^b f(x, y)\, dx$,

c) $f_2(x,y)$ und $\int_a^b f_2(x, y)\, dx$

für alle y in (α, β) mit endlichem bestimmtem Wert existieren und

d) $\left| \int_a^b f_2(x, y)\, dx \right| \leqq g$

für alle y in einem Intervall (α_0, β_0), das ganz innerhalb (α, β) liegt. Diese Differentiation von (5) ergibt dann

$$(7) \quad \frac{d}{dy} \int_a^b dx \int_\alpha^\gamma f(x, y)\, dy = \int_a^b \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} dx = \int_a^b f(x, y)\, dx.$$

Die Differentiation des andern in (3) auftretenden Integrals nach y ergibt aber denselben Wert

$$\int_a^b f(x, y)\, dx$$

wie die des zuerst differenzierten. Die beiden zweifachen Integrale in (3) haben also als Funktionen von y denselben Differentialquotienten und unterscheiden sich daher nur durch eine von y unabhängige additive Zahl, die aber $= 0$ sein muss, da für $y = \alpha$ die beiden zweifachen Integrale $= 0$ sind.

Da nun mit $\int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy$ auch $\int_\alpha^\gamma f(x, y)\, dy$ für jedes y in (α, β) existiert, können die vorstehenden vier Bedingungen, indem zugleich ihre Reihenfolge etwas geändert wird, als *Bedingungen* B folgendermassen gefasst werden:

e) $f(x, y)$ und $\int_a^b f(x, y)\, dx$ existieren und zwar f für jedes x in (a, b), y in (α, β), das Integral für jedes y in (α, β).

f) $\int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy$ und $\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x, y)\, dy$ existieren, das erstere für jedes x in (a, b).

g) $f_2(x, y)$ und $\int_a^b f_2(x, y)\, dx$ existieren, und zwar f_2 für jedes x in (a, b), y in (α, β), das Integral für jedes y in (α, β).

h) $\left| \int_a^b f_2(x, y)\, dx \right| \leqq g$ für alle y in (α_0, β_0), das einen Teil von (α, β) bildet.

Die Bedingunden B sind – ihrer Ableitung zufolge – *hinreichend für die Bejahung von Gleichung* (3):

(8) $$\int_\alpha^\beta dy \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\ .$$

Da man endlich bei der ganzen Entwicklung in II. die Rollen, die x und y gespielt haben, miteinander vertauschen kann, so erhält man aus und statt B eine zweite *Gruppe hinreichender Bedingungen* B', wenn man in B x und y (ausser in $f(x,y)$ und $f_2(x,y)$), (a,b) mit (α,β) und die Differentiationsindizes *1, 2* mit *2, 1* vertauscht.

Beispiele :

1. Das Integral

(9) $$J \equiv \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

existiert bekanntlich mit endlichem bestimmtem Wert. Setzt man $x = yt$ wobei $y > 0$, so folgt

(10) $$J = \int_0^\infty e^{y^2t^2}\,y\,dt\ ,$$

ein Integral, das natürlich nur scheinbar von y abhängt. Durh Multiplikation mit e^{-y^2} ergibt sich

(11) $$J e^{-y^2} = e^{-y^2} \int_0^\infty e^{-y^2 t^2}\ y dt = \int_0^\infty e^{-y^2(t^2+1)}\ y\,dt.$$

Dies kann über y von 0 bis ∞ integriert werden, weil links J eine Konstante ist, $\int_b^\infty e^{-y^2}\,dy$ existiert und wiederum $= J$ ist. So folgt

(12) $$J^2 = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-y^2(t^2+1)}\,y\,dt.$$

Hierin dürfen nun die beiden Integrationen miteinander vertauscht werden. Denn die Bedingungen B, wobei an Stelle von x, y hier y, t getreten sind, sind erfüllt, wie nachstehend im einzelnen gezeigt wird :

e) $f(y,t) = e^{-y^2(t^2+1)}\,y$ existiert für jedes $y > 0$, d. h. für t und y im Intervall $(0,\infty)$. Ebenso das Integral

$$\int_0^\infty e^{-y^2(t^2+1)} y\,dy \text{ für } t \text{ in } (0,\infty).$$

η) $\int_0^\infty e^{-y^2(t^2+1)}\ ydt = J e^{-y^2}$ existiert nach (10) für jedes $y > 0$, un, ebenso $\int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-y^2(t^2+1)}\,y\,dt = J^2$ nach (12).

g) $\dfrac{\partial f}{\partial t} = -2y^3\,t\,e^{-y^2(t^2+1)}$ existiert für jedes y und t in $(0,\infty)$ und $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t}\,dy = -2t \int_0^\infty y^3\ e^{-y^2(t^2+1)}\,dy$ für jedes t in $(0,\infty)$.

h) Sind endlich $\alpha_0 < \beta_0$ zwei beliebige positive Zahlen, so ist für jedes t in (α_0, β_0), d. h. für $0 < \alpha_0 \leqq t \leqq \beta_0$

$$\left| \int_0^\infty -2y^3\ t\,e^{-y^2(t^2+1)}\ dy \right| \leqq g \equiv \int_0^\infty 2y^3\ \beta_0\ e^{-y^2(\alpha_0^2+1)} dy$$

Vertauscht man also in (12) die Integrationen, so ist

$$J^2 = \int_0^\infty dt \int_0^\infty e^{-y^2(t^2+1)}\, y\, dy = \int_0^\infty dt \left[-\frac{e^{-y^2(t^2+1)}}{2(t^2+1)} \right]_0^\infty = \tag{13}$$

$$= \int_0^\infty \frac{dt}{2(t^2+1)} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{arc\,tg}\, t \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4};$$

also

$$J = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{14}$$

2. Es sei $a = \alpha = 0$, $b = \beta = 1$ und

$$f(x, y) \equiv \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}. \tag{15}$$

Dann ist

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx = \int_0^1 dy \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right]_0^1 = \tag{16}$$

$$= \int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} = \left[\operatorname{arctg}\, y \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Aber bei Vertauschung der beiden Integrationen ändert sich das Vorzeichen.

Also ist

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dy = -\frac{\pi}{4}. \tag{17}$$

Die Vertauschung ist also *nicht* erlaubt. Auch ist schon die Bedingung *nicht erfüllt*; den das Integral

$$\int_0^1 f(x, \alpha)\, dx \equiv \int_0^1 f(x, 0)\, dx = -\int_0^1 \frac{dx}{x^2} \quad \textit{existiert nicht.} \tag{18}$$

Naturwissenschaftlich-Math. Fakultät der Universität Freiburg i. B.

(Reçu la 27 Janvier 1948)

TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES DES SURFACES CONSERVANT LES AIRES

par

ILIE POPA

1. Etant donnés une surface Σ ayant une équation vectorielle

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v)$$

et un vecteur

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(u, v)$$

dont le carré peut être négligé, on dit que la surface Σ_1 ayant l'équati o

$$\bar{r}_1 = \bar{r} + \bar{\varepsilon}$$

est une transformée infinitésimale par rapport à la famille des vecteurs $\bar{\varepsilon}$ de Σ.

On a considéré [1]), depuis longtemps, les *déformations* infinitésimales c'est à dire les transformations infinitésimales pour lesquelles on a, dans les points correspondants et en toute direction, $ds = ds_1$. Les transformations infinitésimales de la manière indiquée plus haut ont été considérées par M. Wheatherburn [2]). Dans la note présente, nous utilisons les notions et les notations de M. Wheatherburn.

2. En écrivant $\bar{\varepsilon} = \eta \bar{\varrho}(u, v)$ où η est une constante à carré négligeable, on aura $d\bar{\varepsilon} = \eta\, d\bar{\varrho}$ et, par suite

$$d\bar{r}_1 = d\bar{r} + d\bar{\varepsilon}$$

nous donnera

$$ds_1^2 = ds^2 + 2\, d\bar{r}\, d\bar{\varepsilon}$$

d'où il s'en suit

$$E_1 = E + 2\bar{r}_u \bar{\varepsilon}_u, \quad F_1 = F + \bar{r}_u \bar{\varepsilon}_v + \bar{r}_v \bar{\varepsilon}_u, \quad G_1 = G + 2\bar{r}_v \bar{\varepsilon}_v$$

$$H_1^2 = E_1 G_1 - F_1^2 = H^2 (1 + 2 \operatorname{div} \bar{\varepsilon})$$

$$H_1 = H(1 + \operatorname{div} \bar{\varepsilon})$$

ou, conformément aux notations de M. Wheatherburn,

$$H^2 \operatorname{div} \bar{\varepsilon} = G \bar{r}_u \bar{\varepsilon}_u - F(\bar{r}_u \bar{\varepsilon}_v + \bar{r}_v \bar{\varepsilon}_u) + E \bar{r}_v \bar{\varepsilon}_v .$$

Il s'en suit que la condition nécessaire et suffisante afin que la transformation infinitésimale conserve les aires élémentaires est $\operatorname{div} \bar{\varepsilon} = 0$. Dans le cas des déformations infinitésimales, on a évidemment $\operatorname{div} \bar{\varepsilon} = 0$ ce qui nous montre que les déformations infinitésimales conservent aussi les aires élémentaires. Dans le cas général, $d\bar{r}\, d\bar{\varepsilon} \not\equiv 0$ mais il existe un réseau sur Σ, donné par $d\bar{r}\, d\bar{\varepsilon} = 0$, tel que les arcs élémentaires de ses lignes se conservent dans la transformation envisagée : C'est le réseau des lignes inextensionelles correspondant à la famille $\bar{\varepsilon}$.

En supposant ce réseau non dégénéré, soit θ l'angle de ses lignes. On aura

$$\operatorname{div} \bar{\varepsilon} = \frac{\delta}{H} \operatorname{cotg} \theta$$

où

$$\delta^2 = (\bar{r}_u \bar{\varepsilon}_v + \bar{r}_v \bar{\varepsilon}_u)^2 - 4 (\bar{r}_v \bar{\varepsilon}_u)(\bar{r}_u \bar{\varepsilon}_v) \not\equiv 0$$

ce qui nous montre que, si les lignes inextensionnelles sont distinctes, la condition nécessaire et suffisante afin que la transformation considérée conserve les aires infinitésimales est que les lignes inextensionnelles forment un réseau orthogonal. C'est, d'ailleurs, un cas particulier d'un résultat plus général de M. Wheatherburn.

3. Dans ce qui suit, nous nous proposons de déterminer $\bar{\varepsilon}$ de manière que la transformation infinitésimale conserve les aires, c'est à dire résoudre l'équation

$$\operatorname{div} \bar{\varepsilon} = 0.$$

A cet effet, soient λ, μ, ν les composantes de $\bar{\varepsilon}$ par rapport au trièdre $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{N}$ ($\bar{N}$ le vecteur unitaire de la normale à la surface Σ), c'est à dire

$$\bar{\varepsilon} = \lambda \bar{r}_u + \mu \bar{r}_v + \nu \bar{N}.$$

Par un calcul inutil à reproduire ici, on trouve

$$\operatorname{div} \bar{\varepsilon} = \frac{1}{H} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (H\lambda) + \frac{\partial}{\partial v} (H\mu) \right\} - \nu \mathscr{H},$$

où $\mathscr{H}$ représente la courbure moyenne de Σ.

On aura donc les deux cas :

a. $\mathscr{H} \not\equiv 0$ et alors λ et μ étant arbitraires, ν sera déterminé par

$$\nu = \frac{1}{H\mathscr{H}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(H\lambda)+\frac{\partial}{\partial v}(H\mu)\right\}.$$

b. $\mathscr{H} = 0$ et alors ν est arbitraire pendant que λ et μ sont liés par

$$\frac{\partial}{\partial u}(H\lambda)+\frac{\partial}{\partial v}(H\mu) = 0$$

donc

$$H\lambda = \frac{\partial \omega}{\partial v},\quad H\mu = -\frac{\partial \omega}{\partial u},$$

$\omega\ (u, v)$ étant une fonction arbitraire.

Donc, dans les deux cas, $\bar{\varepsilon}$ dépend de deux fonctions arbitraires de u et v. Une simple inspection des résultats trouvés, nous permet d'affirmer: Etant donnée une congruence arbitraire, il existe une multiplicité de surfaces Σ_1 — dépendant d'une function arbitraire d'un argument — telle que la correspondance entre Σ et Σ_1 conserve les aires élémentaires.

En effet, soient $a\ (u, v)$, $b\ (u, v)$, $c\ (u, v)$ les paramètres directeurs — par rapport au repère $\bar{r}_u, \bar{r}_v, \bar{N}$ — d'une génératrice de la congruence envisagée; nous aurons, relativement aux cas distingués plus haut:

Si la surface Σ n'est pas minima, on devra satisfaire

$$\frac{H\lambda}{a} = \frac{H\mu}{b} = \frac{\dfrac{\partial}{\partial u}(H\lambda)+\dfrac{\partial}{\partial v}(H\mu)}{c}\ (=\sigma),$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(a\sigma)+\frac{\partial}{\partial v}(b\sigma) = c\sigma$$

qui détermine σ jusqu'à une fonction arbitraire d'un argument. Si la surface de partence Σ est minima, on aura

$$\frac{\dfrac{\partial \omega}{\partial u}}{a} = \frac{-\dfrac{\partial \omega}{\partial v}}{b} = \frac{\nu}{c}\ (=\tau)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(Ha\tau)+\frac{\partial}{\partial v}(Hb\tau) = 0$$

qui détermine τ jusqu'à une fonction arbitraire d'un argument.

Remarque. Le cas des surfaces minima est particulièrement intéressant. On a, dans ce cas: La composante tangentielle du vecteur $\bar{\varepsilon}$ a pour grandeur $\Delta_1\omega$ (le premier paramètre différentiel de Beltra-

mi. $\overline{N}\ \overline{\text{rot}}\ \overline{\varepsilon}$ qui, d'après un résultat de M. Wheatherburn, représente le double de la rotation normale de l'élément d'aire de Σ, est égal à $\Delta_2\omega$ (le second paramètre différentiel de Beltrami). Enfin, on a

$$[\bar{\varepsilon}, d\bar{r}] + \overline{N}\, d\omega = \nu\,[\overline{N}, d\bar{r}]$$

qui nous donne quelque chose de plus que le théorème de la divergence.

Séminaire Mathématique
de l'Université de Jassy

(Reçu le 28 Décembre 1947)

Travaux cités

1) Bianchi, L. – *Lezioni di Geometria differenziale* II_1, Cap. XVII.
2) Wheatherburn, C. E. – *On differential invariants in Geometry of surfaces*, „Quart. Journ. of Math." L, 1927.
„ – *On small deformations of surfaces and of thin elastic shells*, Ibidem.
„ – *On small deformations of surfaces*, „Messenger of Math." LVII, 1927.

SUR LES TRANSFORMATIONS INFINITÉSIMALES QUI CONSERVENT LES DIRECTIONS DES NORMALES

par

LUCREȚIA CONSTANTINESCU (M-me)

Considérons une surface Σ et sa transformée infinitésimale [1]) Σ_1. Soient M et M_1, les points correspondants des deux surfaces. Nous nous proposons d'étudier quelques propriétés de la transformation infinitésimale qui conserve les directions des normales, dans les points correspondants M et M_1. L'étude de ce problème m'a été proposée par Mr. I. P o p a.

Dans cette note, nous allons étudier deux cas de la transformation infinitésimale ci-dessus :

I. La transformation qui conserve l'égalité des éléments des arcs en toute direction sur les lignes correspondantes aux deux surfaces Σ et Σ_1. Dans ce cas, les deux surfaces sont des surfaces minima.

II. La transformation où nous avons sur la surface Σ un réseau tel que les éléments des arcs soient égaux aux éléments des arcs du réseau correspondant de la surface Σ_1. Nous étudions quelques cas particuliers, où ce réseau coïncide avec des réseaux remarquables de la surface.

I.

1. Soit la surface Σ_1 donnée par l'équation vectorielle :

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v), \tag{1}$$

et un vecteur $\bar{\varepsilon} = \eta \bar{\varrho}(u, v)$, où η est une constante, dont le carré est négligeable.

La surface Σ_1 définie par l'équation :

$$\bar{r}_1 = \bar{r}(u, v) + \bar{\varepsilon}(u, v) \tag{2}$$

est la transformée infinitésimale de la surface Σ, par rapport au vecteur $\bar{\varepsilon}$.

Soient $\overline{N}$ et $\overline{N_1}$, les vecteurs qui nous donnent les directions des normales des deux surfaces Σ et Σ_1. En imposant la condition : $\overline{N} = \overline{N_1}$, nous aurons :

$$\overline{N}\,d\overline{r} = 0; \quad \overline{N}\,d\overline{r_1} = \overline{N}(d\overline{r} + d\overline{\varepsilon}), \tag{3}$$

d'où on déduit :

$$\overline{N}\,d\overline{\varepsilon} = 0. \tag{4}$$

Nous imposons en même temps, la condition de la conservation des éléments des arcs, sur les lignes correspondantes aux deux surfaces, en toute direction, et nous avons :

$$d\overline{r_1}^2 = d\overline{r}^2 + 2\,d\overline{r}\,d\overline{\varepsilon} + d\overline{\varepsilon}^2.$$

Pour avoir : $ds_1^2 = ds^2$, il faut satisfaire à la condition :

$$d\overline{r}\,.\,d\overline{\varepsilon} = 0, \tag{5}$$

le terme $d\overline{\varepsilon}^2$, étant négligeable.

Dans notre correspondance, nous avons à satisfaire simultanément aux deux relations : (4) et (5). D'ici, on déduit :

$$d\overline{\varepsilon} = \alpha(u, v)\,[\overline{N}, d\overline{r}], \tag{6}$$

ou :

$$\varepsilon_u = \alpha(u, v)\,[\overline{N}, \overline{r_u}]; \quad \overline{\varepsilon_v} = \alpha(u, v)\,[\overline{N}, \overline{r_v}].$$

La condition d'intégrabilité, sera :

$$\alpha_v[\overline{N}, \overline{r_u}] + \alpha\{[\overline{N_v}\,\overline{r_u}] + [\overline{N}, \overline{r_{uv}}]\} = \alpha_u[\overline{N}, \overline{r_v}] + \alpha\{[\overline{N_u}\,\overline{r_v}] + [\overline{N}, \overline{r_{uv}}]\}.$$

ou

$$\alpha_v[\overline{N}, \overline{r_u}] - \alpha_u[\overline{N}, \overline{r_v}] + \alpha\{[\overline{N_v}\,\overline{r_u}] + [\overline{N_u}, \overline{r_v}]\} = 0, \tag{7}$$

où $\overline{N_u}$ et $\overline{N_v}$, d'après les formules de Weingarten, ont la forme :

$$\overline{N_u} = a\,\overline{r_u} + b\,\overline{r_v}; \quad \overline{N_v} = c\,\overline{r_u} + d\,\overline{r_v}. \tag{8}$$

2. Pour déterminer la surface Σ nous projetons la relation (7) sur la direction de la normale $\overline{N}$, et nous avons :

$$a + d = 0 \tag{9}$$

c'est-à-dire, que, la courbure moyenne de la surface Σ est nulle.

Donc, la surface Σ est une surface *minima*.

Pour étudier sa transformée infinitésimale, nous pouvons considérer la surface Σ, comme provenant de la transformation infinitésimale de la surface Σ_1, par rapport au vecteur $-\overline{\varepsilon}$. Les mêmes calculs nous conduiront à constater que la surface Σ_1 est aussi une surface *minima*.

Donc, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une déformation infinitésimale, qui conserve les directions des normales, est que la surface Σ soit une surface minima, sa déformée infinitésimale, étant de même une surface minima.

E. B. Christoffel [2]) a démontré que deux surfaces minima se correspondent dans une représentation conforme, par des normales parallèles.

Pour déterminer le vecteur $\bar{\varepsilon}$, nous projetons la relation (7) sur la direction du vecteur $\bar{r}_u$, et puis, sur la direction du vecteur $\bar{r}_v$, et nous aurons :

$$\alpha_u = \alpha_v = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \text{constante}.$$

Cette constante, nous pouvons la considérer égale à η. En remplaçant α dans la formule (6), nous avons :

$$d\bar{\varepsilon} = \eta\,[\bar{N}, d\bar{r}], \tag{10}$$

d'où

$$\bar{\varepsilon} = \eta \int [\bar{N}, d\bar{r}].$$

3. Considérons maintenant une surface S, décrite par l'extrémité d'un vecteur $\bar{\varepsilon}_1$ collinéaire avec le vecteur $\bar{\varepsilon}$, ayant son origine en un point fixe dans l'espace. Entre les surfaces S et Σ, étant établie une correspondance qui conserve les normales dans les points correspondants et la longueur des éléments des arcs sur les lignes correspondantes aux deux surfaces en toute direction, nous nous proposons d'étudier la surface S en ce cas.

Soit la surface S, définie par l'équation :

$$\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_1(u, v) \quad \text{ou} \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\eta}\bar{\varepsilon}(u, v) \tag{11}$$

où le vecteur $\bar{\varepsilon}_1$, est un vecteur collinéaire avec le vecteur $\bar{\varepsilon}$. La surface S, est une quasi-sphère, notion qui a été introduite par Steiner.

De la formule (11) on déduit :

$$d\bar{\varepsilon}_1 = \frac{1}{\eta} d\bar{\varepsilon}, \tag{12}$$

où en remplaçant le vecteur $d\bar{\varepsilon}$, nous aurons :

$$d\bar{\varepsilon}_1 = [\bar{N}, d\bar{r}]. \tag{13}$$

d'ici on déduit :

$$\bar{N}\, d\bar{\varepsilon}_1 = 0, \tag{14}$$

c'est la relation qui exprime la conservation des directions des normales des deux surfaces S et Σ, dans notre correspondance.

Le carré de la relation (13) nous donne :

$$d\bar{\varepsilon}_1^2 = dr^2, \tag{15}$$

c'est-à-dire, $ds_1^2 = ds^2$, où ds_1 est l'élément d'arc de la surface S.

Pour l'étude de cette surface, on se sert des relations :

$$\bar{N}\,d\bar{r} = 0 \qquad \text{et} \qquad d\varepsilon_1 = [\bar{N}, d\bar{r}]$$

d'où nous déduisons :

$$d\bar{r} = \beta\,(u, v)\,[\bar{N}, d\bar{\varepsilon}_1] \tag{16}$$

où

$$\bar{r}_u = \beta\,(u, v)\,[\bar{N}, \bar{\varepsilon}_{1u}]\ ; \quad \bar{r}_v = \beta\,(u, v)\,[\bar{N}, \bar{\varepsilon}_{1v}].$$

La condition d'intégrabilité sera :

$$\beta_v\,[\bar{N}, \bar{\varepsilon}_{1u}] - \beta_u\,[\bar{N}, \bar{\varepsilon}_{1v}] + \beta\left\{[\bar{N}_v, \varepsilon_{1u}] - [\bar{N}_u, \bar{\varepsilon}_{1v}]\right\} = 0. \tag{17}$$

En remplaçant dans cette relation les vecteurs $\bar{N}_u$ et $\bar{N}_v$ par les formules de Weingarten, et en faisant sa projection sur la direction de la normale $\bar{N}$, nous aurons :

$$a_1 + d_1 = 0,$$

ce qui nous montre que la courbure moyenne de la quasi-sphère S est nulle. Donc, la surface S est une surface minima.

Pour déterminer la fonction β, nous projetons la relation (17) sur la direction du vecteur $\bar{r}_u$, et puis sur la direction du vecteur $\bar{r}_v$, et nous avons :

$$\beta_u = \beta_v = 0, \quad \text{d'où} \quad \beta = \text{constante}.$$

β étant une contante arbitraire, nous pouvons la considérer égale à l'unité, et nous aurons :

$$d\bar{r} = [\bar{N}, d\bar{\varepsilon}_1].$$

Remarque. Selon le théorème de la circulation, on peut établir, pour trouver l'aire de la surface Σ minima, la formule :

$$\overline{\text{rot}}\ \bar{\varepsilon} = \frac{1}{H}\left\{[\bar{r}_u, G\bar{\varepsilon}_u - F\bar{\varepsilon}_v] - [\bar{r}_v, F\bar{\varepsilon}_u - E\bar{\varepsilon}_v]\right\} = 2\bar{N},$$

où $H = EG - F^2$ et E, F, G sont les coefficients de la première forme fondamentale de la surface Σ.

Le vecteur $\overline{\text{rot}}\,\bar{\varepsilon}$, provenant de la circulation du vecteur $\bar{\varepsilon}$, au long

d'une courbe Γ de la surface Σ, et sa direction étant la direction de la normale du plan de la courbe, nous avons :

$$\Omega = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} \bar{N}\,\mathrm{rot}\,\bar{\varepsilon}\, d\Omega = \frac{1}{2}\int \bar{\varepsilon}\, d\bar{r} = \frac{1}{2}\int \bar{r}\, d\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\int (\bar{N}, \bar{r}, d\bar{r}).$$

c'est-à-dire, la formule de Schwartz.

II

1. Si nous n'avons pas la relation (5) identiquement satisfaite, nous aurons un réseau $d\bar{r}\,d\bar{\varepsilon} = 0$, sur la surface Σ, tel que les éléments des arcs soient égaux aux éléments des arcs du réseau correspondant sur la surface Σ_1, lorsque la transformation infinitésimale conserve les directions des normales dans les points correspondants.

Ce réseau peut être un réseau particulier, soit en particularisant le vecteur $\bar{\varepsilon}$, soit en particularisant la surface Σ.

2. Afin que ce réseau soit orthogonal [3]), on aura la condition :

$$G(\bar{r}_u\,\bar{\varepsilon}_u) - F(\bar{r}_v\,\bar{\varepsilon}_u + \bar{r}_u\,\bar{\varepsilon}_v) + E(\bar{r}_v\,\bar{\varepsilon}_v) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{div}\,\bar{\varepsilon} = 0.$$

Dans ce cas, notre transformation conserve les aires infinitésimales.

3. Le réseau $d\bar{r}\,d\bar{\varepsilon} = 0$ sera un réseau conjugué, si est satisfaite la condition :

$$N(\bar{r}_u\,\bar{\varepsilon}_u) - M(\bar{r}_v\,\bar{\varepsilon}_u + \bar{r}_u\,\bar{\varepsilon}_v) + L(\bar{r}_v\,\bar{\varepsilon}_v) = 0,$$

où L, M, N sont les coefficients de la deuxième forme fondamentale de la surface Σ.

Dans ce cas, on sait que la condition nécessaire et suffisante afin que cette déformation conserve le réseau conjugué [4]) $d\bar{r}\,d\bar{\varepsilon} = 0$, est :

$$\bar{N}\bar{\varepsilon}_{12} = \bar{N}\left[\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & \end{matrix}\right\}\bar{\varepsilon}_{uv} - \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\bar{\varepsilon}_u - \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\bar{\varepsilon}_v\right] = 0.$$

où

$$\bar{\varepsilon}_{12} = \bar{\varepsilon}_{uv} - \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\bar{\varepsilon}_u - \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 2 & \end{matrix}\right\}\bar{\varepsilon}_v.$$

Dans notre transformation, la condition pour que le réseau conjugué $d\bar{r}\,d\bar{\varepsilon} = 0$ soit conservé, est que le vecteur ε_{12} ou $\bar{\varepsilon}_{uv}$ soit parallèle aux plans tangents des surfaces Σ et Σ_1, dans les points correspondants.

Dans ce cas, notre réseau est le réseau de base de la correspondance.[5])

3. Nous nous proposons d'étudier les cas particuliers, où le réseau $dr\,d\bar{\varepsilon} = 0$, est un réseau remarquable sur la surface Σ. Pour cette étude, nous rapportons la surface Σ à ce réseau, et nous aurons :

$$(18) \qquad \log\left(\frac{d}{a}\right)_{uv} = \left[\frac{a+d}{a}\begin{Bmatrix}1&2\\1\end{Bmatrix}\right]_u - \left[\frac{a+d}{d}\begin{Bmatrix}1&2\\2\end{Bmatrix}\right]_v,$$

où a et d sont les coefficients des formules de Weingarten, (8).

4. Dans le cas où le réseau $dr\,d\bar{\varepsilon} = 0$ est le réseau des lignes de courbure de la surface Σ, nous avons $F = M = 0$, et les coefficients :

$$a = \frac{FM - GL}{H}, \quad \text{et} \quad d = \frac{FM - EN}{H}$$

seront de la forme :

$$a = -\frac{GL}{H}, \quad \text{et} \quad d = -\frac{EN}{H},$$

et l'équation (18) sera de la forme :

$$\log\left(\frac{NE}{LG}\right)_{uv} = \frac{1}{2}\left[\frac{LG + NE}{LG}\cdot\frac{E_v}{E}\right]_u - \frac{1}{2}\left[\frac{LG+NE}{NE}\cdot\frac{G_u}{G}\right]$$

ou :

$$\log\left(\frac{E}{L}K\right)_{uv} = \frac{1}{2}\left(\frac{E_v}{L}\mathscr{H}\right)_u - \frac{1}{2}\left(\frac{G_u}{N}\mathscr{H}\right)_v,$$

où K et $\mathscr{H}$ sont la courbure totale et la moyenne de la surface Σ. Dans le même cas nous avons à satisfaire une relation entre les courbures moyennes $\mathscr{H}$ de la surface Σ, $\mathscr{H}_1$ de la surface Σ_1 et $\mathscr{H}_2$ de la quasi-sphère S', surface décrite par le vecteur équipolent au vecteur $\bar{\varepsilon}$. Cette relation a la forme :

$$\mathscr{H}_1 = \mathscr{H} + \mathscr{H}_2 - \frac{M_2(\bar{r}_u\,\bar{\varepsilon}_v + \bar{r}_v\,\bar{\varepsilon}_u)}{H}.$$

De même, on a une relation entre les courbures totales K et K_1 des surfaces Σ et Σ_1, et K_2 de la quasi-sphère S', de la forme :

$$K_1 = K + K_2 - \frac{LN_2 - 2MM_2 + L_2N}{H}.$$

5. Dans le cas où le réseau $d\bar{r}\,d\bar{\varepsilon} = 0$ est le réseau des lignes asymptotiques de la surface Σ, nous aurons ; $L = N = 0$, et les coefficients a et d deviendront :

$$a = d = \frac{FM}{H}$$

et l'équation (18) sera de la forme :

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\}_u = \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\}_v .$$

Cette équation, détermine une classe de surfaces plus générale que les surfaces de Bianchi.[6])

(6) Dans le même cas (4), nous nous proposons d'étudier le problème, en particularisant la position du vecteur $\bar{\varepsilon}$.

Soit le vecteur $\bar{\varepsilon}$, de la forme :

$$\bar{\varepsilon} = \lambda \bar{r}_u + \mu \bar{r}_v + \nu \bar{N} \tag{1}$$

d'où nous avons :

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_u = \lambda_u \bar{r}_u + \lambda \bar{r}_{uu} + \mu_u \bar{r}_v + \mu \bar{r}_{uv} + \nu_u \bar{N} + \nu \bar{N}_u \\ \bar{\varepsilon}_v = \lambda_v \bar{r}_u + \lambda \bar{r}_{uv} + \mu_v \bar{r}_v + \mu \bar{r}_{vv} + \nu_v \bar{N} + \nu \bar{N}_v . \end{cases} \tag{2}$$

En projetant les équations (2), sur la direction du vecteur de la normale $\bar{N}$, et puis la première équation sur la direction du vecteur $\bar{r}_u$, et la deuxième équation sur la direction du vecteur $\bar{r}_v$, nous aurons :

$$\begin{cases} \nu_u - \mu M = 0 \\ \nu_v - \lambda M = 0 \\ \lambda_u + \frac{1}{2} \lambda E_u + \mu_u F + \frac{1}{2} \mu E_v = 0 \\ \lambda_v + \frac{1}{2} \lambda G_u + \mu_v G + \frac{1}{2} \mu G_v = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Les solutions de ce système homogène d'équations aux derivées partielles représenteront les composantes du vecteur $\bar{\varepsilon}$.

La plus banale solution particulière de ce système est de la forme :

$$\lambda = \mu = \nu_u = \nu_v = 0, \quad \text{d'où} \quad \nu = \text{constante}.$$

Donc, $\bar{\varepsilon} = \nu \bar{N}$.

C'est-à-dire, les surfaces Σ et Σ_1 sont des surfaces parallèles

Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 15 Mars 1948).

Travaux cités

1. Bianchi - *Lezioni di Geometria differenziale* II, cap XVII, pag. 1-4.
2. E. B. Cristoffel - *Ueber einige allgemeine Eigenschaften der Minimalflächen.* Crelle's Journ. für die Math., 67, pp. 218-228.
3. I. Popa - *Transformations infinitésimales conservant les aires.* Bull. de l'Ecole Polytechnique de Jassy. T. III, fasc. 1, pp. 120-123.
4. Voir 1., pp. 13-16.
5. K. M. Peterson - *Sur les relations et les affinités entre les surfaces courbes* Ann. de la Fac. de Toulouse, vol. VII, 1905, pp. 3-43.
6. Voir 1. pp. 83-85.

SUR LA CORRESPONDANCE „T" ENTRE DEUX SURFACES RÉGLÉES

par

ION CREANGĂ

1. Dans une note précédente [1]) je me suis proposé d'étudier une correspondance entre deux surfaces réglées, que j'ai nommée T, définie de cette manière: soit R_1 et R_2 deux surfaces réglées, Γ_0 leur courbe d'intersection, M_0 un point quelconque de Γ_0, g_1 et g_2 les génératrices de R_1, R_2 qui passent par M_0. On considère un point M_1 de g_1, le plan tangent en M_1 de R_1, la droite δ d'intersection de ce plan avec le plan osculateur π de Γ_0 en M_0. Le plan déterminé de δ et g_2 est tangent à la surface R_2 en un point M_2. La correspondance T est la correspondance entre les points M_1 et M_2.

Dans la note antérieure, en employant le repère affine formé par les génératrices g_1 et g_2 et la tangente à la courbe Γ_0 en M_0, j'ai trouvé l'équation de la correspondance et quelques-unes de ses propriétés. Ici, je me propose de traiter ce problème, premièrement, dans un repère projectif, attaché à la correspondance, pour chercher les propriétés projectives et les invariants projectifs et puis dans le repère Frenet de Γ_0 en M_0 pour déduire des propriétés métriques et des cas particuliers de cette tranformation.

2. Considérons un repère projectif fixe. Soit :

$$\begin{aligned} x &= x_0(v) + u_1 \cdot x_1(v) \\ x &= x_0(v) + u_2 \cdot x_2(v) \end{aligned} \tag{1}$$

les équations des surfaces R_1, R_2, chacune d'elles représentant quatre équations entre les coordonnées projectives respectives ; $x = x_0(v)$ sont les équations de la courbe Γ_0 d'intersection de R_1, R_2 ; $x = x_1(v)$ les équations d'une courbe Γ_1 de R_1 ; $x = x_2(v)$ les équations d'une courbe Γ_2 de R_2. Les points M_1, M_2 sur les génératrices g_1, g_2, ont les coordonnées (1). Les plans tangents en M_1, M_2 aux surfaces R_1, R_2 sont respectivement :

$$(2)\qquad \begin{aligned}(x\,x_0\,x_1\;\;x'_0 + u_1.x'_1) &= 0\\ (x\,x_0\,x_2\;\;x'_0 + u_2.x'_2) &= 0.\end{aligned}$$

Les plan osculateur en M_0 à Γ_0 est

$$(3)\qquad (x\,x_0\,x'_0\,x''_0) = 0.$$

Les plans (2) et (3) passent par la même droite δ, si la condition:

$$\begin{aligned}(4)\quad & u_1\,u_2\Big\{(x_2\,x_0\,x'_0\,x''_0)\;(x''_0\,x_0\,x_1\,x'_1)\;(x_1\,x_0\,x_2\,x'_2)+\\ &\quad +(x_1\,x_0\,x'_0\,x''_0)\;(x''_0\,x_0\,x_2\,x'_2)\;(x_2\,x_0\,x_1\,x'_1)\Big\}+\\ &+u_1\Big\{(x_2\,x_0\,x'_0\,x''_0)\;(x''_0\,x_0\,x_1\,x'_1)\;(x_1\,x_0\,x_2\,x'_0)+\\ &\quad +(x_1\,x_0\,x'_0\,x''_0)\;(x''_0\,x_0\,x_2\,x'_0)\;(x_2\,x_0\,x_1\,x'_0)\Big\}+\\ &+u_2\Big\{(x_2\,x_0\,x'_0\,x''_0)\;(x''_0\,x_0\,x_1\,x'_0)\;(x_1\,x_0\,x_2\,x'_2)+\\ &\quad +(x_1\,x_0\,x'_0\,x''_0)\;(x''_0\,x_0\,x_2\,x'_2)\;(x_2\,x_0\,x_1\,x'_0)\Big\}=0\end{aligned}$$

est satisfaite.

L'équation (4) représente la correspondance T entre les points M_1 et M_2; elle est homologique pour les génératrices correspondantes g_1 et g_2. En désignant par $A,-B,C$ les coefficients de l'équation (4) dans leur ordre, le centre K de l'homologie a les coordonnées:

$$(5)\qquad x = -A\,x_0 + C\,x_1 - B\,x_2.$$

3. Prenons comme repère local le tétraèdre formé par le point M_0, deux points correspondants M_1, M_2 et un point M_3 sur la tangente en M_0 à Γ_0. Le point M_1 étant le correspondant de M_2, l'équation (4) doit être satisfaite pour $u_1 = u_2 = \infty$, donc:

$$(6)\qquad A = 0.$$

Les déplacement du tétraèdre est donné par les relations:

$$(7)\qquad \begin{aligned}x'_0 &= \alpha_{00}\,x_0 + \alpha_{03}\,x_3\\ x'_1 &= \alpha_{10}\,x_0 + \alpha_{11}\,x_1 + \alpha_{12}\,x_2 + \alpha_{13}\,x_3\\ x'_2 &= \alpha_{20}\,x_0 + \alpha_{21}\,x_1 + \alpha_{22}\,x_2 + \alpha_{23}\,x_3\\ x'_3 &= \alpha_{30}\,x_0 + \alpha_{31}\,x_1 + \alpha_{32}\,x_2 + \alpha_{33}\,x_3.\end{aligned}$$

Les coefficients A, B, C peuvent être exprimés à l'aide des coefficients α_{ij}. On a:

$$(8)\qquad \begin{aligned}A &= \alpha^2_{03}\,[\alpha'_{03} + \alpha_{03}\,(\alpha_{00} + \alpha_{33})]\;(\alpha_{13}\,\alpha_{21}\,\alpha_{32} - \alpha_{12}\,\alpha_{23}\,\alpha_{31})\\ B &= \alpha^2_{03}\,[\alpha'_{03} + \alpha_{03}\,(\alpha_{00} + \alpha_{33})]\;\alpha_{03}\,\alpha_{12}\,\alpha_{31}\\ C &= \alpha^2_{03}\,[\alpha'_{03} + \alpha_{03}\,(\alpha_{00} + \alpha_{33})]\;\alpha_{03}\,\alpha_{21}\,\alpha_{32}.\end{aligned}$$

Les cas singuliers peuvent se présenter, si:

1°. $\alpha_{03} = 0$, alors la courbe Γ_0 se réduit à un point.

2^0. $a_{32} = 0$ ou $a_{31} = 0$: la courbe Γ_0 est ligne asymptotique pour R_1, respectivement R_2.

3^0. $a_{12} = 0$ ou $a_{21} = 0$: la surface R_1, respectivement R_2, est développable.

Pour les cas non-singuliers, les seuls qui nous intéressent, on doit supposer les coefficient a_{03}, a_{32}, a_{21}, a_{12} différents de zéro.

Le cas : $a'_{03} + a_{03}(a_{00} + a_{33}) = 0$ n'est pas singulier pour la correspondance. Cette condition exprime que le point x_0'' se trouve dans le plan des génératrices g_1 et g_2. Le problème traité en coordonnées locales conduit à l'équation de l'homologie, comme dans le cas général.

Le cas où les surfaces R_1 et R_2 sont tangentes au long de Γ_0, doit être traité dans un autre repère.

4. La condition: $A = 0$, exprimée par a_{ik}, donne la relation:

$$a_{12}\, a_{23}\, a_{31} - a_{13}\, a_{32}\, a_{21} = 0. \tag{9}$$

L'équation de l'homologie devient:

$$a_{12}\, a_{31}\, u_1 - a_{21}\, a_{32}\, u_2 = 0. \tag{10}$$

Le centre K de l'homologie a les coordonnées:

$$x = a_{21}\, a_{32}\, x_1 + a_{12}\, a_{31}\, x_2. \tag{11}$$

La tangente à la courbe décrite par K est située dans le plan des génératrices g_1, g_2. On peut choisir comme courbes x_1 et x_2 sur les surfaces R_1, R_2, les courbes décrites par les points d'intersection de la tangente à la courbe K avec les génératrices g_1, g_2, ces points étant des points correspondants. On exprimera que le point x' de (11) se trouve sur la droite $(x_1\, x_2)$. De (11) on a:

$$\begin{aligned} x' = {} & (C' + C a_{11} - B a_{21})\, x_1 + (-B' + C a_{12} - B a_{22})\, x_2 + \\ & + (C a_{10} - B a_{20})\, x_0 + (C a_{13} - B a_{23})\, x_3 \end{aligned} \tag{12}$$

donc on trouve les conditions:

$$\frac{a_{10}}{a_{20}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = \frac{B}{C} \tag{13}$$

qui vérifient aussi la condition (9).

En plus, on détermine le point x_3 sur la tangente en x_0 à Γ_0, le point d'intersection du plan osculateur de la courbe K avec cette tangente; cette condition conduit à la relation:

$$(C' + C a_{11} - B a_{21})\, a_{20} + (-B' + C a_{23} - B a_{33})\, a_{30} = 0, \tag{14}$$

condition équivalente à:

$$a_{20} = a_{30} = 0 \tag{15}$$

si le plan osculateur en M_0 à Γ_0 est déterminé.

5. Pour fixer le point unité, on considère les points I_1, I_2 où le plan des génératrices (g_1, g_2) est tangent à R_1, respectivement R_2. On attribuera à ces points les coordonnées locales (1100), (1010), alors on doit avoir :

$$\alpha_{13} = \alpha_{23} = -\alpha_{03}. \tag{16}$$

On fixera le point unité sur la tangente par les considérations géométriques intrinsèques suivantes :

Considérons la correspondance entre les droites qui joignent deux points homologiqus P_1, P_2 et les droites δ du plan osculateur. On a ainsi deux faisceaux de droites, le premier de centre K le second de centre M_0, qui se correspondent homographiquement. Le premier faisceau coupe sur la droite Δ, d'intersection du plan $(g_1 g_2)$ avec le plan osculateur π, une division homographique E à ce faisceau. Le second, coupe sur la droite Δ_1, d'intersection du plan osculateur de la courbe K et du plan π, une ponctuelle homographique E_1 à ce même faisceau. Les ponctuelles E et E_1 se correspondent de même homographiquement. Les droites qui joignent les points correspondants enveloppent une conique ε, tangente aux droites Δ, Δ_1 et à la droite $(x_0 x_3)$ (la tangente en M_0 à Γ_0).

Les équations de la conique ε, en coordonnées locales, sont :

$$\left(\frac{\xi}{a_{12}+a_{21}} + \frac{\eta}{a_{21}} + \frac{\tau}{a_{03}}\right)^2 - 4\,\frac{\xi\eta}{a_{21}(a_{12}+a_{21})} = 0 \tag{17}$$

$$a_{32}\eta - a_{31}\zeta = 0.$$

Le point de contact de la tangente en M_0 à Γ_0, a les coordonnées :

$$\xi = k(a_{12}+a_{21}), \qquad \eta = \zeta = 0, \qquad \tau = -ka_{03}.$$

La condition pour que ce point soit point unité sur la tangente est :

$$a_{12} + a_{21} + a_{03} = 0. \tag{18}$$

Alors, les points de contact de la conique ε avec Δ et Δ_1 sont respectivement ;

$$\begin{aligned} &F(-\alpha_{03}, \alpha_{21}, \alpha_{12}, 0) \\ &F_1(0, \alpha_{21}, \alpha_{12}, -\alpha_{03}). \end{aligned} \tag{19}$$

Les coordonnées du point d'intersection des droites Δ et Δ_1, sont :

$$D(0, \alpha_{31}, \alpha_{32}, 0).$$

6. La correspondance entre les directions correspondantes en deux points homologues P_1 et P_2 de g_1, g_2 est homographique. Les deux faisceaux de directions correspondantes de centres P_1 et P_2, qui se trouvent respectivement dans les plans tangents en P_1 et P_2 de R_1, R_2,

coupent sur les droites δ, d'intersection des deux plans, des ponctuelles en involution. Cette involution est parabolique pour toutes les droites δ à l'exception du cas où les points homologues P_1, P_2 sont des points d'intersection de la tangente à la courbe K, avec les génératrices, c'est à dire les points M_1, M_2, lorsque l'involution est l'identité ; alors toutes les tangentes correspondantes se rencontrent.

En effet, soient T_1, T_2 les points d'intersection des directions correspondantes avec le plan osculateur π, on a :

$$(20)\quad \begin{aligned}(T_1)\ x=&\frac{u'_1+(\alpha_{11}-\alpha_{21}-\alpha_{00})u_1}{u'_1+(\alpha_{11}-\alpha_{21})u_1}x_0-\frac{u_1^2\,\alpha_{21}}{u'_1+(\alpha_{11}-\alpha_{21})u_1}x_1-\\&-\frac{u_1^2\,\alpha_{12}}{u'_1+(\alpha_{11}-\alpha_{21})u_1}x_2+\frac{u_1(u_1-1)\,\alpha_{03}}{u'_1+(\alpha_{11}-\alpha_{21})u_1}x_3\\(T_2)\ x=&\frac{u'_1+(\alpha_{22}-\alpha_{12}-\alpha_{00})u_1}{u'_1+(\alpha_{22}-\alpha_{12})u_1}x_0-\frac{u_1^2\,\alpha_{21}}{u'_1+(\alpha_{22}-\alpha_{12})u_1}x_1-\\&-\frac{u_1^2\,\alpha_{12}}{u'_1+(\alpha_{22}-\alpha_{12})u_1}x_2+\frac{u_1(u_1-1)\,\alpha_{03}}{u'_1+(\alpha_{22}-\alpha_{12})u_1}x_3.\end{aligned}$$

Pour que ces deux points coïncident, il faut que $u_1=0$ ou que $u_1=\infty$. Dans le cas où $u_1=\infty$, le problème traité en paramètres homogènes montre que toutes les tangentes correspondantes se coupent dans le plan osculateur, sur la droite Δ_2 :

$$(21)\quad \begin{cases}\alpha_{03}\,\xi+\alpha_{12}\,\tau=0\\ \alpha_{12}\,\eta-\alpha_{21}\,\zeta=0.\end{cases}$$

Dans le cas où $u_1=0$, toute les directions correspondantes se rencontrent en M_0

De même, dans le cas où :

$$(22)\quad \alpha_{11}-\alpha_{21}=\alpha_{22}-\alpha_{12}$$

toutes les tangentes correspondantes se coupent. C'est une condition pour les surfaces R_1, R_2.

Dans le cas général, la transformation T fait correspondre à un réseau R^2) sur la surface R_1 un réseau $\overline{R}$ sur la surface R_2. Les tangentes aux courbes du réseau R forment une demi-quadrique, qui coupe le plan π suivant une conique γ_1 ; les tangentes correspondantes au réseau $\overline{R}$, coupent le plan osculateur π suivant la conique γ_2. Les coniques γ_1, γ_2 sont tangentes en M_0, la tangente commune étant la tangente à la courbe Γ_0 en M_0. Ces coniques ont encore un seul point commun sur la droite Δ_2 où elles doivent être tangentes, donc les coniques γ_1, γ_2 sont bitangentes.

De même les demi-quadriques osculatrices aux surfaces R_1, R_2 coupent le plan π suivant deux coniques osculatrices en M_0 ; leur quatrième point commun se trouve sur la droite Δ_2. Il résulte qu'il n'existe que deux directions asymptotiques qui se conservent par la transformation T : les directions asymptotiques, aux points x_1 et x_2. De ce théorème on déduit une construction géométrique pour le centre de l'homologie. On considère les demi-quadriques osculatrices des génératrices g_1, g_2, on prend leur intersection avec le plan osculateur en M_0 à Γ_0 ; les génératrices du second système des quadriques osculatrices, qui passent par le point commun des coniques, différant de M_0, coupent les génératrices g_1, g_2 aux points M_1, M_2 respectivement. L'intersection de la droite $M_1 M_2$ avec la droite caractéristique du plan (g_1, g_2) est le point K, centre de l'homologie.

6. On trouve les coordonnées du point caractéristique du plan $(g_1\ g_2)$ par rapport au tétraèdre choisi à l'aide des conditions de fixité d'un point par rapport à ce tétraèdre :

$$\begin{aligned} &\xi' + \alpha_{00}\,\xi + \alpha_{30}\,\tau = 0 \\ &\eta' + \alpha_{11}\,\eta + \alpha_{21}\,\zeta + \alpha_{31}\,\tau = 0 \\ &\zeta' + \alpha_{12}\,\eta + \alpha_{22}\,\zeta + \alpha_{32}\,\tau = 0 \\ &\tau' + \alpha_{03}(\xi - \eta - \zeta) + \alpha_{33}\,\tau = 0\,. \end{aligned} \tag{23}$$

La droite caractéristique du plan $\tau = 0$ a les équations :

$$\tau = 0\,, \quad \tau' = 0$$

donc :

$$\begin{cases} \xi - \eta - \zeta = 0 \\ \tau = 0. \end{cases} \tag{24}$$

On vérifie que les points I_1, I_2, K se trouvent sur cette droite.

Le point caractéristique est donné par :

$$\tau = 0\,, \quad \tau' = 0\,, \quad \tau'' = 0\,.$$

On a :

$$\begin{aligned} \tau' = (-\alpha'_{03} + \alpha_{03}\,\alpha_{00})\,\xi + [\alpha'_{03} - \alpha_{03}(\alpha_{11} + \alpha_{12})]\,\eta + \\ + [\alpha'_{03} - \alpha_{03}(\alpha_{21} + \alpha_{22})]\,\zeta. \end{aligned} \tag{25}$$

Donc, à l'abstaction d'un facteur, les coordonnées du point caractéristique I sont :

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha_{11} + \alpha_{12} - \alpha_{21} - \alpha_{22} \\ \eta &= \alpha_{00} - \alpha_{21} - \alpha_{22} \\ \zeta &= \alpha_{11} + \alpha_{12} - \alpha_{00} \\ \tau &= 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Le point I coïncide avec $K(0, 1, -1, 0)$ si

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} - \alpha_{21} - \alpha_{22} = 0 \tag{27}$$

Cette condition (27), déjà trouvée par (22), exprime aussi le fait que les directions correspondantes par T se coupent dans le plan osculateur π.

Elle exprime en plus que le point : $K = I$ est un point fixe dans l'espace et que, par conséquent, les surfaces R_1, R_2 se projettent l'une sur l'autre du point fixe K, en conservant les génératrices.

En effet, de (7) on a :

$$\begin{aligned} x'_1 &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 - \alpha_{03} x_3 \\ x'_2 &= \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 - \alpha_{03} x_3 \end{aligned} \tag{28}$$

donc d'après (27) :

$$x'_1 - x'_2 = (\alpha_{11} - \alpha_{21})(x_1 - x_2) \tag{29}$$

équation qui montre que le point $x = x_1 - x_2$ est un point fixe ; c'est proprement le point $K = I$.

7. Il reste à etudier le cas où les surfaces R_1, R_2 sont tangentes le long de Γ_0. Dans ce cas on peut choisir comme tétraèdre local, le tétraèdre formé par le point x_0, deux points x_1, x_2 sur les génératrices g_1, g_2 et le point $x_3 = x''_0$. Ici encore, nous laissons de côté le cas où la courbe Γ_0 est ligne asymptotique pour l'une ou pour l'autre surface réglée. On a :

$$\begin{aligned} x'_0 &= \alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 \\ x'_1 &= \alpha_1 x_0 + \beta_1 x_1 + \gamma_1 x_2 + \delta_1 x_3 \\ x'_2 &= \alpha_2 x_0 + \beta_2 x_1 + \gamma_2 x_2 + \delta_2 x_3 \end{aligned} \tag{30}$$

avec les relations :

$$\begin{aligned} \alpha' + \alpha^2 + \beta\alpha_1 + \gamma\alpha_2 &= 0 \\ \beta' + \alpha\beta + \beta\beta_1 + \gamma\beta_2 &= 0 \\ \gamma' + \alpha\gamma + \beta\gamma_1 + \gamma\gamma_2 &= 0 \\ \beta\delta_1 + \gamma\delta_2 &= 1. \end{aligned} \tag{31}$$

L'équation de l'homologie est :

$$(\beta\gamma_1\delta_2 - \beta_2\gamma\delta_1) u_1 u_2 - \beta\gamma\delta_1 u_1 + \beta\gamma\delta_2 u_2 = 0. \tag{32}$$

Choisissant pour x_1, x_2 deux points correspondants, on a :

$$\beta\gamma_1\delta_2 - \beta_2\gamma\delta_1 = 0 ; \tag{33}$$

l'équation (32) devient :

$$\delta_1 u_1 - \delta_2 u_2 = 0. \tag{34}$$

On exclut les cas $\beta = 0$, ou $\gamma = 0$, étant des cas singuliers où

l'une ou l'autre des surfaces réglées est développable. Le centre de l'homologie est déterminé par :

$$x = \delta_2 x_1 - \delta_1 x_2. \tag{35}$$

La tangente à la courbe (35) se trouve dans le plan $(x_0 x_1 x_2)$. On peut choisir pour le couple $(x_1 x_2)$ les points où cette tangente coupe las génératrices g_1, g_2. On doit avoir, alors :

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\delta_1}{\delta_2}. \tag{36}$$

De plus, si le point K est le point unité sur la droite $(x_1 x_2)$, on a :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -\delta_2 \\ \alpha_1 &= -\alpha_2. \end{aligned} \tag{37}$$

Le point caractéristique du plan $(g_1 g_2)$ a les coordonnées :

$$\begin{aligned} \xi &= \gamma_1 + \gamma_2 - \beta_1 - \beta_2 \\ \eta &= \beta - \gamma \\ \zeta &= \beta - \gamma \\ \tau &= 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Il coïncide avec K, si :

$$\gamma_1 + \gamma_2 - \beta_1 - \beta_2 = 0, \tag{39}$$

relation qui exprime de même la condition pour que le point K soit fixe. Il suit que cela a lieu, comme dans le cas général, seulement si les surfaces R_1, R_2 sont en perspective de sorte que les génératrices se conservent.

Les tangentes aux courbes $x = x_1$, $x = x_2$ se rencontrent dans le plan osculateur de la courbe Γ_0 au point :

$$x = \alpha_1 x_0 - \beta_2 x_1 + \gamma_1 x_2 + \delta_1 x_3. \tag{40}$$

On peut choisir le point unité tel que :

$$\alpha_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 1. \tag{41}$$

Il suit :

$$\alpha_2 = \delta_2 = -1 \tag{42}$$

et :

$$\beta = -\beta_2 \gamma. \tag{43}$$

Le plan osculateur à Γ_0 en M_0 a l'équation :

$$\eta + \beta_2 \zeta = 0 \tag{44}$$

et le plan osculateur à la courbe K:

(45) $$\xi - \tau = 0.$$

Les équations de la droite qui joint les points correspondants sont :

(46) $$\begin{cases} u_1 . \xi = \eta + \zeta \\ \tau = 0 \end{cases}$$

et celles de la droite d'intersection des plans tangents en deux points correspondants sont :

(47) $$\begin{cases} \eta + \beta_2 \zeta = 0 \\ u_1 \zeta - (\gamma + u_1)\tau = 0. \end{cases}$$

Ces deux faisceaux sont homographiques, de centre K et M_0. Ils coupent sur les droites d'intersection de leur plan avec le plan π et avec le plan osculateur de la courbe K, respectivement, des divisions homographiques. La droite, qui joint les points correspondants dans ces dernières homographies, enveloppe une conique, d'équation :

48) $$\beta_2^2 (\eta + \tau \beta_2)^2 + 4\gamma (\beta_2 - 1)\tau (\xi - \tau) = 0$$

tangente en M_0 à T_0.

8. Pour déduire des propriétés métriques de la transformation T, nous emploierons le repère Frenet au point M_0 à la courbe Γ_0. Designant par $\bar{\varrho}_1, \bar{\varrho}_2$ les vecteurs unités des génératrices g_1, g_2 respectivement, par $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ les vecteurs unités sur la tangente, normale principale et binormale de la courbe Γ_0 en M_0, par R et T les rayons de courbure et torsion de Γ_0 en M_0, on a :

(49) $$\begin{aligned} \bar{\varrho}_1 &= \alpha_1 \bar{t} + \beta_1 \bar{n} + \gamma_1 \bar{b} \\ \bar{\varrho}_2 &= \alpha_2 \bar{t} + \beta_2 n + \gamma_2 \bar{b}. \end{aligned}$$

L'équation de l'homologie entre les génératrices g_1, g_2, est :

(50) $$(A_1 B_2 - B_1 A_2)\, u_1 u_2 + C_2 A_1 u_1 - C_1 A_2 u_2 = 0$$

où :

(51) $$\begin{aligned} A_1 &= \beta_1 \gamma'_1 - \gamma_1 \beta'_1 - \frac{\beta_1^2 + \gamma_1^2}{T} - \frac{\gamma_1 \alpha_1}{R} \\ A_2 &= \beta_2 \gamma'_2 - \gamma_2 \beta'_2 - \frac{\beta_2^2 + \gamma_2^2}{T} - \frac{\gamma_2 \alpha_2}{R} \\ B_1 &= \alpha_1 \gamma'_1 - \gamma_1 \alpha'_1 - \frac{\alpha_1 \beta_1}{T} + \frac{\gamma_1 \beta_1}{R} \\ B_2 &= \alpha_2 \gamma'_2 - \gamma_2 \alpha'_2 - \frac{\alpha_2 \beta_2}{T} + \frac{\gamma_2 \beta_2}{R} \\ C_1 &= -\gamma_1 \quad , \qquad C_2 = -\gamma_2. \end{aligned}$$

Les cas singuliers sont caractérisés dans ce trièdre par :

1^0. $A_1 = 0$ (ou $A_2 = 0$), condition qui montre que la surface R_1 (resp. R_2) est développable.

2^0. $C_1 = 0$ (ou $C_2 = 0$), condition qui exprime que Γ_0 est ligne asymptotique pour R_1 (resp. R_2).

La condition :

$$A_1 B_2 - B_1 A_2 = 0 \tag{52}$$

montre que le centre de l'homologie est à l'infini et représente l'équation différentielle pour la détermination des surfaces R_2, étant données la surface R_1 et la courbe Γ_0.

On peut écrire l'équation (50) encore sous la forme :

$$(\cos\varphi_2 \cos\psi_1 - \cos\varphi_1 \cos\psi_2)\, u_1 u_2 - \frac{\cos\varphi_1 \cos\omega_2}{M_2}\, u_1 + \frac{\cos\varphi_2 \cos\omega_1}{M_1}\, u_2 = 0 \tag{53}$$

où :

φ_1 représente l'angle de la normale du plan asymptotique de R_1 avec la tangente de la courbe Γ_0 en M_0,

ψ_1 l'angle de la normale du plan asymptotique de R_1 avec la normale principale de Γ_0 en M_0.

ω_1 l'angle de la génératrice g_1 avec la binormale.

$\varphi_2, \psi_2, \omega_2$ étant les angles correspondants pour la surface R_2, et :

$$M_1 = \sqrt{\varrho'^2_1} \quad , \qquad M_2 = \sqrt{\varrho'^2_2} \, .$$

Ces relations conduisent à discerner divers cas particuliers pour les surfaces R_1, R_2 et pour leur courbe d'intersection Γ_0.

Séminaire de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 1 Mars 1948)

Travaux cités

1. I. Creangă – *Sur une correspondance entre deux surfaces réglées* Bull. de l'Ecole Polytechnique de Jassy. Tome 2, fasc. 2, (1947), 341-346.

2. Octav Mayer – *Etudes sur les surfaces réglées*. Bul. Fac. de Ştiinţi Cernăuţi Vol II. (1926) 1-33.

SUR UNE MATRICE ATTACHÉE À TOUTE SUITE DE NOMBRES

par

AL. C. CLIMESCU

1. On sait depuis Kronecker que la condition nécessaire et suffisante pour que la série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

représente une fraction rationnelle est que la matrice infinie

$$A = | a_{i,j} | = | a_{i+-2} | \qquad (i, j = 1, 2, , \ldots)$$

soit de rang fini. L'étude de la matrice A a constitué ensuite le thème central de toute une suite de problèmes des plus importants: caractérisation taylorienne des fonctions méromorphes, problème des moments, rapports entre la théorie de l'intégrale de Stieltjès et les fractions continues, ...

D'autre part Toeplitz [1]) a introduit dans la théorie des séries de Dirichlet les matrices $D = | a_{i,j} |$ où

$a_{i,j} = 0$ si j n'est pas un diviseur de i et

$a_{i,j} = a_{i|j}$ si j est un diviseur de i

$(i, j = 1, 2, \ldots)$ et ces matrices se sont montrées utiles pour la résolution de certains problèmes concernant les fonctions représentées par des séries de Dirichlet, par ex., le problème de la régularité.

Ces précédents suggèrent que d'autres matrices infinies attachées à une suite de nombres, qu'on peut interpréter comme la suite des coefficients d'une série de fonctions appropriée, pourraient devenir d'utiles instruments de recherche et de classification et nous proposons ici l'étude des matrices $P = | a_{i|j} |$, avec

---

1) Cf. par ex. A. Wintner, *Arithmetically monotone sequences*, Bull. de l'Ecole Polytechnique de Jassy, Tome II, fasc. 1, p. 3.

$$a_{i,j} = a_{iX} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots)$$

attachées à toute suite a_1 , a_2 , ...

Les cas traités dans ce travail (P de rang 1 ou 2) révèlent une structure arithmétique très particulière des a_n et, au point de vue de la théorie des fonctions, il suffit de remarquer que les fonctions

$$\sum_1^\infty x^n, \sum_1^\infty n\,x^n, \sum_1^\infty \left(1/n\right) x^n, \sum_0^\infty x^{2^n}$$

(fractions rationnelles, fonction logarithmique, fonction à coupure) possèdent une matrice P de rang 1, pour montrer que ces cas particuliers offrent déjà un grand intérêt.

2. Commençons par déterminer les matrices P de rang 1 et imposons d'abord la condition supplémentaire

$$a_n \neq 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Par hypothèse

$$\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ a_{pi} & a_{pj} \end{vmatrix} = 0$$

quel que soient les indices i, j, p. Prenons $i = 1$ et p quelconque, donc

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_j \\ a_p & a_{pj} \end{vmatrix} = 0$$

ou $a_1 a_{pj} - a_p a_j = 0$, ou encore

$$a_{pj} = \frac{a_p a_j}{a_1}. \tag{1}$$

Soit n un nombre quelconque et supposons que décomposé en ses facteurs premiers il soit de la forme

$$n = p^\alpha q^\beta \ldots s^\sigma.$$

Par application successive de la relation (1) on obtient

$$a_n = \frac{a_p^\alpha a_q^\beta \ldots a_s^\sigma}{a_1^{\alpha+\beta+\ldots+\sigma}}, \tag{2}$$

les nombres a_m avec m premier pouvant être choisis arbitrairement. En effet soient

$$i = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i} \ , \ j = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \ldots q_j^{\beta_j} \ , \ k = r_1^{\gamma_1} r_2^{\gamma_2} \ldots r_k^{\gamma_k}$$

trois entiers quelconques décomposés. On a d'après (2)

$$a_i = \frac{\Pi a_r^{\alpha}}{a_1^{\Sigma\alpha}}, \qquad a_j = \frac{\Pi a_q^{\beta}}{a_1^{\Sigma\beta}}$$

$$a_{ki} = \frac{\Pi a_p^{\alpha} \Pi a_r^{\gamma}}{a_1^{\Sigma\alpha+\Sigma\gamma}}, \quad a_k = \frac{\Pi a_q^{\beta} \Pi a_r^{\gamma}}{a_1^{\Sigma\beta+\Sigma\gamma}}$$

et

$$a_i a_{kj} = \frac{\Pi a_p^{\alpha} \Pi a_q^{\beta} a \Pi_r^{\gamma}}{a_1^{\Sigma\alpha+\Sigma\beta+\Sigma\gamma}} = a\, a_{ki}$$

donc la matrice P est effectivement de rang 1.

Affranchissons-nous maintenant de l'hypothèse $a_n \neq 0$. Si $a_1 = 0$ on a

$$\begin{vmatrix} 0 & a_n \\ a_n & a_{n^2} \end{vmatrix} = 0$$

donc $a_n = 0$ quelque soit n et P serait de rang zéro ; par conséquent $a_1 \neq 0$ et on peut normer les a_n en supposant $a_1 = 1$ (au besoin on peut remplacer chaque a_n par a_n/a_1, ce qui n'altère par le rang. Supposons $a_p = 0$ avec p premier. De l'égalité

$$\begin{vmatrix} 1 & a_p \\ a_q & a_{pq} \end{vmatrix} = 0$$

résulte $a_{pq} = 0$, donc $a_p = 0$ implique $a_{pq} = 0$ quelque soit q.

Supposons

$a_n = 0$ et $n = p^{\alpha} q^{\beta} \ldots s^{\sigma} = p^{\alpha} u$. De l'égalité

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{p\alpha} \\ a_u & a_n \end{vmatrix} = 0$$

on déduit

$$a_n = a_u a_{p\alpha} = 0$$

donc soit $a_{p\alpha} = 0$, soit $a_n = 0$, soit $a_{p\alpha} = 0$ et $a_u = 0$.

Si $a_u = 0$ on applique le même procédé et on arrive en définitive à la conclusion qu'il y a un facteur t^{τ} pour lequel

$$a_{t\tau} = 0;$$

mais de

$$a_1 a_{t\tau} = a_t a_{t\tau - 1}$$

résulte qu'au moins un des facteurs du second membre est nul et, de proche en proche on arrive à la conclusion $a_t = 0$. Donc si $a_n = 0$ il existe au moins un facteur premier p de n pour lequel $a_p = 0$ et, par

conséquent, la valabilité des résultats subsiste si pour certains n $a_n = 0$, et on peut énoncer le résultat suivant :

1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la matrice P soit de rang 1 (la suite a_n étant supposée normée) est qu'on ait*

$$a_{p\alpha_q\beta\ldots s\sigma} = (a_p)^\alpha (a_q)^\beta \ldots (a_s)^\sigma$$

a_p pouvant être choisi arbitrairement si p est premier.

Observations.

1^0. La condition nécessaire et suffisante pour que tous les a_n soient réels est que tous les a_p (p premier) soient réels.

2^0. Le caractère multiplicatif des a_n montre qu'on a le résultat suivant :

Si la matrice P associée à la suite a_n est de rang 1, la matrice P attachée à la suite $| a_n |$ est aussi de rang 1 et réciproquement.

3^0. Si $a_1 \neq 1$, on a

$$a_{p\alpha_q\beta\ldots s\sigma} = \frac{(a_p)^\alpha (a_q)^\beta \ldots (a_s)^\sigma}{a_1^{\alpha+\beta+\ldots+\sigma}}.$$

II. Si la matrice P associée respectivement aux suites a_n et b_n est de rang *1*, la matrice P associée à la suite $a_n\, b_n$ est de rang 1.

Multiplions membre à membre les égalités

$$a_i\, a_{pi} = a_i\, a_{pi}$$
$$b_i\, b_{pi} = b_i\, b_{pi};$$

on obtient

$$(a_i\, b_i)\,(a_{pi}\, b_{pi}) = (a_i\, b_i)\,(a_{pi}\, b_{pi})$$

c'est-à-dire, en posant $a_n\, b_n = c_n$,

$$\begin{vmatrix} c_i & c_i \\ c_{pi} & c_{pi} \end{vmatrix} = 0.$$

Corollaire. *Si $k \neq 0$ la matrice P attachée à la suite ka_n est de rang 1 si la matrice P attachée à la suite a_n est le rang 1.*

III. *Si une suite normée n'est formée que de nombres entiers et si la matrice P qui lui est attachée est le rang 1, la condition nécessaire et suffisante afin que l'ensemble des termes de la suite coïncide avec l'ensemble des entiers $\neq 0$ est que les valeurs a_p pour p premier soient des nombres premiers et que chaque nombre premier se trouve au moins une fois parmi les valeurs a_p.*

Si chaque nombre premier se trouve une fois et une seule parmi les valeurs a_p, il existe un nombre de la suite et un seul qui ait la valeur n, quelque soit n.

La première partie est une suite du caractère multiplicatif des a_n et la seconde résulte du fait que la décomposition d'un entier en ses facteurs premiers est essentiellement unique.

IV. *Si la matrice P attachée à la suite* a_n *est de rang 1, la matrice P attachée à la suite* a_n^p *est de rang 1 si nous choisissons une détermination convenable pour* a_n^p *et si nous supposons* $a_n \neq 0$ *si* $p < 0$.

Il suffit d'observer que l'égalité

$$a_i\, a_{rj} = a\, a_{ri}$$

implique l'égalité

$$a_i^p\, a_{rj}^p = a_i^p\, a_{ri}^p .$$

V. *Si la matrice attachée à la suite normée* a_n *est de rang 1, la série*

$$\sum_1^\infty a_n x^n$$

a un rayon de convergence au plus égal à l'unité.

On a

$$a_4 = (a_2)^2 , \; a_8 = (a_2)^3 , \ldots , \; a_{2^n} = (a_2)^n , \ldots$$

donc

$$\overline{\lim} \sqrt[2^n]{|a_{2^n}|} = \lim |a_2|^{\frac{n}{2^n}} = 1$$

ou encore

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \geqslant 1 \quad \text{e} \quad R \leq 1.$$

C'est le seul résultat général parcequ'on peut construire des séries à rayon < 1.

Supposons par exemple qu'on veuille avoir

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \geqslant \varrho > 1$$

c'est-à-dire

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \varrho - \varepsilon$$

pour une infinité de n. Il suffit de choisir pour une infinité de nombres premiers p

$$|a_p| > (\varrho - \varepsilon)^p$$

pour être sûrs que $R \leq \frac{1}{\varrho} < 1$.

VI. *Si les matrices P attachées aux suites* a_n, b_n, *sont de rang*

1, la matrice P attachée à la suite $a_n + b_n$ est en général de rang 2.

Il suffit d'observer que le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_i + b_i & a_j + b_j & a_k + b_k \\ a_{pi} + b_{pi} & a_p + b_{pi} & a_{pk} + b_{pk} \\ a_{qi} + b_{qi} & a_{qj} + b_{qj} & a_{qk} + b_{qk} \end{vmatrix}$$

peut être décomposé en une somme de huit déterminants nuls, chaque déterminant ayant au moins deux colonnes composées seulement d'éléments a ou b, tandis que la suite $a_n + b_n$ ne sera pas obligatoirement du type exigé par le théorème I.

Corollaire. *Si les matrices attachées aux suites*

$$a_{n,1},\ a_{n,2},\ \ldots\ a_{n,p}$$

sont de rang 1, la matrice attachée à la suite

$$a_{n,1} + a_{n,2} + \ldots + a_{n,p}$$

sera en général de rang p.

3. Nous allons déterminer maintenant les matrices P de rang 2 et nous utiliserons le

Lemme. *Si*

$$F(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$$

et si la matrice A attachée à la suite a_n est de rang ≤ 2, alors $F(z)$, fonction génératrice de la suite a_n, a l'une des formes suivantes :

I. $F(z) = a + bz$

II. $F(z) = \dfrac{A}{a - z} + B \qquad (a \neq 0)$

III. $F(z) = \dfrac{A}{a - z} + \dfrac{B}{b - z} \quad (a \neq 0,\ b \neq 0)$

IV. $F(z) = \dfrac{A}{(a-z)^2} + \dfrac{B}{a - z} \quad (a \neq 0)$.

C'est un cas particulier du théorème de Kronecker et sa démonstration directe est d'ailleurs immédiate.

Observations.

1°. Si A est effectivement de rang 2, alors on a :

$b \neq 0$ dans le cas I.

$B \neq 0,\ A \neq 0$ dans le cas II.

$a \neq b,\ A \neq 0,\ B \neq 0$ dans le cas III.

$B \neq 0$ dans le cas IV.

La forme de $F(z)$ sera donc, si la matrice A attachée à la suite a_n est de rang 1 :

$$F(z) = a \quad (a \neq 0) \quad \text{ou} \quad F(z) = \frac{A}{a - z} \quad (a \neq 0,\ A \neq 0).$$

2^0. Si la matrice A attachée à la suite a_n est de rang effectivement égal à 2, alors :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b^2 \neq 0$$

dans le cas I.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{A}{a} + B & \frac{A}{a^2} \\ \frac{A}{a^2} & \frac{A}{a^3} \end{vmatrix} = \frac{AB}{a^3} \neq 0$$

dans le cas II.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{A}{a} + \frac{B}{b} & \frac{A}{a^2} + \frac{B}{b^2} \\ \frac{A}{a^2} + \frac{B}{b^2} & \frac{A}{a^3} + \frac{B}{b^3} \end{vmatrix} = \frac{AB}{ab}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 \neq 0$$

dans le cas III.

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{A}{a^2} + \frac{B}{a} & \frac{2A}{a^3} + \frac{B}{a^2} \\ \frac{2A}{a^3} + \frac{B}{a^2} & \frac{3A}{a^4} + \frac{B}{a^3} \end{vmatrix} = -\frac{A^2}{a^6} \neq 0$$

dans le cas IV, c'est-à-dire dans tous les cas

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Posons

$$b_{i,j} = a_{p^{i+j}} \quad (i\ j = 0, 1, \ldots)$$

La matrice $B_p = |b_{i,j}|$ étant extraite de la matrice P est au plus de rang 2. Supposons d'abord que pour n'importe quel nombre premier p la matrice B_p soit de rang ≤ 1.

a) Soit B_p de rang 0 pour tous les p premiers. On a, p et q étant des nombres premiers quelconques :

$$\begin{vmatrix} a_p & a_q & a_{pq} \\ a_{p^2} & a_{pq} & a_{p^2q} \\ a_{pq} & a_{q^2} & a_{pq^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{pq} \\ 0 & a_{pq} & a_{p^2q} \\ a_{pq} & a_{q^2} & a_{pq^2} \end{vmatrix}$$

donc $a_{pq} = 0$ et en continuant le raisonnement on verrait que $a_n = 0$ quelque soit n et P serait de rang 0.

b). Les matrices B_p sont de rang ≤ 1, un B_p au moins étant du rang 1. Il faut distinguer deux cas :

b_1). La fonction génératrice de la matrice B_p est $\equiv a_1 \neq 0$ pour tout p (premier). On a alors

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_p & a_q \\ a_p & a_{p^2} & a_{pq} \\ a_q & a_{pq} & a_{q^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & a_q \\ 0 & 0 & a_{pq} \\ a_q & a_{pq} & a_{q^2} \end{vmatrix} = -a_1 (a_{pq})^2 = 0$$

donc $a_{pq} = 0$ quelque soit q et comme tout nombre n est multiple d'un nombre premier on a $a_n = 0$ $(n = 2, 3, \ldots)$ et P serait de rang 1.

b_2). Il existe au moins un p pour lequel la fonction génératrice de B_p serait de la forme

$$\frac{A}{a - z} \left(= \frac{a_1 a}{a - z} \right).$$

On a

$$a_p = \frac{a_1}{a}, a_{p^2} = \frac{a_1}{a^2}, \ldots, a_{p^n} = \frac{a_1}{a^n}, \ldots$$

et

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_p & a_q \\ a_p & a_{p^2} & a_{pq} \\ a_q & a_{pq} & a_{q^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & \frac{a_1}{a} & a_q \\ \frac{a_1}{a} & \frac{a_1}{a^2} & a_{pq} \\ a_q & a_{pq} & a_{q^2} \end{vmatrix} = -a_1 \left(a_{pq} - \frac{a_q}{a} \right)^2 = 0$$

donc

$$a_{pq} = \frac{a_q}{a} = \frac{a_1 a_q}{a_1 a} = \frac{a_p a_q}{a_1}$$

et, de proche en proche, on arrive à la conclusion que si $n = p^\alpha q^\beta \ldots s^\sigma$ on a

$$a_n = \frac{(a_p)^\alpha (a_q)^\beta \ldots (a_s)^\sigma}{a_1^{\alpha+\beta+\ldots+\sigma}}$$

et P serait d'après le § 1 de rang 1.

En résumé si P est de rang 2 au moins une matrice B_p est de rang 2, p étant premier. Soit alors :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_p & a_{p^2} \dots \\ a_p & a_{p^2} & a_{p^3} \dots \\ a_{p^2} & a_{p^3} & a_{p^4} \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

de rang 2, ce qui entraîne, comme on l'a vu ci-dessus,

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_p \\ a_p & a_{p^2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

La déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_p & a_q \\ a_p & a_{p^2} & a_{pq} \\ a_p & a_{pq} & a_{q^2} \end{vmatrix}$$

est égal à un déterminant extrait de P, donc nul, ce qui entraîne en tenant compte de l'inégalité (1)

$$a_q = \alpha_q a_1 + \beta_q a_p$$
$$a_{pq} = \alpha_q a_p + \beta_q a_{p^2}$$
$$a_{q^2} = \alpha_q a_q + \beta_q a_{pq}$$

α_q, β_q étant des constantes bien déterminées.

Ces égalités peuvent être écrites symboliquement comme il suit :

$$a_q = \alpha_q a^0 + \beta_q a = (\alpha_q + \beta_q a)^{(1)}$$
$$a_{pq} = a^{(1)}(\alpha_q + \beta_q a)^{(1)}$$
$$a_{q^2} = \alpha_q(\alpha_q a_1 + \beta_q a_p) + \beta_q(\alpha_q a_p + \beta_q a_{p^2}) = (\alpha_q + \beta_q a)^{(2)},$$

en convenant de développer les calculs algébriquement et de remplacer a^n par $a_p{}^n$. On a de même

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_p & a_q \\ a_p & a_{p^2} & a_{pq} \\ a_p & a_{p^3} & a_{p^2q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_p & a_q \\ a_p & a_{p^2} & a_{pq} \\ a_{pq} & a_{p^2q} & a_{pq^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_p & a_q \\ a_p & a_{p^2} & a_{pq} \\ a_{q^2} & a_{pq^2} & a_{q^3} \end{vmatrix} = 0$$

ce qui entraîne

$$a_{p^2q} = \alpha_q a_{p^2} + \beta_q a_{p^3} = a^{(2)}(\alpha_q + \beta_q a)^{(1)}$$
$$a_{pq^2} = \alpha_q a_{pq} + \beta_q a_{p^2q} = a^{(1)}(\alpha_q + \beta_q a)^{(2)}$$
$$a_{q^3} = \alpha_q a_{q^2} + \beta_q a_{pq^2} = (\alpha_q + \beta_q a)^{(3)}.$$

En continuant de la même manière on arrive à la conclusion que si $n = p^{\pi} q^{\rho} \ldots s^{\sigma}$, $q, \ldots, s$, étant ou non des nombres premiers on a

$$a_n = a^{(\pi)} (\alpha_q + \beta_q a)^{(\rho)} \ldots (\alpha_s + \beta_s a)^{(\sigma)}. \tag{2}$$

Mais ces conditions sont surabondantes et nous montrerons maintenant qu'il suffit de supposer que la relation (2) est remplie pour les seuls facteurs premiers, les constantes α, β, pouvant être choisies arbitrairement.

Soit $m = p^{u} q_1^{v_1} \ldots q_i^{v_i}$ et r un nombre premier quelconque, donc

$$a_m = a^{(u)} (\alpha_{q_1} + \beta_{q_1} a)^{(v_1)} \ldots (\alpha_{q_i} + \beta_{q_i} a)^{(v_i)}$$

et

$$a_{rm} = a^{(u)} (\alpha_{q_1} + \beta_{q_1} a)^{(v_1)} \ldots (\alpha_{q_i} + \beta_{q_i} a)^{(v_i)} (\alpha_r + \beta_r a)^{(1)}.$$

Mais on a la relation algébrique

$$a^{u} (\alpha_{q_1} + \beta_{q_1} a)^{v_1} \ldots (\alpha_{q_i} + \beta_{q_i} a)^{v_i} (\alpha_r + \beta_r a) =$$

$$= \alpha_r a^{u} (\alpha_{q_1} + \beta_{q_1} a)^{v_1} \ldots (\alpha_{q_i} + \beta_{q_i} a)^{v_i} + \beta_r a^{u+1} (\alpha_{q_1} + \beta_{q_1} a)^{v_1} \ldots$$

et la relation symbolique

$$a_{pm} = a^{(u+1)} (\alpha_{q_1} + \beta_{q_1} a)^{(v_1)} \ldots (\alpha_{q_i} + \beta_{q_i} a)^{(v_i)},$$

ce qui, interprété symboliquement, donne

$$a_{rm} = \alpha_r a_m + \beta_r a_{pm}$$

d'où

$$a_{srm} = a_{s(rm)} = \alpha_s a_{rm} + \beta_s a_{prm} =$$

$$= \alpha_s \alpha_r a_m + (\alpha_s \beta_r + \alpha_r \beta_s) a_{mp} + \beta_r \beta_s a_{p^2 m}$$

et l'induction montre que si n est le produit de n_1 facteurs égaux à p et de n_2 autres facteurs premiers, pas nécessairement distincts, on a

$$a_{nm} = A_0 a_{p^{n_1} m} + A_1 a_{p^{n_1+1} m} + \ldots + A_{n_2} a_{p^{n_1+n_2} m} \tag{3}$$

les coefficients A_i ne dépendant pas de m.

Si $u = u_1 u_2$, $v = v_1 v_2$ (u_1, v_1, nombres premiers) on a

$$D = \begin{vmatrix} a_r & a_s & a_t \\ a_{ur} & a_{us} & a_{ut} \\ a_{vr} & a_{vs} & a_{vt} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_r & a_s & a_t \\ \alpha_{u_1} a_{u_2 r} + \beta_{u_1} a_{pu_2 r} & \alpha_{u_1} a_{u_2 s} + \beta_{u_2} a_{pu_2 s} & \alpha_{u_1} a_{u_2 t} + \beta_{u_1} a_{pu_2 t} \\ \alpha_{v_1} a_{v_2 r} + \beta_{v_1} a_{pv_2 r} & \alpha_{v_1} a_{v_2 s} + \beta_{v_1} a_{pv_2 s} & \alpha_{v_1} a_{v_2 t} + \beta_{v_1} a_{pv_2 t} \end{vmatrix}$$

et cela montre que le déterminant est une somme de déterminants qui gardent la première ligne de D, tandis que le nombre des facteurs premiers des indices des deux autres lignes diminue d'une unité ou un facteur différent de p est remplacé par p. Par répétition on voit que D sera une somme de déterminants de la forme

$$D_1 = K \begin{vmatrix} a_r & a_s & a_t \\ a_{p^{k_r}} & a_{p^{k_s}} & a_{p^{k_t}} \\ a_{p^{m_r}} & a_{p^{m_s}} & a_{p^{m_t}} \end{vmatrix}$$

K étant une constante. En appliquant la décomposition (3) on voit que D_1 sera une somme de termes de la forme

$$D_2 = L \begin{vmatrix} a_{p\alpha} & a_{p\beta} & a_{p\gamma} \\ a_{p^u+\alpha} & a_{p^u+\beta} & a_{p^u+\gamma} \\ a_{p^v+\alpha} & a_{p^v+\beta} & a_{p^v+\gamma} \end{vmatrix}$$

L étant une constante.

Les déterminants du type de D_2 étant nuls parce qu'ils sont extraits de B_p qui, par hypothèse est de rang 2, il en résulte que tout déterminant D est nul, donc le rang de P est < 3 et il est effectivement égal à 2 par hypothèse.

Les résultats obtenus peuvent être énoncés de la façon suivante :

VII. *Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la matrice P attachée à la suite a_n soit de rang 2 sont :*

1°. *L'existence d'au moins un nombre premier p pour lequel B_p soit de rang 2 ;*

2°. Si $n = p^u q_1^{u_1} \ldots q_i^{u_i}$ ($p_1, q_2 \ldots q_i$ *nombres premiers*) *alors*

$$a_n = a^{(u)} (\alpha_{q_1} + \beta_{q_1} a)^{(u_1)} \ldots (\alpha_{q_i} + \beta_{q_i} a)^{(u_i)}$$

les constantes α, β, étant arbitraires.

En partant de la forme symbolique des a_n et de la valeur de $F(z)$, fonction génératrice de B_p, on peut expliciter sans difficulté la valeur d'un quelconque des nombres a_n. Nous nous contenterons de remarquer que si

$$F(z) = \frac{A}{a-z} + B \text{ ou si } F(z) = \frac{A}{a-z} + \frac{B}{b-z}$$

la suite a_n est une somme de suites à matrices P de rang 1, tandis que les autres formes de $F(z)$ donnent des suites a_n qui ne peuvent pas être décomposées de cette façon.

Séminaire de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 1 Mars 1948).

SUR QUELQUES PROBLÈMES DU CALCUL DES VARIATIONS LIÉS À LA THÉORIE D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR

par

D. I. MANGERON

Les recherches variationnelles se sont élargit et approfondit pendant ces dernières décades surtout grâce aux travaux des Tonelli, Mc Shane, S. Bernstein, N. A. Kryloff, D. Hilbert, de ses écoles et d'autres mathématiciens insignes.

Parmi ces recherches ont été abordés tout récemment divers problèmes extrémaux concernant les intégrales multiples dépendant entre autres des dérivées d'ordre supérieur de la fonction inconnue.

1. Dans une série de travaux publiés dans différents recueils [1]), nous avons considérés quelques problèmes de minimisation de l'intégrale de la forme

$$\iint_R f(x, y, z(x, y), z'(x, y))\, dx\, dy$$

où $z'(x, y)$ est la *dérivée totale* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ au sens de M. Picone et les valeurs de z sont prescrites sur la frontière FR d'un rectangle R aux côtés parallèles aux axes de coordonnées.

M. M. Salvadori [2]) a poursuivit nos recherches et a établit nombreux théorèmes concernant différents critères variationaux tels d'Euler, de Legendre, Jacobi, Weierstrass,... pour les intégrales doubles non paramétriques, tout en élargissant l'analogie frappante et parfois profonde entre les problèmes qui dominent le calcul des variations d'une seule variable indépendante et les problèmes similaires où la dérivée ordinaire en est remplacée par la dérivée totale.

En nous réservant l'étude de certains problèmes variationaux pour les intégrales multiples pour un autre recueil, nous nous proposons d'énoncer ici quelques propositions ayant égard aux applications des méthodes variationnelles à la théorie d'une classe d'équations aux déri-

vées partielles d'ordre supérieur que nous avons étudiées pendant ces dernières années).

2. Soit $\mathcal{X}(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ un point de l'espace à $2n$ dimensions, Γ' l'ensemble des fonctions continues dans le domaine $R(x_i' \leq x_i \leq x_i'')$ avec ses dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $\ldots (i \neq j, i, j, \ldots = 1, 2, \ldots 2n)$ et sa dérivée totale du premier ordre

$$z' = \frac{\partial^{2n}}{\partial x_i \, \partial x_2 \ldots \partial x_{2n}}$$

satisfaisant en outre à l'inégalité

$$-N < z(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) \equiv z(\mathcal{X}) < N;$$

Γ_0' l'ensemble des fonctions de Γ' s'annulant sur la frontière FR de R; l'ensemble Γ'' de toutes les fonctions de Γ' dont la dérivée totale du premier ordre z' fait partie elle aussi de Γ'. Les fonctions de Γ'' possèdent donc la dérivée totale seconde continue. Soit enfin l'ensemble Γ_0'' des fonctions de Γ'' s'annulant identiquement sur la frontière de R.

Soit encore $A(\mathcal{X})$, $B(\mathcal{X})$ deux fonctions données de la classe Γ' et $C(\mathcal{X})$ une fonction continue dans R.

Pour toutes les fonctions de la classe Γ_0'' satisfaisant à l'équation

$$(1) \qquad L_\lambda(u) \equiv [A(\mathcal{X})\, u' + \lambda\, B(\mathcal{X})\, u]' + \lambda\, [B(\mathcal{X})\, u' + C(\mathcal{X})\, u] = 0$$

où λ est un paramètre et $A(\mathcal{X}) > 0$ ont lieu les propositions suivantes analogues aux théorèmes classiques de Hilbert-Masson concernant la détermination par les méthodes variationnelles des valeurs et des fonctions caractéristiques des divers problèmes aux limites:

I. *L'équation différentielle* (1) *admet une valeur caractéristique positive* λ_{0+} *et une valeur caractéristique négative* λ_{0-}, *dont les modules* λ_{0+} *et* $|\lambda_{0-}|$ *sont les minimums de la fonctionnelle*

$$D(f) = \int\int_R A(\mathcal{X})\, f'^2(\mathcal{X})\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{2n},$$

respectivement dans les aggregats F_1 *et* F_2 *(supposés non vides des fonctions de* Γ_0'' *satisfaisant aux conditions*

$$(2)\ H(f) = \int\int_R [2B(\mathcal{X})\, f(\mathcal{X}) f'(\mathcal{X}) + C(\mathcal{X})\, f^2(\mathcal{X})]\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{2n} = 1.$$

$$(3)\ H(f) = \int\int_R [2B(\mathcal{X})\, f(\mathcal{X}) f'(\mathcal{X}) + C(\mathcal{X})\, f^2(\mathcal{X})]\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{2n} = +1,$$

Le minimum est atteint par $D(f)$ *pour la fonction caractéristique* u_{0+} *ou* u_{0-} *du système différentiel* (1) *et*

$$1') \qquad [u]_{FR} = 0.$$

II. *L'équation différentielle* (1) *admet la* $(n+1)$*-ième valeur caractéristique positive* λ_{n+} *ou la* $(n+1)$*-ième valeur caractéristique négative* λ_{n-} *dont les modules* λ_{n+} *et* λ_{n-} *sont les minimums de la fonctionnelle*

$$D(f)=\int\int_R A(X)\, f'^2(X)\, d\tau_1\, dx_2 \ldots dx_{2n},$$

pour les fonctions f *de la classe* Γ_0'' *satisfaisant aux conditions*

$$(4)\quad |H(f)|=\left|\int\int_R [2B(X)\, f(X) f'(X)+C(X) f^2(X)]\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{2n}\right|=1$$

et

$$(5)\quad H(u_i, f)=\int\int_R \left\{B(X)[u_j f'+u_j' f]+C(X) f u_i\right\} d\tau_1\, dx_2 \ldots dx_{2n}=0,$$

$$(j=0, 1, \ldots, n-1),$$

où $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ *sont les fonctions caractéristiques des problèmes variationaux intermédiaires. Le minimum de* $D(f)$ *est atteint pour la fonction caractéristique* $(n+1)$*-ième* u_{n+} *ou bien* u_{n-}.

III. *On peut donner à ces théorèmes l'énoncé analogue aux problèmes de Maximum-Minimum de* M. Courant[4]).

Séminaire de Mathématiques
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 24 Janvier 1948)

Travaux cités

1) a. *Sopra un problema al contorno* – Rend. R. Accad. Naz. Lincei, (6), 16, 306 (1932).
b. *Eq. diff. con le caratt. reali* – Giornale di Matematiche, (3), 24, 89 (1932).
2) M. Salvadori – *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica*, Annali R. Scuola Norm. Sup. Pisa, (2), 5, 51 (1936).
3) a. *Sur certains problèmes à la frontière* – C. r. Acad. Sc. Paris, 204 (1937), 94 et 1022;
b. *Recherches sur les problèmes à la frontière*, Ce „Bulletin", II, (1947), 89.
4) R. Courant, *Zur Theorie der Eigenfunktionen* – Gött. Nachr. 81 (1919).

SUR UNE GENERALISATION DE LA FONCTION D'AIRY

par

GR. C. MOISIL

I.

Mouvements plans lents non permanents d'un liquide incompressible.

Dans le mouvement plan d'un corps déformable de densité ϱ les deux composantes de l'accélération j_x, j_y et les composantes normales σ_x, σ_y et tangentielle τ de l'effort sont liées par les équations de Cauchy

$$\begin{aligned} \varrho j_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0 \\ \varrho j_y + \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Si le corps est un liquide incompressible les composantes u, v de la vitesse sont liées par la condition d'incompressibilité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

et si le mouvement est lent, on peut prendre pour j_x, j_y les dérivées locales de la vitesse par rapport au temps

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{\partial u}{\partial t} \\ j_y &= \frac{\partial v}{\partial t}. \end{aligned}$$

Dans le cas d'un liquide visqueux incompressible on peut exprimer σ_x, σ_y, τ par des formules qui expriment la loi de Navier et Barré de Saint Venant.

$$\sigma_x = p - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_y = p - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \tag{3}$$

$$\tau = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

donc

$$2p = \sigma_x + \sigma_y$$

$$4\mu \frac{\partial u}{\partial x} = -4\mu \frac{\partial v}{\partial y} (\sigma_y - \sigma_x) .$$

Les équations (1) dans le cas d'un mouvement lent deviennent

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

$$\varrho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0. \tag{4}$$

Considérons le vecteur U dans l'espace à cinq dimensions, ayant les composantes

$$U = (u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau)$$

et la matrice

$$A(X, Y, T) = \begin{Vmatrix} \varrho T & 0 & X & 0 & Y \\ 0 & \varrho T & 0 & Y & X \\ X & Y & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Le système (4), (2) peut être écrit

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t} \right) . U = 0 . \tag{5}$$

Soit V un autre vecteur

$$V = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) .$$

Cherchons tous les vecteurs V qui donnent

$$A(X, Y, T) . V = 0 \tag{6}$$

Cette relation équivaut à

$$\varrho T\alpha + X\gamma + Y\varepsilon = 0$$

$$\varrho T\beta + Y\delta + X\varepsilon = 0$$

$$X\alpha + Y\beta = 0$$

et ce système a les deux solutions linéairement indépendantes

$$V_1(X, Y, T) = (XY^2, -X^2Y, -\varrho TY^2, \varrho TX^2, 0)$$
$$V_2(X, Y, T) = (0, 0, Y^2, X^2, -XY).$$

Puisque

$$A(X, Y, T) \cdot V_1(X, Y, T) = 0$$
$$A(X, Y, T) \cdot V_2(X, Y, T) = 0$$

on aura aussi

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot V_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 0$$
$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot V_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 0$$

donc, si Λ at Θ sont deux fonctions quelconques

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\left[V_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\Lambda + V_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\Theta\right] = 0$$

donc

$$u = \frac{\partial^3}{\partial x\, \partial y^2}\Lambda$$
$$v = -\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}\Lambda$$
$$\sigma_x = -\varrho \frac{\partial^3}{\partial t \partial y^2}\Lambda + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Theta \tag{7}$$
$$\sigma_y = \varrho \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2}\Lambda + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Theta$$
$$\tau = -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\Theta$$

satisfont les équations (4).

Réciproquement si $u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau$ satisfont aux équations (4) on voit facilement qu'on peut déterminer deux fonctions Λ et Θ telles que (7) soient satisfaites.

Remplaçons dans (3) $u, v, \sigma_x, \sigma_y, \tau$ par leurs valeurs (7) ; nous obtenons

$$4\mu \frac{\partial^4 \Lambda}{\partial x^2 \partial y^2} - \varrho \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} \tag{8}$$
$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = \mu\left(\frac{\partial^4 \Lambda}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^4 \Lambda}{\partial x^3 \partial y}\right).$$

Ces relations montrent que Λ et Θ satisfont une même équation aux dérivées partielles

$$\left(\rho \frac{\partial}{\partial t} - \mu \Delta \right) \Delta \frac{\partial^3}{\partial x \partial y} \Theta = 0 \tag{9}$$

où

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Réciproquement si A satisfait l'équation (9) on peut obtenir Θ par des quadratures. En effet (9) est la condition d'intégrabilité du système d'équations (8) considéré comme déterminant Θ. Pour le montrer cherchons les conditions d'intégrabilité d'un système de deux équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} &= A \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= 2B. \end{aligned} \tag{10}$$

Nous poserons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &= B + Z \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} &= -B + Z \end{aligned}$$

avec la fonction inconnue Z. On a donc

$$d\Theta = p\, dx + q\, dy$$

$$dp = d\frac{\partial \Theta}{\partial x} = (B + Z)\, dx + A\, dy$$

$$dq = d\frac{\partial \Theta}{\partial y} = A\, dx + (-B + Z) dy.$$

On doit donc avoir

$$[dp\, dx] + [dq\, dy] = 0$$

$$[d(B + Z)\, dx] + [dA\, dy] = 0$$

$$[dA\, dx] + [d(-B + Z)\, dy] = 0$$

en vertu de ces équations, comme l'affirme le théorème de Frobenius. La première de ces équations est verifiée si on remplace dp, dq par leurs valeurs ci-dessus: les deux autres donnent

$$\frac{\partial}{\partial y}(B + Z) = \frac{\partial A}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-B + Z) = \frac{\partial A}{\partial y}.$$

Ce srelations permettent de déterminer Z par des quadratures

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y}=\frac{\partial A}{\partial x}-\frac{\partial B}{\partial y}$$

si les conditions d'intégrabilité, obtenues en écrivant que $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$ sont remplies :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2 B}{\partial x \partial y}. \tag{11}$$

On conclut : la condition de complète intégrabilité du système (10) est (11). Si on applique cette propriété au système (8), où

$$A=\mu\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x^2}\right)$$

$$2B=4\mu\frac{\partial^4 \Lambda}{\partial x^2 \partial y^2}-\varrho\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Lambda$$

on trouve que (11) devient (9). Donc : le système (8) détermine Θ par des quadratures si Λ satisfait (9).

II.

Vibrations planes d'un corp élastique.

En appelant u, v les déplacements d'une particule, dans les équations (1) on doit poser

$$j_x=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$j_y=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

et ces relations deviennent

$$\varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial y}=0$$

$$\varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial \tau}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0 \tag{12}$$

donc avec le vecteur

$$U=(u,\ v,\ \sigma_x,\ \sigma_y,\ \tau)$$

et la matrice

$$B(X,Y,T)=\begin{Bmatrix} \varrho T^2 & 0 & X & 0 & Y \\ 0 & \varrho T^2 & 0 & Y & X \end{Bmatrix}$$

le système (12) peut être écrit

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right). U = 0. \tag{13}$$

Cherchons les vecteurs

$$W = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$$

qui donnent

$$B(X, Y, T). W = 0. \tag{14}$$

Cette équation équivaut à

$$\varrho T^2 \alpha + X\gamma + Y\varepsilon = 0$$
$$\varrho T^2 \beta + Y\delta + X\varepsilon = 0$$

et ce système a trois solutions linéairement indépendantes

$$W_1 = (-X, 0, \varrho T^2, 0, 0)$$
$$W_2 = (0, -Y, 0, \varrho T^2, 0)$$
$$W_3 = (0, 0, Y, X, -XY).$$

En procédant comme nous l'avons fait dans la première partie de ce travail, nous voyons qu'on a

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\left[W_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\Phi + W_2\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi + \right.$$
$$\left. + W_3\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\Omega \right] = 0$$

donc nous pouvons prendre

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$
$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}$$
$$\sigma_x = \varrho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \tag{15}$$
$$\sigma_y = \varrho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2}$$
$$\tau = -\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y}.$$

Or pour un corp élastique les relations entre les tensions et les déformations sont données par la loi de Hooke

$$\sigma_x = -(\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \frac{\partial v}{\partial y}$$

(16) $$\sigma_y = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x} - (\lambda + 2\mu)\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

En introduisant dans (16) les valeurs (15) on obtient :

$$\varrho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$$

(17) $$\varrho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \lambda \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}\right) = 0.$$

Ce système peut être écrit

(18) $$C\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right) F = 0 .$$

où F est le vecteur

$$F = (\Phi, \Psi, \Omega)$$

et C est la matrice

$$C(X, Y, T) = \begin{Vmatrix} \varrho T^2 - (\lambda + 2\mu) X^2 & -\lambda Y^2 & Y^2 \\ -\lambda X^2 & \varrho T^2 - (\lambda + 2\mu) Y^2 & X^2 \\ \mu XY & \mu XY & XY \end{Vmatrix}.$$

Existe-t-il une matrice H qui soit l'inverse de C, c'est-à-dire qui soit telle que

$$H.C = 1$$

où 1 est la matrice unité

$$1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

On peut facilement construire cette matrice, mais on doit remarquer que H n'est pas un polynôme en X, Y, T, mais le quotient d'une matrice K, qui est un polynôme en X, Y, T — c'est-à-dire dont les éléments sont des polynômes en X, Y, T — par le déterminant de C det. C :

$$K.C = \text{det. } C.$$

Or $K = K(X, Y, T)$ et det. $C = P(X, Y, T)$ sont des polynômes en X, Y, T et on a

$$K(X, Y, T) \cdot C(X, Y, T) = 1.P(X, Y.T)$$

donc on a

$$K\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot C\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 1.P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

donc en vertu de (18) on a

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t}\right) F = 0$$

donc Φ, Ψ, Ω satisfont une même équation aux dérivées partielles, que nous obtiendrons facilement.

En effet on a

$$P(X, Y, T) = [\varrho T^2 - (\lambda + 2\mu)(X^2 + Y^2)] \cdot [\varrho T^2 - \mu(X^2 + Y^2)]$$

donc Φ, Ψ, Ω satisfont l'équation aux dérivées partielles

$$\left[\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (\lambda + 2\mu)\Delta\right] \cdot \left[\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\Delta\right] \frac{\cdot}{\cdot} = 0. \tag{19}$$

Les équations (17) déterminent Ω par des quadratures si les conditions d'intégrabilité $\frac{\partial^3 \Omega}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 \Omega}{\partial y \partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^3 \Omega}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 \Omega}{\partial x \partial x \partial y}$ sont satisfaites, car la condition $\frac{\partial^4 \Omega}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 \Omega}{\partial y^2 \partial x^2}$ est une de leurs conséquences. Ces conditions d'intégrabilité sont

$$\begin{aligned} \varrho \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial t^2} - \mu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial y^2} \\ \varrho \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x \partial t^2} - \mu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^2 \partial y} &= (\lambda + \mu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}. \end{aligned} \tag{20}$$

Par des calculs assez longs mais qui ne présentent aucune difficulté on peut montrer que ce système en Φ peut être intégré par des quadratures si la condition (19) est satisfaite, en Ψ.

(Ambassade de
R. P. Roumanie
à Ankara)

(Reçu le 20 Février 1948)

NOTE SUR UN PROBLÈME DE L. FEJER

par

J. HORVATH

1. Léopold Fejér a posé le problème suivant [1]), que nous mettons sous une forme un peu différente mais équivalente à l'original : Étant données les valeurs $f(a) = A$ et $f(b) = B$ et la valeur moyenne $\mu(y_1, y_2)$, de quelles propriétés doit jouir $\mu(y_1, y_2)$ pour qu'on puisse construire une fonction continue $f(x)$ dans l'interval fermé $<a, b>$ qui prend les valeurs prescrites en a et b et que pour chaque $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ on ait

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \mu\left(f(x_1),\ f(x_2)\right).$$

La réponse peut être donnée à l'aide d'un théorème de Kolmogoroff et Nagumo [2]) que je vais citer sous une forme due a J. Aczél [3]) : Pour que la valeur moyenne $\mu(y_1, y_2)$ $(\alpha \leqq y_1, y_2 \leqq \beta)$ puisse être écrite sous la forme

$$\mu(y_1, y_2) = \varphi^{-1}\left(\frac{\varphi(y_1) + \varphi(y_2)}{2}\right)$$

où $\varphi(y)$ est une fonction continue et croissante au sens restreint dans l'interval $<\alpha, \beta>$, il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux conditions suivantes :

a) symétrie : $\mu(y_1, y_2) = \mu(y_2, y_1)$;

b) réflexivité : $\mu(y, y) = y$;

c) monotonie : lorsque $y_1 \leqq y'_1$ et $y_2 < y'_2$ on a

$$\mu(y_1, y_2) < \mu(y'_1, y'_2) ;$$

d) continuité : lorsque $y_1^{(n)} \longrightarrow y_1$ et $y_2^{(n)} \longrightarrow y_2$ on a

$$\mu(y_1^{(n)}, y_2^{(n)}) \longrightarrow \mu(y_1, y_2) ;$$

e) bisymétrie : $\mu(\mu(y_{11}, y_{12}), \mu(y_{21}, y_{22})) = \mu(\mu(y_{11}, y_{21}), \mu(y_{12}, y_{22}))$.

Or il est immédiat que si $\mu(y_1, y_2)$ remplit les conditions a) - e), la forme explicite de la fonction cherchée sera

$$f(x) = \varphi^{-1}\left(\varphi(A)\frac{b-x}{b-a} + \varphi(B)\frac{x-a}{b-a}\right)$$

c. à d. nous posons dans l'argument de φ^{-1} la fonction linéaire prenant les valeurs $\varphi(A)$ resp. $\varphi(B)$ dans a resp. b. (φ^{-1} désigne l'inverse de φ). Réciproquement, si $f(x)$ est la fonction en question, $\varphi(f(x))$ est une fonction linéaire.

2. Dans cette note il s'agira de la généralisation de ce problème pour le cas n-dimensionnel. Pour être plus clair nous fixerons $n = 2$, le cas de n arbitraire peut être traité d'une façon parfaitement analogue.

Soit G un domaine simplement connexe dans le plan ayant pour frontière une courbe B admettant une derivée continue, sauf peut être dans un nombre fini de points. Étant donnée la fonction continue $\psi(s)$ sur B, à quelles conditions la valeur moyenne M doit-elle satisfaire pour qu'on puisse construire une fonction $F(xy)$ continue dans $G+B$, prenant les valeurs $\psi(s)$ sur B et satisfaisant à l'inégalité

$$F(x_0, y_0) = M(F;\ x_0, y_0\ ;\ r)$$

où $M(F;\ x_0, y_0\ ;\ r)$ désigne la valeur moyenne M de la fonction $F(x, y)$ sur la périphérie du cercle autour de x_0, y_0 avec le rayon r pris comme fonction de l'angle polaire. (Nous supposons naturellement que r est si petit que le cercle soit compris dans G).

Le théorème suivant de Borge Jessen[4]) nous fournit la réponse: Supposons que la valeur moyenne $Mg(\vartheta)$ définie pour les fonctions mesurables $g(\vartheta)$ de l'intervalle $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$, dont les valeurs sont comprises dans l'intervalle fermé $<\alpha, \beta>$, remplisse les conditions suivantes:

a) symétrie: lorsque $\mu E[g(\vartheta) \geqq j] = \mu E[h(\vartheta) \geqq j]$ pour chaque j on a $Mg(\vartheta) = Mh(\vartheta)$;

b) réflexivité: $g(\vartheta) \equiv C$ implique $Mg(\vartheta) = C$;

c) monotonie: lorsque $g(\vartheta) \geqq h(\vartheta)$ et sur un ensemble de mesure positive $g(\vartheta) > h(\vartheta)$, on a $Mg(\vartheta) > Mh(\vartheta)$;

d) continuité: lorsque $g_n(\vartheta) \to g(\vartheta)$ presque partout, on a $Mg_n(\vartheta) \to Mg(\vartheta)$;

e) associativité: en définissant

$$g^{(a)}(\vartheta) = \begin{cases} M_a & 0 \leqq \vartheta \leqq a,\ M_a = Mg(a\vartheta) \\ g(\vartheta) & a < \vartheta \leqq 2\pi \end{cases}$$

on a $Mg^{(a)}(\vartheta) = Mg(\vartheta)$.

Dans ce cas il existe une fonction φ continue dans l'intervalle fermé $<a, b>$ croissant au sent restreint de sorte qu'on a:

$$Mg(\vartheta) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(g(\vartheta))\,d\vartheta\right).$$

Or, si M remplit les conditions a) - e) du théorème énoncé tout à l'heure, $M(F;\ x_0, y_0\ ;\ r)$ peut être écrit sous la forme

$$M(F;\ x_0, y_0\ ;\ r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x_0 + r\cos\vartheta,\ y_0 + r\sin\vartheta)\,d\vartheta\ .$$

Pour obtenir la fonction $F(x, y)$ en question, soit $H(x, y)$ la solution du problème de Dirichlet pour le domaine G avec les valeurs $\varphi(\psi(s))$ sur B. Dans ce cas

$$F(x, y) = \varphi^{-1}(H(x, y)),$$

car cette fonction est evidemment continue dans $G + B$ et a les valeurs $\varphi(s)$ sur B. D'ailleurs.

$$M(F;\ x_0, y_0\ ;\ r) = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\varphi^{-1}(H(x_0 + r\cos\vartheta,\ y_0 + r\sin\vartheta)))\,d\vartheta\right) =$$

$$= \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(x_0 + r\cos\vartheta,\ y_0 + r\sin\vartheta)\,d\vartheta\right) =$$

$$= \varphi^{-1}(H(x_0, y_0)) = F(x_0, y_0)$$

car, à cause du théorème de Gauss concernant les moyennes arithmétiques des fonctions harmoniques [5], on a :

$$H(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(x_0 + r\cos\vartheta,\ y_0 + r\sin\vartheta)\,d\vartheta\ .$$

Réciproquement, si $F(x, y)$ est la fonction cherchée,

$$\varphi(F(x_0, y_0)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(F(x_0 + \cos\vartheta,\ y_0 + r\sin\vartheta))\,d\vartheta$$

et conséquemment $\varphi(F(x_0, y_0))$ est une fonction harmonique $H(x,y)$ [6] qui prend les valeurs $\varphi(\psi(s))$ sur B. D'ici résulte que la fonction $F(x,y)$ est uniquement déterminée par $\psi(s)$.

3. La fonction $f(x)$ construite dans le paragraphe 1er est évidem-

ment convexe si φ est concave. Comme généralisation nous allons démontrer que la fonction $F(x, y)$ du 2d paragraphe est subharmonique lorsque φ est concave. En effet, par une inégalité bien connue [8])

$$F(x_0, y_0) = M(F; x_0, y_0; r) =$$

$$= \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(F(x_0 + r\cos\vartheta, y_0 + r\sin\vartheta)\right) d\vartheta\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x_0 + r\cos\vartheta, y_0 + r\sin\vartheta)\, d\vartheta$$

d'où on peut conclure à l'aide d'un thèorème de Littlewood [9] que $F(x, y)$ est subharmonique [10]).

Nous notons encore que le „principe du maximum et minimum" est évidemment valable pour $F(x, y)$, c. à. d. qu'elle prend sa plus grande et sa plus petite valeur dans un point de la frontière.

4. La totalité des fonctions $f(x)$ qui satisfont à l'équation fonctionnelle

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \mu\left(f(x_1), f(x_2)\right)$$

dépend de deux paramètres et peut être écrite sous la forme

$$f(x) = \varphi^{-1}(C_1 x + C_2).$$

Si φ admet une seconde derivée, cette famille consiste des solutions de l'équation différentielle de deuxième ordre

$$\varphi'(y)\, y'' + \varphi''(y)\, y'^2 = 0.$$

De même les fonctions qui remplissent l'égalité

$$F(x_0, y_0) = M(F; x_0, y_0; r)$$

ont la forme

$$F(x, y) = \varphi^{-1}(H(x, y))$$

où $H(x,y)$ est une fonction harmonique arbitraire. Si admet une seconde dérivée, cette famille est identique à celle des solutions de l'équation différentielle aux dérivées partielles de deuxième ordre [11])

$$\varphi'(z)\, \Delta z + \varphi''(z)\, (z_x'^2 + z_y'^2) = 0.$$

Faculté des Sciences
de l'Université
Budapest

(Reçu le 1 Mai 1947)

Travaux cités

1) Veress P. – *A középérték fogamárol*, Mat. és fiz. lapok 43 (1936), pp. 48–60.
2) Kolmogoroff A. – *Sur la notion de la moyenne*, Rend. Accad. dei Lincei (6), 12, (1932) pp. 388–391.
Nagumo M. – *Über eine Klasse der Mittelwerte*, Japanese Journal of Mathematics 7 (1930), pp. 71–79.
3) Aczél J. – *The notion of mean values*, Det Kongelige Norske Vidénskabers Selskabs Forhandlinger 19 (1946) pp. 83–86.
4) Jessen B. – *Bemaerkninger om konvekse Funktioner og Uligheder imellem Middelvaerdier*, Matematisk Tidsskrift B (1931) pp. 25–26.
5) voir p. ex. Kellog – *Foundations of Potential Theory*, Berlin (1929) p. 223.
6) Kellog l. c. [5]) p. 227.
7) Kellog l. c. [5]) p. 213.
8) voir p. ex. Polya – Szegő: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I.* Berlin (1925) p. 52, Aufgabe 71.
9) voir p. ex. Radó – *Subharmonic functions*, Berlin (1937) p. 7
10) cf. Radó l. c. [9]) p. 15.
11) cf. Radó l. c. [9]) p. 16.

621.313.2

SUR LA POSSIBILITÉ D'AUGMENTER LA PUISSANCE D'UNE MACHINE À COURANT CONTINU

par

CÉSAR PARTENI ANTONI et VASILE CORLĂȚEANU

1. Il peut arriver assez fréquemment qu'il soit nécessaire d'avoir un moteur ou une génératrice à courant continu d'une puissance plus grande. Dans ce cas, en général, on envisage la solution la plus commode et la plus naturelle, à savoir le changement de la machine par une autre qui puisse fournir la puissance demandée. Maintenant, il arrive assez couramment que, même en disposant de l'argent que nécessite une telle opération, on ne trouve pas la machine dont on a besoin. Mais la dépense exigée par le changement d'un grand nombre de moteurs, s'il s'agit par exemple d'un réseau de tramways ou de chemin de fer, peut devenir parfois très onéreuse. Dans ces hypothèses, il arrive qu'on se pose la question de savoir s'il n'est pas possible d'augmenter les puissances des machines existantes en leurs faisant subir certaines modifications.

Dans cette étude nous nous proposons justement d'examiner s'il est possible d'augmenter la puissance d'une machine à courant continu. On verra les possibilités qu'il existe d'atteindre le but proposé et dans quelles conditions fonctionnera la machine transformée.

2. Pour modifier la puissance d'une machine à courant continu nous examinerons successivement les hypothèses suivantes:

a) L'inducteur et la vitesse restent inchangés et l'induit subira toutes les modifications.

b) L'induit et la vitesse restent les mêmes et l'inducteur sera modifié suivant les besoins.

c) L'induit et l'inducteur seront modifiés à la fois

d) L'induit et l'inducteur ne subissent aucun changement.

Il est bien entendu que dans tous les cas les parties en fer de

l'induit et de l'inducteur resteront les mêmes et seulement les bobinages subiront des modifications suivant le cas considéré.

3. Prenons la première hypothèse :

On garde le même inducteur et le même fer de l'induit ; nous sommes libres d'effectuer n'importe quelle transformation sur le bobinage de l'induit à condition d'obtenir une puissance P_1 plus grande que la puissance P de la machine, telle qu'elle fonctionnait avant cette tranformation.

A1. *Puissance de la machine.*

Soit qu'il s'agisse d'une génératrice ou d'un moteur à courant continu, on peut mettre la puissance sous la forme :

$$P = EI$$

avec :

E la force électromotrice en volts et

I le courant fourni en ampères.

A son tour, la f. é. m. peut être remplacée par sa valeur bien connue :

$$(1) \qquad E = \frac{N n \Phi}{60.10^8} \cdot \frac{p}{a},$$

où :

N est le nombre de conducteurs,

n la vitesse en t/m,

$2p$ le nombre de pôles,

$2a$ le nombre de circuits dérivés et

Φ le flux.

La puissance P devient :

$$P = \frac{N n p \Phi I}{60.10^8 a}.$$

Le flux peut être écrit sous la forme :

$$\Phi = \frac{F}{R} = \frac{\frac{4\pi}{10}}{R} \Sigma n_x i_x$$

où : F est la force magnétomotrice,

n_x le nombre de spires par double champ polaire suivant la nature de l'excitation,

i_x le courant correspondant,

R la réluctance du circuit magnétique. Cette réluctance reste

constante parce que le circuit fer n'a pas été changé en ce qui concerne les dimensions.

$\Sigma n_x i_x$ représente la somme des ampères-tours produits dans la machine par les enroulements d'excitation.

Dans le cas le plus général nous pouvons avoir deux excitations, l'une shunt et l'autre en série. On peut mettre le flux sous la forme suivante :

$$\Phi = C_{sh}\, i + C_s\, I \tag{2}$$

où :

C_{sh} et C_s sont des constantes et

i le courant dans l'enroulement en dérivation.

L'expression de la puissance P devient :

$$P = \frac{p\, N n\, I (C_{sh}\, i + C_s\, I)}{60.10^8\, a} \tag{3}$$

dans le cas des machines compound.

Pour les machines shunt, on a $C_s = 0$ et pour les machines série $C_{sh} = 0$.

Notre problème est d'étudier les possibilités pour obtenir une autre puissance P_1 avec la condition $P_1 > P$.

Soit :

$$P_1 = \alpha P \qquad \text{avec} \qquad \alpha > 1.$$

Pour le rapport α, nous avons, avec des machines à excitation compound :

$$\alpha_c = \frac{P_1}{P} = \frac{N_1 n_1\, a\, I_1}{N n\, a_1\, I} \cdot \frac{C_{sh}\, i + C_s\, I_1}{C_{sh}\, i + C_s\, I}. \tag{4}$$

Pour les machines à excitation en dérivation, on a :

$$\alpha_{sh} = \frac{P_1}{P} = \frac{N_1\, n_1\, a\, I_1}{N\, n\, a_1\, I} \tag{5}$$

et pour les machines à excitation en série :

$$\alpha_s = \frac{P_1}{P} = \frac{N_1 n_1\, a}{N\, n\, a_1} \left(\frac{I_1}{I} \right)^2. \tag{6}$$

A2. *Charge électrique.*

Nous savons que dans une machine à courant continu le courant dans une dérivation J, est :

$$J = \frac{I}{2a}$$

et en introduisant $\varkappa$ le nombre d'ampères-conducteurs par centimètre de périphérie de l'induit :

$$\varkappa = \frac{NI}{2a\pi D} \tag{7}$$

où D est le diamètre, on a :

$$\alpha_c = \frac{N_1 J_1}{NJ} \cdot \frac{n_1}{n} \cdot \frac{C_{sh}\, i + C_s I_1}{C_{sh}\, i + C_s I} = \frac{\varkappa_1 n_1}{\varkappa n} \cdot \frac{C_{sh}\, i + C_s I_1}{C_{sh}\, i + C_s I}.$$

Cette relation nous montre qu'il est possible d'avoir $\alpha_c > 1$ et par conséquent une puissance plus grande quand on augmente $\varkappa$, c'est-à-dire quand la charge électrique de la machine est plus importante.

Mettons :

$$\frac{N_1}{N} = \lambda \quad \frac{J_1}{J} = \xi \quad \frac{I_1}{I} = \zeta \quad \frac{a_1}{a} = \tau \tag{8}$$

et observons qu'à tension constante $\zeta = \alpha$.

La valeur de α_c peut être mise sous la forme :

$$\alpha_c = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{C_{sh} \dfrac{i}{I} + C_s \zeta}{C_{sh} \dfrac{i}{I} + C_s} \lambda \xi .$$

Considérons constants les rapports $\frac{i}{I}$ et $\frac{n_1}{n}$. Pour avoir $\alpha_c > 1$, on doit satisfaire à la condition :

$$C' \left(C_{sh} + C_s \zeta \right) \lambda \xi > 1 \quad \text{avec} \quad C' = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{1}{C_{sh} \dfrac{i}{I} + C_s} .$$

Par conséquent on peut avoir différentes possibilités par le jeu des valeurs à donner à ζ, λ et ξ pour remplir cette condition. Il n'est pas nécessaire que toutes ces valeurs soient plus grandes que l'unité ; par conséquent il suffit de prendre le courant plus grand, même en diminuant le nombre de conducteurs et on peut arriver au résultat voulu.

A3. *Nombre de conducteurs.*

Pour examiner de plus près cette question, considérons β, le facteur d'utilisation de l'espace existant dans les encoches, rapport entre le volume des conducteurs et le volume des entailles :

$$\beta = \frac{V\text{cond}}{V\text{ent}} = \frac{NL(s+\varepsilon)}{u_2 h L} = \frac{N(s+\varepsilon)}{u_2 h}$$

où :

L est la longueur de la machine,

h la hauteur de l'entaille,

u_2 l'ouverture de l'entaille,

s la section d'un conducteur et

ε la section de l'isolement (du conducteur et de l'encoche, rapportée à un seul conducteur).

Nous savons qu'on a toujours $\beta < 1$.

En passant à la puissance P_1 nous aurons :

$$\beta_1 = \frac{N_1 (s_1 + \varepsilon_1)}{u_2 \, h}.$$

Le rapport de ces coefficients sera :

$$\beta' = \frac{\beta_1}{\beta} = \frac{N_1}{N} \cdot \frac{s_1 + \varepsilon_1}{s + \varepsilon}.$$

Nous avons vu plus haut que l'agrandissement de la puissance nécessite soit un courant et par suite une section plus grande, soit un nombre de conducteurs plus important. Il faut donc que le rapport β_1 s'approche autant que possible de l'unité ; cela veut dire qu'il faut utiliser des isolants de meilleure qualité pour pouvoir réduire ε. Avec les nouvaux isolants qu'on emploie maintenant on peut gagner une place importante et augmenter la puissance [1]).

Introduisons les densités de courant, respectivement γ et γ_1. La ralation de β' devient :

$$\beta' = \frac{\frac{J_1}{\gamma_1} + \varepsilon}{\frac{J}{\gamma} + \varepsilon} \lambda.$$

Pour augmenter β' il faut prendre une valeur plus grande pour le rapport $\frac{J_1}{\gamma_1}$. Si la densité de courant restait constante, pour un $J_1 > J$, il faudrait prendre une section plus grande $s_1 > s$. Pour satisfaire à cette condition il faut avoir la place disponible. Dans la plupart des cas on serait obligé d'admettre une densité plus grande $\gamma_1 > \gamma$, de façon que le rapport $\frac{J_1}{\gamma_1}$ subisse seulement une petite augmentation, faute de place pour l'agrandissement de la section. Il ne faut pas oublier que des fois N_1 doit être aussi plus grand que N et par conséquent on aurait encore une demande de place supplémentaire.

Il est possible d'augmenter le produit $N_1 J_1$ par rapport à $N J$, en

1) F. Beldi, *Die Wicklungsisolation im Grossmachinenbau*, Bull. Ass. suisse electr. **39**, 1948, 329–335.

diminuant N et en augmentant par conséquent la place disponible pour avoir une section s_1 plus importante et un courant beaucoup plus grand (§A4). La modification du nombre de conducteurs, tout en gardant la même tension aux bornes, peut être réalisée par le changement du type du bobinage. De la relation fondamentale de la f. é. m. (*1*) on déduit que N et le nombre de circuits dérivés $2a$, varient dans le même sens. Dans cette situation, si la densité de courant ne change pas on peut avoir un courant plus fort.

L'augmentation de la charge électrique $\varkappa$ et de la densité de courant γ est dans un rapport étroit avec les possibilités de refroidissement de la machine que nous discuterons plus tard.

A4. *Bobinage.*

Il peut apparaître comme nécessaire de changer le type de bobinage.

L'expression (3) montre que l'augmentation de la puissance P peut être obtenue en modifiant N, I ou a. Ces éléments ne sont pas indépendants les uns des autres. En effet, le changement de la nature du bobinage, donc la modification de a, conduit à la modification du courant I (pour une valeur constante du courant J dans les conducteurs) et même du nombre de conducteurs, parce qu'il ne faut pas oublier la condition de garder constante la f. é. m. E.

Considérons la formule générale du bobinage:

$$y = \frac{ms \pm ac}{p}$$

avec:

y le pas résultant,
s le nombre d'éléments actifs,
m le nombre de pas polaires, en général égal à l'unité,
c le nombre des éléments actifs d'une bobine; $c = 2$ pour l'enroulement en tambour.

Avec ces observations:

$$y = \frac{s \pm 2a}{p}. \tag{9}$$

Pour avoir $\alpha_c > 1$, la relation (4) combinée avec (8), nous conduit à la condition:

$$C' \left(C_{sh} \frac{i}{I} + C_s \zeta \right) \lambda \frac{\zeta}{\tau} > 1.$$

Cette relation nous montre qu'il faut augmenter N et I et diminuer le nombre de circuits dérivés a.

Avec un enroulement série-parallèle, on peut toujours réduire le

nombre de circuits dérivés et d'avoir $a_1 < a$. En échange il faut prendre $N_1 < N$ pour avoir la même tension (1) à flux constant. Par la réduction de a et pour le même courant total I, le courant par dérivation J augmente, et c'est une question de refroidissement, si l'on pouvait garder la même section du conducteur avec la nouvelle densité de courant $\gamma_1 = \gamma \frac{a}{a_1}$. Autrement il faut réduire γ_1 et augmenter la section du conducteur, $s_1 > s$.

Si l'on prend en considération le produit NI, il est possible de diminuer N, d'augmenter I et d'avoir à la fin $N_1 I_1 > NI$. Pour réaliser cette condition il faut obtenir, par la réduction du nombre de conducteurs, une place suffisante pour augmenter leur section dans une proportion telle qu'on réalise la condition exprimée par l'inégalité précédente.

Supposons :

$$\frac{N_1}{N} = \lambda < 1 \quad \text{et} \quad \frac{s_1}{s} > \frac{1}{\lambda},$$

c'est-à-dire qu'on augmente la section des conducteurs dans un rapport plus grand que celui dans lequel on a diminué leur nombre. Cela veut dire que par la réduction du nombre de conducteurs, on est en mesure de gagner une certaine place, occupée auparavant par l'isolement et d'agrandir par conséquent la section des nouveaux conducteurs. En même temps, si l'on peut prendre aussi $\gamma_1 > \gamma$, il en résulte $\frac{I_1}{I} >> \frac{1}{\lambda}$ et donc $\frac{N_1 I_1}{NI} = \lambda\zeta > 1$.

Il y a deux problèmes à résoudre : d'une part essayer de gagner de la place en utilisant des isolants d'une qualité meilleure et par conséquent de plus petite épaisseur et d'autre part améliorer la ventilation pour pouvoir augmenter γ. On réalise aussi la condition précédente, en utilisant des isolants qui tolèrent une température plus haute et qui permettent d'augmenter la densité du courant [1]). De la solution favorable des conditions précédentes résultera la possibilité d'augmenter la puissance de la machine P.

Considérons maintenant les machines avec des induits à enroulements en série simple.

Dans ce cas la nature de l'enroulement ne peut plus être changée, car $a = 1$ par définition. On peut, tout en conservant l'enroulement

1) L. Metzger. - *Remplacement des produits micacés dans la construction électrique*. Bull. Soc. Fr. des El., 1941, 184-203.

série simple, modifier le nombre de conducteurs. Il est bien entendu que, comme dans le cas précédent, par ces changements de l'enroulement on peut arriver à des bobinages dyssymétriques. Si on consent de pareils enroulements il est certain qu'on peut faire n'importe quel changement. Nous savons d'autre part, que les bobinages dyssymétriques ne sont pas recommandables à cause des difficultés qu'ils peuvent produire dans le fonctionnement général de la machine et en particulier en ce qui concerne la commutation.

En tenant compte de l'exposé précédant, si l'on peut augmenter I, en respectant les conditions d'échauffement, on peut arriver à un agrandissement du rapport α.

Supposons maintenant que la machine soit bobinée en parallèle (simple ou multiple).

Les pas du bobinage seront :

$$y_{1,2} = \frac{s \pm b}{2p} \pm \frac{a}{p} \tag{10}$$

où b est un nombre entier.

Avec l'enroulement parallèle multiple, pour avoir $a_1 < a$ il faut réduire le rapport $\frac{a}{p}$ en le diminuant d'unité en unité, parce qu'il doit toujours rester un nombre entier.

Tout ce que nous avons dit sur les enroulements séries-parallèles peut s'appliquer aussi dans ce cas, à la différence qu'avec ce genre de bobinage on peut plus facilement arriver à un enroulement symétrique.

Avec le bobinage parallèle simple on ne peut rien changer sur la valeur de a, parce que celle-ci est égale à p, qui reste constant.

Dans ce cas il ne reste qu'à essayer des autres valeurs pour N et I, suivant les possibilités examinées auparavant.

A5. *Excitation*

Examinons maitenant l'influence des différentes sortes d'éxcitation.

Avec une machine à excitation compound, nous avons l'expression de la puissance P (3) :

$$P = \frac{n\,p\,N}{60.\,10^8\,a}[C_{sh}\,i\,I + C_s\,I^2].$$

Supposons qu'on garde le même enroulement, c'est-à-dire N et a constants et n'oublions pas que le courant d'excitation i reste aussi constant. On observe que la puissance P en fonction du courant débité I peut être représentée par une parabole (fig. 1a). Seule la partie positive de la parabole pour des valeurs positives du courant nous

intéresse, parce que c'est la seule qui corresponde à une fonctionnement réel de la machine.

Cette hypothèse est réalisable avec un section différente pour le conducteur, si cela est possible, ou avec une densité de courant plus grande compatible avec un refroidissement convenable.

Quand N et a varient en même temps avec le courant I, on peut mettre l'expression de P sous la forme :

$$P = NJ(C_1 + C_2 I).$$

Par conséquent la puissance P d'une machine à excitation compound, varie avec la charge électrique NJ, ce que nous savons déjà, mais plus vite que celle-ci à cause du binôme qui entre comme facteur et qui contient le courant I.

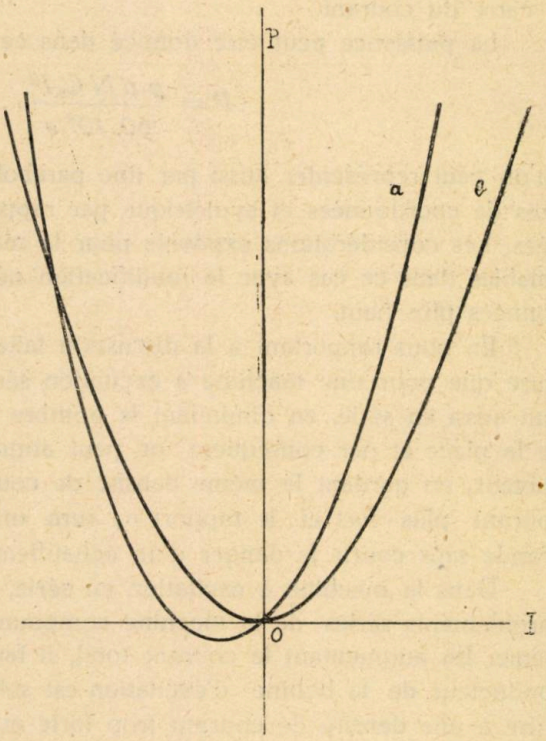


Fig. 1.

Considérons maintenant les machines à excitation en série, pour lesquelles nous avons trouvé (6) :

$$\alpha_s = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{N_1 J_1}{NJ} \cdot \frac{I_1}{I}.$$

Dans ce cas l'intérêt pour l'augmentation du courant devient plus important. Cette fois-ci le rapport α_s varie avec le produit du courant J qui circule dans les enroulements de l'induit par le courant total fourni I.

Avec des bobinages en série, $a_1 = a = 1$, la relation précédente devient :

$$\alpha'_s = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{N_1 I_1^2}{N I^2}.$$

C'est le cas des moteurs de traction pour les tramways et de la

grande traction à courant continu avec une puissance modérée et une tension assez importante. On voit, pour ce cas spécial, qu'une augmentation du courant conduit à un accroissement du coefficient α avec le carré du courant.

La puissance peut être donneé dans ce cas par la valeur :

$$P = \frac{p\, n\, N\, C_s\, I^2}{60.\ 10^8\ a},$$

qu'on peut représenter aussi par une parabole passant par l'origine des axes de coordonnées et symétrique par rapport à l'axe P des ordonnées. Les considérations exposées pour la machine compound restent valables dans ce cas avec la modification nécessaire pour les formules données plus haut.

En nous rapportant à la discussion faite au § A4, on peut conclure que pour une machine à excitation série et enroulement de l'induit aussi en série, en diminuant le nombre de conducteurs, on gagne de la place et par conséquent on peut augmenter la section du conducteur, en gardant la même densité de courant. On obtient donc un courant plus fort et le rapport α_s aura une valeur beaucoup plus grande sans courir le danger d'un échauffement exagéré.

Dans la machine à excitation en série, comme d'ailleurs pour les enroulements séries de la machine compound, il surgit encore un problème. En augmentant le courant total, il faut vérifier si la section du conducteur de la bobine d'excitation est suffisante pour ne pas conduire à une densité de courant trop forte et à un échauffement dangereux. Il peut arriver qu'il soit nécessaire de modifier aussi la section du cuivre de l'inducteur ou de mettre un shunt pour diminuer le courant. Il faut vérifier en même temps les nouvelles inductions en tenant compte des eventuelles saturations du circuit fer, qui peuvent intervenir.

Nous discuterons plus tard d'une façon plus ample toute cette situation.

Pour les machines à excitation en dérivation nous avons trouvé la relation (5) :

$$\alpha_{sh} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{N_1\, J_1}{NJ} = \frac{n_1}{n}\, \lambda\, \xi\ .$$

On déduit que pour une machine de ce type, on peut augmenter la puissance par l'agrandissement de la charge électrique NJ, que nous avons discutée (§A2), de façon à réaliser $\lambda\, \xi > 1$.

A6. *Tenston de la machine.*

La variation de l'excitation pour les machines à excitation en

série et compound peut conduire à une nouvelle valeur pour la f. é. m. E, donnée par la relation (1).

En effet, suivant les discussions précédentes, nous avons vu qu'il est possible de diminuer a et N et d'augmenter Φ. Pour la marche en génératrice, admettons qu'on garde la même vitesse n, imposée par la machine d'entraînement. S'il y a un accouplement direct ou par engrenages on ne peut plus changer n. Avec une transmission par courroie, en cas de nécessité absolue, on peut songer à une modification des poulies pour arriver à la vitesse voulue.

L'augmentation du flux Φ n'est possible que dans des limites assez étroites, par suite de la saturation de certaines portions du circuit magnétique, en tenant compte des inductions assez élevées qu'on emploie dans la construction actuelle des machines électriques.

Par un choix convenable des valeurs admises pour N, Φ et a on peut garder la même valeur pour la f. é. m. E, en supposant n constant. Si cette condition ne pouvait pas être réalisée, on doit envisager un changement de la vitesse n, si la situation locale le permet.

Quand on arrive à une tension trop grande, pour la ramener à la valeur fixée on peut faire intervenir soit le rhéostat propre, soit un rhéostat supplémentaire.

Pour une machine fonctionnant en moteur, il n'y a plus de condition strictement imposée pour la vitesse n. Même quand on demande une certaine vitesse pour un moteur, on peut toujours l'obtenir en agissant sur le rhéostat de champ.

A7. *Couple.*

Le couple C de la machine dans le fonctionnement en moteur sera de la forme :

$$C = \frac{P}{\omega} \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi n}{60}.$$

A vitesse constante et avec une autre puissance P_1, on a :

$$\frac{C'}{C} = \frac{P_1}{P} = \alpha$$

et par conséquent le couple suit la même variation que le rapport α et la puissance P.

A8. *Collecteur*

Jusqu'ici on n'a pas parlé du collecteur. On suppose qu'il reste le même dans cette transformation de la machine.

Si on a changé le nombre de conducteurs N de la machine,

on aura un autre nombre de spires z entre deux lames du collecteur.

$$2z = \frac{N}{k_1} \tag{11}$$

où k_1 est le nombre de lames au collecteur.

Avec N_1 conducteurs nous aurons z_1 spires :

$$z_1 = z\frac{N_1}{N} = z\lambda .$$

En même temps on doit avoir aussi la relation :

$$2z_1 = \frac{N_1}{k_1} .$$

Il faut choisir N_1 de façon que z_1 soit un nombre entier ou $\frac{1}{2}$.

Si N_1 augmente il faut faire attention à ce que z_1 ne prenne pas des valeurs trop grandes qui pourraient conduire à une tension caractéristique exagérée et par conséquent à des difficultés de commutation.

En augmentant le courant de la machine, il faut vérifier si la surface des balais est suffisante pour ne pas dépasser la limite de la densité de courant admise pour la qualité employée. Dans l'hypothèse que cette limite est atteinte, il faut recourir à des autres qualités de charbon qui admettent une densité de courant plus importante. En toute extrémité, on envisagera, si aucune autre solution n'est possible, la modification des porte-balais pour agrandir la surface des balais.

On doit vérifier également le refroidissement du collecteur avec les nouvelles pertes produites par un autre courant et une autre qualité de balais.

A9. *Tension entre lames*

Avec les hypothèses admises pour la transformation dont nous nous occupons, la tension moyenne entre deux lames du collecteur,

$$e_{moy} = \frac{2pE}{k_1},$$

ne subit aucun changement.

A10. *Commutation.*

Examinons maintenant la question de la commutation, pour nous rendre compte si, avec les transformations qu'on veut opérer sur la machine, elle deviendrait plus difficile ou non.

Pour évaluer la qualité de la commutation, prenons la relation qui donne la tension caractéristique suivant le Prof. Mauduit : [1])

1) A. Mauduit : *Machines électriques*, Dunod à Paris, 1931, t.I, p. 241.

(12) $$e_\gamma = 0{,}04\left(10\xi L\frac{u_1}{u} + \gamma_e \lambda_s\right) z\varkappa f\tilde{\omega}^2 \text{ volts},$$

avec :

$$\xi = \frac{0{,}05}{1-\beta} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{b}{\tilde{\omega}},$$

où :

b est l'arc polaire en *dm*,

$\tilde{\omega}$ le pas polaire en *dm*,

L la longueur axiale de la machine en *dm*,

$$\gamma_e = 0{,}46 \log\frac{l_s}{d_s} - 0{,}1$$

l_s la longueur de la tête de bobine en cm,

d_s le diamètre du cercle circonscrit à une section en cm,

$$\lambda_s = \frac{l_s}{\tilde{\omega}} \quad \text{et} \quad l_s = L_1 + \frac{\tilde{\omega}}{\sin\alpha'}$$

L_1 la portion rectiligne du conducteur en dehors du fer de l'armature,

$\varkappa$ est exprimée en centaines,

$f = \frac{np}{60}$ exprimée en centaines,

$2u$ le pas dentaire à la périphérie de l'induit,

$2u_1$ le pas dentaire au point où s'échappe le flux qui entre dans la commutation.

Nous avons pris $\tilde{\omega}$ pour la distance du pas de l'enroulement en prenant en considération le fait que toute variation du nombre de conducteurs entraîne un changement dans la valeur de ce pas. Mais toujours le pas de l'enroulement doit être choisi de façon qu'il mette en série deux conducteurs qui se trouvent dans les axes de deux pôles, à la différence près du pas dans le champ, qui en général est assez réduit.

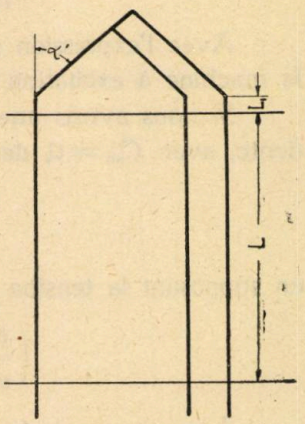


Fig. 2.

γ_e et λ_s, par l'intermédiaire de l_s varient en fonction de l'angle α' (fig. 2). Celui-ci peut avoir une autre valeur quand on change le pas de l'enroulement. Mais, même avec ce changement, on peut faire en sorte de garder la même valeur pour α', suivant le schéma de la fig. 2.

Ces conditions étant remplies, on peut regarder comme une constante la partie suivante de la formule de e_γ :

$$C_3 = 0{,}04\left(10\xi L\frac{u_1}{u} + \gamma_e \lambda_s\right) f\varpi^2,$$

en considérant que même si d_s subit une certaine variation, celle-ci n'a pas de repercussion importante sur la valeur de γ_e.

Il nous reste à examiner la tension caractéristique mise sous la forme :

$$e_\gamma = C_3 z \varkappa.$$

Remplaçons z et $\varkappa$ par leurs valeurs (11) et (7) ; on tient compte aussi de la valeur de N, déduite de (1) et de la valeur (2) du flux Φ ; on obtient :

$$e_\gamma = C_3 \frac{N}{2k_1}\cdot\frac{NI}{2a\pi D} = C_4 \frac{NP}{C_{sh} i + C_s I}$$

avec :

$$C_4 = \frac{C_3\, 60.10^8}{4\, n\, p\, k_1\, \pi D}.$$

Si la machine donne une autre puissance P_1, nous aurons une autre tension caractéristique :

$$e'_\gamma = C_4 \frac{N_1 P_1}{C_{sh} i + C_s I_1}.$$

Prenons le rapport des tensions caractéristiques :

$$\left(\frac{e'_\gamma}{e_\gamma}\right)_c = \alpha \frac{N_1}{N}\cdot\frac{C_{sh} i + C_s I}{C_{sh} i + C_s I_1}. \tag{13}$$

Avec l'expression précédente, nous nous trouvons dans le cas de la machine à excitation compound.

Si nous avons une machine à excitation série, la relation précédente, avec $C_{sh} = 0$, devient :

$$\left(\frac{e'_\gamma}{e_\gamma}\right)_s = \alpha \frac{N_1}{N}\cdot\frac{I}{I_1};$$

en supposant la tension constante, on a :

$$\left(\frac{e'_\gamma}{e_\gamma}\right)_s = \alpha \frac{N_1}{N}\cdot\frac{P}{P_1} = \frac{N_1}{N}.$$

Avec une machine à excitation en dérivation, $C_s = 0$ et on obtient :

$$\left(\frac{e'_\gamma}{e_\gamma}\right)_{sh} = \alpha \frac{N_1}{N}. \tag{15}$$

Pour la valeur particulière $\frac{N_1}{N} = 1$, c'est-à-dire avec le même nombre de conducteurs, on a :

$$\left(\frac{e'_\gamma}{e_\gamma}\right)_c = \alpha \frac{C_{sh} i + C_s I}{C_{sh} i + C_s I_1}$$

$$\left(\frac{e'_\gamma}{e_\gamma}\right)_s = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{e'_\gamma}{e_\gamma}\right)_{sh} = \alpha. \tag{16}$$

Par conséquent, pour une machine à excitation en série, la qualité de la commutation reste inchangée après transformation.

Dans le cas d'une machine à excitation en dérivation, la nouvelle valeur de la tension caractéristique $e'_\gamma = \alpha e_\gamma$, avec $\alpha > 1$, sera plus grande et la commutation deviendra plus difficile.

En considérant la tension constante, on a : $I_1 = \alpha I$ et la relation (16) devient :

$$\left(\frac{e'_\gamma}{e_\gamma}\right)_c = \frac{C_{sh} i + C_s I}{C_{sh} \frac{i}{\alpha} + C_s I}.$$

Parce que $\alpha > 1$, nous aurons $\left(\frac{e'_\gamma}{e_\gamma}\right)_c > 1$ et on déduit que la commutation sera aussi un peu plus difficile.

Dans le cas où $\frac{N_1}{N} > 1$, pour les machines à excitation shunt et compound on a $\frac{e'_\gamma}{e_\gamma} >> 1$, parce que les deux facteurs α et $\frac{N_1}{N}$ sont surunitaires. La commutation devient beaucoup plus difficile. Avec des machines à excitation en série, il n'y a qu'un seul facteur qui intervient ; la commutation sera aussi plus difficile mais la tension caractéristique accusera un accroissement moins important que dans les deux cas considérés précédemment.

Avec $\frac{N_1}{N} < 1$, donc avec un nombre plus petit de conducteurs, on ne peut plus préciser immédiatement la valeur du produit $\frac{N_1}{N} \alpha$, parce que un des facteurs est plus petit que l'unité, tandis que l'autre est plus grand.

La valeur du rapport $\frac{e'_\gamma}{e_\gamma}$ dépend de la valeur du rapport $\frac{N_1 \alpha}{N}$.

Si $N_1 \alpha > N$, nous avons $\frac{N_1}{N} < \alpha$ et $\frac{N_1 \alpha}{N} > 1$.

Pour la machine compound (13), le rapport des tensions caractéristiques devient :

$$\left(\frac{e'_\gamma}{e_\gamma}\right)_c = \frac{N_1}{N} \cdot \frac{C_{sh} i + C_s I}{C_{sh} \frac{i}{\alpha} + C_s I}.$$

Le premier rapport est plus petit que l'unité, tandis que le deuxième est plus grand. On ne peut pas préciser exactement le résultat, mais dans tous les cas la nouvelle valeur de la tension caractéristique sera assez. rapprochée de l'ancienne.

Pour la machine excitée en série, on obtient (14) :

$$\left(\frac{e'_\gamma}{e_\gamma}\right)_s < 1$$

et la commutation sera facilitée après transformation.

Dans le cas d'une machine shunt nous avons (15) :

$$\left(\frac{e'_\gamma}{e_\gamma}\right)_{sh} > 1$$

et les difficultés de la commutation seront accrues dans l'hypothèse considérée que $N_1 \alpha > N$.

Si $N_1 \alpha = N$, $\frac{N_1}{N} = \frac{1}{\alpha}$.

Avec la machine excitée en dérivation, on a $\frac{e'_\gamma}{e_\gamma} = 1$ et les difficultés de la commutation restent les mêmes qu'avant la transformation de la machine.

Avec des machines excitées en série ou compound nous aurons $\frac{e'_\gamma}{e_\gamma} < 1$, parce qu'on suppose $\frac{I_1}{I} > 1$. La commutation sera, par conséquent, facilitée.

Si $N_1 \alpha < N$, $\frac{N_1}{N} < \frac{1}{\alpha}$ et $\frac{e'_\gamma}{e_\gamma} < 1$, dans tous les cas considérés ; par conséquent la commutation devient plus facile dans cette dernière hypothèse et surtout pour la machine compound.

Si on augmente le nombre de conducteurs, $\frac{N_1}{N} > 1$. On observe immédiatement que dans cette situation la commutation sera plus difficile pour tous systèmes d'excitation de la machine.

En resumé, il faut faire attention à la nouvelle valeur de la tension caractéristique, qui résulte à la suite des transformations subies par la machine, pour ne pas dépasser des valeurs qui rendraient la commutation trop difficile sinon même impossible.

A11. *Réaction de l'induit.*

On peut calculer la réaction de l'induit suivant la formule

$$J_a = \frac{NI}{4ap} = \frac{NJ}{2p}.$$

Dans la machine transformée nous aurons :

$$J_{a_1} = \frac{N_1 J_1}{2p}.$$

En divisant ces deux relations, on obtient :

$$\frac{J_{a_1}}{J_a} = \frac{N_1 J_1}{NJ},$$

ce qui nous ramène à la discussion et aux conclusions exposées au §§ A2 et A4.

A12. *Poids du bobinage.*

Supposons que le bobinage de l'inducteur reste le même. Le poids du bobinage de l'induit sera :

$$G = d\,s\,L_b$$

où :

d est la densité du matériel et

$L_b = Nl_b$ la longueur totale du fil constituant le bobinage ;

l_b est la longueur moyenne d'un conducteur.

Le poids sera :

$$G = ds\,N\,l_b.$$

La longueur moyenne d'un conducteur peut être mise sous la forme (fig. 2) :

$$l_b = L + 2L_1 + \frac{\tilde{\omega}}{\sin \alpha'}.$$

Par la transformation de la machine, il peut arriver qu'il apparaisse nécessaire de changer aussi le type de l'enroulement. Dans ce cas nous aurons un autre pas, mais on peut toujours garder l'angle α' pour la tête de bobine, suivant le schéma de la fig. 2. En même temps le pas ne diffère pas beaucoup de la distance d'axe en axe de deux

pôles de manière qu'en moyenne on peut maintenir presque la même valeur pour l_b.

Dans cette hypothèse, le poids, après transformation, sera :

$$G_1 = d s_1 N_1 l_{b1}.$$

On peut écrire pour le cas général :

$$\frac{G_1}{G} = \frac{s_1 N_1 l_{b1}}{s N l_b}.$$

Suivant les discussions antérieures nous avons tout intérêt à augmenter le produit $s_1 N_1$ pour agrandir la puissance de la machine.

Si $N_1 < N$, on réduit le nombre de conducteurs et on peut prendre en échange une section $s_1 > s$. Mais notre désir est de réaliser la condition $s_1 N_1 > s N$. On aboutit à ce résultat parce qu'on réduit le nombre de conducteurs par encoche et par conséquent on gagne une certaine place occupée auparavant par l'isolant et qu'on peut remplacer maintenant par du cuivre actif. Il faut faire attention pour ne pas dépasser les limites admissibles pour le nombre d'ampères-conducteurs par entaille et de ne pas arriver à une commutation difficile.

Introduisons la valeur de la densité de courant :

$$\frac{G_1}{G} = \frac{N_1 I_1 \gamma l_{b1}}{N I \gamma_1 l_b}.$$

Pour augmenter la puissance de la machine nous avons vu plus haut qu'il faut prendre $\frac{N_1 I_1}{N I} > 1$. Le rapport $\frac{\gamma}{\gamma_1}$ sera ou bien égal à l'unité quand on garde la même densité de courant ou $\frac{\gamma}{\gamma_1} < 1$, quand on prend, après transformation, une densité de courant plus grande. Quant au rapport $\frac{l_{b1}}{l_b}$ nous avons dit qu'il diffère très peu de l'unité.

En général nous aurons un certain accroissement du poids G_1 après transformation. Cette conclusion est facile à comprendre. En effet pour augmenter la puissance d'une machine, en général, il faut augmenter les poids de la matière active. Vu que dans notre cas le poids du fer reste le même, il n'y a que la possibilité d'augmenter le poids du cuivre.

A13. *Pertes dans le fer.*

Pour examiner ces pertes il faut voir ce qui se passe avec le flux et avec les inductions dans les différentes parties du circuit magnétique.

Avec l'excitation en dérivation la f. m. m. et le flux restent constants même avec la transformation de la machine. Par conséquent, les

inductions gardent les mêmes valeurs et les pertes dans le fer resteront les mêmes.

Avec l'excitation en série nous avons une toute autre situation. Le courant principal qui traverse le bobinage de l'inducteur doit augmenter après la transformation de la machine. Dans l'hypothèse que nous examinons maintenant, nous avons supposé que l'inducteur ne subit aucune variation.

Il en résulte qu'une augmentation du courant dans le rapport ζ entraînera une densité de courant plus importante dans la même proportion. Il faudra étudier les pertes et voir si l'échauffement permettrait cette agrandissement du courant. Il peut arriver qu'on soit obligé de modifier la section du cuivre de l'inducteur ce qui nous conduit à un autre cas que nous examinerons ultérieurement. On peut prévoir aussi un shunt sur ce bobinage pour maintenir une certaine valeur pour le courant dans les spires de l'inducteur compatible avec la section existante.

En suppossant que l'augmentantion du courant est possible, tout en assurant un bon fonctionnement de la machine, nous aurons un nombre d'ampères-tours plus grand $n_s I \zeta$ et par conséquent un flux plus importants quand le courant devient plus grand. Nous avons la relation :

$$\Phi = C_s I$$

tant que la saturation n'intervient pas. A partir de ce moment le flux augmente très lentement, même si le courant subit des accroissements plus importants. Dans certaines portions du circuit magnétique telles que les dents de l'induit ou les pièces polaires, avec les valeurs adoptées en général pour l'induction, on arrive assez vite à la saturation

Avant la saturation, avec un flux plus grand et parce que les sections du circuit en fer restent constantes, on arrive à des valeurs plus importantes pour les inductions B dans les différentes parties du circuit magnétique de l'induit. Les pertes dans l'armature de l'induit sont de la forme :

$$P_{fer} = C_6 B^{1,6} + C_7 B^2.$$

En tenant compte de la relation précédente du flux et de la transformation qu'on désire faire à la machine, les nouvelles pertes seront, par rapport aux anciennes, dans le rapport :

$$\frac{P_{1fer}}{P_{fer}} = \frac{C_8 \zeta^{1,6} I^{1,6} + C_9 \zeta^2 I^2}{C_8 I^{1,6} + C_9 I^2}.$$

Du moment que la saturation intervient, cette relation n'est plus

vraie parce que le flux ne varie plus proportionnellement avec le courant, mais plus lentement.

Parce que, en général, $\zeta > 1$, on voit que les pertes dans le fer pour la machine transformée augmentent quand la puissance de celle-ci devient plus importante.

Il faut faire encore certaines remarques:

Une partie de la f. m. m. supplémentaire due à l'augmentation du courant doit être utilisée pour entretenir la circulation du nouveau flux dans le circuit magnétique de la machine.

Dans une machine qui fonctionne en moteur, la tension aux bornes est imposée par la tension du réseau d'alimentation. Nous avons vu qu'avec une augmentation du courant I, on réduit dans une certaine mesure le nombre de conducteurs N, de façon qu'un équilibre peut être rétabli en ce qui concerne la force contre-électromotrice.

Avec une machine génératrice il peut arriver qu'on obtienne une tension plus importante aux bornes. Mais comme le courant dans la ligne a aussi augmenté, ce supplément de tension interviendra pour compenser la nouvelle chute de tension en ligne. Si la tension restante est encore plus grande il faut actionner sur le rhéostat d'excitation pour la rétablir à la valeur imposée.

Avec une machine à excitation compound, la f. m. m. et le flux seront de la forme :

$$\Phi = C_{sh}\, i + C_s\, I.$$

Le premier terme $C_{sh}\, i$ reste constant tandis que le deuxième $C_s I$ varie avec le courant. En tout, le flux Φ varie avec le courant principal. Nous savons que la f. m. m. produite par le courant total est inférieure à celle due au courant en dérivation . Par conséqunt, on applique dans ce cas le raisonnement fait auparavant pour la machine série avec l'observation que l'influence de la variation du courant principal amène un changement moins important dans la valeur du flux produit. De toute façon, les pertes dans le fer pour la machine à excitation compound seront plus importantes quand on veut augmenter la puissance.

Pour les pertes dans le fer des dents il faut faire entrer dans les relations précédentes l'induction et la section respectives et on arrive aux mêmes conclusions.

A14. *Pertes dans le bobinage.*

Les pertes par effet Joule sont calculées par la relation:

$$P_w = RJ^2$$

où la résistance de l'enroulement est donnée par :

$$R = \varrho \frac{N l_b}{s}.$$

On peut écrire :

$$P_w = C_{12} NJ\gamma \quad \text{avec:} \quad C_{12} = \varrho l_b.$$

Après la transformation de la machine nous aurons :

$$P_{1w} = \varrho \frac{N_1 l_b}{s_1} J_1^2 = C_{12} \lambda \xi NJ\gamma_1 = C_{12} N_1 J_1 \gamma_1.$$

Prenons le rapport de ces deux valeurs :

$$\frac{P_{1w}}{P_w} = \frac{N_1 J_1}{NJ} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma} = \lambda \xi \frac{\gamma_1}{\gamma}.$$

En général, le rapport $\frac{N_1 J_1}{NJ} > 1$. Le rapport $\frac{\gamma_1}{\gamma} \geqslant 1$, suivant qu'on travaille à une densité plus grande ou avec la même densité de courant. Dans le deuxième cas le rapport des pertes augmente, dans le premier il augmente encore plus vite. Dans tous les cas, après la transformation, nous aurons des pertes par effet Joule dans le bobinage de l'induit qui seront plus importantes.

A15. *Pertes au collecteur.*

Ces pertes se divisent en deux parties : pertes par frottements et par effet Joule.

Les pertes par frottements sont calculables par la relation :

$$P_{fr} = 9{,}81 \mu p_c s_c v_c \text{ watts.}$$

où :

μ est le coefficient de frottement,
p_c la pression des balais en Kg : cm^2,
s_c la surface totale des balais et
v_c la vitesse périphérique du collecteur.

En examinant au §A8 la situation du collecteur après transformation, nous avons vu que par suite de l'augmentation du courant, il peut arriver qu'il soit nécessaire de modifier la qualité des balais et même d'agrandir leur surface par une modification des porte-balais. Dans ce dernier cas seulement la surface totale des balais s_c sera plus grande et les pertes deviendront plus importantes dans la même proportion. Aussi il faut tenir compte du nouveau coefficient de frottement μ'. Ces cas sont plutôt exceptionnels, car en général la surface et la qualité des balais resteront les mêmes et par conséquent les pertes par frottements resteront constantes.

Au collecteur nous avons aussi des pertes Joule, dues au passage du courant :

$$P_{wc} = e\,I,$$

où e représente la chute de tension par ligne de balais.

Après la transformation de la machine, ces pertes deviendront :

$$P_{twc} = e\,I_1 = e\,\zeta\,I.$$

Parce que $\zeta > 1$, le courant augmente et les pertes P_{wc} subiront la même variation, dans le rapport des courants ζ.

A16. *Pertes mécaniques.*

Les pertes mécaniques comprennent les pertes par frottements dans les paliers et par ventilation.

Dans le fonctionnement en génératrice la vitesse reste en général constante, sauf des cas spéciaux.

En moteur on peut avoir certaines variations de la vitesse. On peut la calculer suivant la relation (21) :

Les pertes dont nous nous occupons sont données par la relation [1])

$$P_m = C_{27}|_{28}\, n^{x_1} + C_{29}\, n^3$$

où les constantes $C_{27}|_{28}$ et C_{29} sont expliquées dans l'étude citée. x_1 prend les valeurs 1 et $1{,}5$ suivant la nature des coussinets – à billes ou à bagues.

De la relation (21), on peut écrire :

$$n = \frac{C_{23}}{\Phi}.$$

En remplaçant n de la formule des pertes mécaniques, on obtient, en utilisant la relation (2) :

$$P_m = C_{27}|_{28}\left(\frac{C_{23}}{\Phi}\right)^{x_1} + C_{29}\left(\frac{C_{23}}{\Phi}\right)^3 = C_{27}|_{28}\left(\frac{C_{23}}{C_{sh}\,i + C_s\,\zeta\,I}\right)^{x_1} +$$

$$+ C_{29}\left(\frac{C_{23}}{C_{sh}\,i + C_s\,\zeta\,I}\right)^3.$$

On observe que l'augmentation de l'excitation entraîne une certaine réduction des pertes mécaniques par la diminution de la vitesse.

A17. *Echauffement de l'induit.*

Pour évaluer l'échauffement, il faut totaliser d'abord les pertes de l'induit, P_t.

---

1) César Parteni Antoni et N. Popînceanu. – *Le fonctionnement d'une machine à courant continu quand la vitesse varie.* Bull. Ec. Polyt. Bucarest, **13**, 1942, 447-465.

$$P_t = P_{fer} + \frac{L}{L + l_s} P_w ,$$

en supposant un refroidissement naturel pour les têtes de bobines.

Pour la machine transformée, nous aurons :

$$P_t = \zeta^{1,6} I^{1,6} (C_8 + C_9 \zeta^{0,4} I^{0,4}) + \frac{L}{L + l_s} C_{12} \lambda \xi N J \gamma_1 .$$

Nous avons vu plus haut (§ A13) que les pertes dans le fer augmentent quand la puissance de la machine est plus grande presque dans tous les cas ($\zeta > 1$).

Les pertes par effet Joule (§ A14) augmentent toujours dans la même hypothèse parce que $\lambda \xi > 1$ et en général $\gamma_1 > \gamma$.

Dans ces conditions les pertes totales dans l'induit seront dans tous les cas plus importantes quand la puissance de la machine est plus grande.

La surface de refroidissement S reste la même parce qu'on n'a rien changé à la machine.

L'échauffement, qu'on peut évaluer suivant la relation :

$$t^0 = C_{13} \frac{P_t}{S} ,$$

sera plus important.

Il reste à examiner si le nouvel échauffement est compatible avec la qualité de l'isolement.

Si les limites prescrites par les normes sont dépassées, il faut envisager un autre moyen pour faciliter le refroidissement de la machine.

Pour une machine ouverte ou demi-fermée, on peut prévoir plusieurs palettes sur l'arbre de l'induit, de manière à réaliser un vrai ventilateur qui peut activer le refroidissement.

Avec les machines complètement fermées ce système ne conduit qu'à une uniformisation plus facile de la température à l'intérieur de la machine sans pouvoir activer suffisamment le refroidissement.

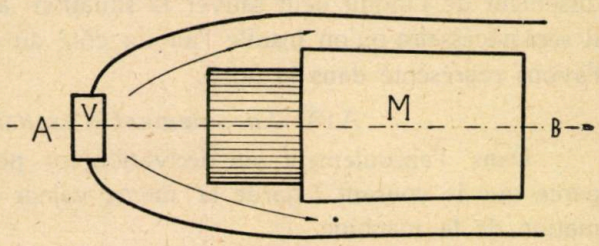


Fig. 3.

Dans ce dernier cas et pour les machines de la catégorie précédente où on ne peut pas adopter des palettes sur l'arbre, on peut recourir à un autre système, dont l'emploi est possible presque dans tous les cas.

On prévoit une cuve en tôles qui entoure la machine des trois côtés (fig 3). En V on place un ventilateur qui souffle l'air dans la direction des flèches. L'air frais balaye la machine. Si celle-ci est ouverte ou demi-fermée, l'air pénètre à l'intérieur par l'extrémité A et rend le refroidissement beaucoup plus énergique en sortant par l'extrémité B. Avec une machine complètement fermée, l'air soufflé balaye toute la surface extérieure de la machine et par cette action permet une évacuation beaucoup plus active de la chaleur.

La présence du ventilateur représente d'une part une dépense supplémentaire et en même temps une diminution du rendement. Pour réduire au minimum le deuxième inconvénient on peut prévoir un système automatique pour l'introduction et la mise hors circuit du ventilateur en fonction de l'échauffement. Cela veut dire que le ventilateur fonctionnera seulement pendant le laps de temps absolument utile pour assurer le refroidissement nécessaire de la machine.

Pour les anciennes machines, on peut certainement passer à un échauffement $t^0_1 > t^0$, en utilisant des nouveaux isolants qui tolèrent des températures finales beaucoup plus importantes que les anciennes qualités.

A18. *Echauffement du collecteur.*

Suivant le § A15, nous avons vu que les pertes au collecteur sont en général plus grandes parce que d'une part, les pertes par effet Joule augmentent et d'autre part, il peut arriver que les pertes par frottements soient aussi plus importantes dans certains cas spéciaux, quand on est obligé d'agrandir la surface des balais. La surface de refroidissement restant la même, il peut arriver que l'échauffement dépasse la limite admissible.

Seule une amélioration de la ventilation peut remédier à ces difficultés. Le ventilateur dont nous avons parlé en discutant le refroidissement de l'induit peut sauver la situation aussi pour le collecteur. Il sera nécessaire qu'on insufle l'air du côté du collecteur, comme nous l'avons représenté dans la fig. 3.

A19. *Enroulement d'excitation.*

Dans l'enroulement en dérivation les pertes restent constantes parce que le courant i garde la même valeur avec toute la transformation de la machine.

Le bobinage série, que la machine soit à excitation série, ou à excitation compound sera parcouru par le courant ζI et par conséquent nous aurons des pertes Joule augmentées dans le rapport ζ^2. Il faut s'assurer que l'échauffement ne sera pas excessif.

A20 *Pôles auxiliaires*

Le courant total traverse le bobinage de ces pôles et nous avons vu qu'il augmente dans le rapport ζ. Nous aurons par conséquent un nombre plus grand d'ampèrs-tours :

$$J_{1pa} = \zeta J_{pa}$$

tant que la saturation n'intervient pas. Parce que, par construction, le circuit magnétique de ces pôles est loin de la saturation, ils peuvent remplir leur mission de faciliter la commutation dans un intervalle de variation assez large pour le courant I. Cette nécessité est d'autant plus prononcée que la tension caractéristique e_γ augmente par suite de la transformation de la machine (§ A10) et la commutation devient d'autant plus difficile.

A partir du moment où la saturation se fait sentir, les pôles auxiliares ne constituent plus un système auto-régulateur en fonction du courant principal de la machine et on court le danger d'avoir de forts crachements au collecteur.

A21 *Enroulement de compensation*

Cet enroulement est parcouru par le courant total I de la machine. Après la transformation de celle-ci, le nombre d'ampères-tours de ce bobinage deviendra :

$$J_{1c} = \zeta J_c ;$$

avec $\zeta > 1$, il résulte $J_{1c} > J_c$; par conséquent, le nombre d'ampères-tours de compensation augmente proportionnellement avec le courant. Cette conclusion est juste tant que la saturation n'intervient pas. Il est nécessaire que J_c augmente avec le courant, parce que la réaction de l'induit se fait d'autant plus sentir que le courant devient plus important (§ A11).

De même que pour l'enroulement des pôles auxiliaires, il faut vérifier l'échauffement. Par l'agrandissement du courant, le bobinage restant le même, il y aura une perte Joule plus importante et il est nécessaire de calculer l'échauffement.

Avec une machine ouverte ou demi-fermée on peut résoudre le problème à l'aide de la ventilation forcée montrée plus haut (fig. 3).

Avec les machines complètement fermées la question peut devenir plus difficile même avec la ventilation renforcée. Il faut bien examiner le problème de l'échauffement des différentes parties à l'intérieur de la machine et suivant les cas, adopter les meilleures solutions compatibles avec un bon fonctionnement de la machine.

A22. *Rendement*

Dans une machine à courant continu, le rendement est donné par les relations suivantes, pour une génératrice :

$$\eta_g = \frac{UI}{UI + P_t} = \frac{1}{1 + \frac{P_t}{UI}}$$

et pour un moteur :

$$\eta_m = \frac{UI - P_t}{UI} = 1 - \frac{P_t}{UI}.$$

Evaluons les pertes totales P_t. Considérons le cas d'une machine compound.

En tenant compte de la relation (2) du flux, les pertes dans le fer après la transformation de la machine seront de la forme :

$$P_{fer} = C_{14}(C_{sh}\, i + C_s \zeta I)^{1,6} + C_{15}(C_{sh}\, i + C_s \zeta I)^2 .$$

Dans les mêmes conditions nous aurons les pertes suivantes :

dans l'induit : $C_{16}\, \xi^2 J^2$

au collecteur : $C_{17}\, s_c + e \zeta I$

dans l'inducteur : $C_{sh}\, i^2 + C_s \zeta^2 I^2$;

dans les enroulements des pôles auxiliaires et de compensation :

$$C_{18}\, \zeta^2 I^2 ;$$

pertes mécaniques :

$$C_{27}|_{28} \left(\frac{C_{23}}{C_{sh}\, i + C_s \zeta I} \right)^{x_1} + C_{29} \left(\frac{C_{23}}{C_{sh}\, i + C_s \zeta I} \right)^3 ;$$

pertes dans le ventilateur (s'il existe) : $C_{20}\, \varphi(\zeta I)$.

Les pertes totales seront de la forme :

$$P_{1t} = C_{14}(C_{sh}\, i + C_s \zeta I)^{1,6} + C_{15}(C_{sh}\, i + C_s \zeta I)^2 + C_{16}\, \xi^2 J^2 + C_{17}\, s_c +$$

$$+ e \zeta I + C_{sh}\, i^2 + C_s\, \zeta^2 I^2 + C_{18}\, \zeta^2 I^2 + C_{27}|_{28} \left(\frac{C_{23}}{C_{sh}\, i + C_s \zeta I} \right)^{x_1} +$$

$$+ C_{29} \left(\frac{C_{23}}{C_{sh}\, i + C_s \zeta I} \right)^3 + C_{20}\, \varphi(\zeta I) .$$

Avec une machine à excitation shunt nous prendrons $C_s = 0$, tandis que pour une machine à excitation série on aura $C_{sh} = 0$.

Quand on veut augmenter la puissance de la machine donnée, on doit prendre en général $\zeta > 1$ et aussi $\xi > 1$. Il en résulte, en examinant la relation écrite ci-dessus, que les pertes totales de la machine

transformée P_{1t} seront plus grandes que les pertes de la machine initiale P_t; nous aurons $P_{1t} > P_t$.

D'autre part la nouvelle puissance de la machine sera $\alpha P = P_1$ et les rendements deviendront :

$$\eta_{1g} = \frac{1}{1 + \frac{P_{1t}}{\alpha U I}} \quad \text{et} \quad \eta_{1m} = 1 - \frac{P_{1t}}{\alpha U I}.$$

Pour comparer les rendements il faut examiner le rapport :

$$\frac{\frac{P_{1t}}{\alpha U I}}{\frac{P_t}{U I}} = \frac{P_{1t}}{\alpha P_t}.$$

Ce rapport peut être plus petit, égal ou plus grand que l'unité. Quand nous avons $\frac{P_{1t}}{\alpha P_t} = 1$, c'est-à-dire les pertes varient dans la même proportion que les puissances, les rendements gardent les mêmes valeurs pour le fonctionnement de la machine avant et après la transformation.

Avec $\frac{P_{1t}}{\alpha P_t} < 1$, quand le rapport des pertes est plus petit que le rapport des puissances, les rendements augmentent après transformation ; il se produit au contraire une diminution du rendement dans le cas où $\frac{P_{1t}}{\alpha P_t} > 1$.

A23. *Conclusions*

De l'exposé que nous avons fait, on peut conclure qu'il est possible d'augmenter la puissance d'une machine à courant continu en gardant le même système inducteur et la même vitesse avec un certain changement de l'induit (§2a)

a) La charge électrique spécifique sera plus grande (§A2).

b) Le courant de la machine augmente (à tension aux bornes supposée constante) (§A6). On peut maintenir la même densité de courant si la section peut subir l'agrandissement correspondant. Mais, en général, il sera nécessaire de consentir à une densité de courant plus forte, ce qui amène un échauffement plus intense pour l'induit et le collecteur. Par le changement des isolants de l'enroulement de l'induit on peut arriver à admettre des températures plus importantes. Dans tous les cas, il faut s'assurer que le refroidissement naturel est suf-

fisant et dans le cas contraire l'activer soit par un ventilateur monté sur l'axe, soit par un ventilateur extérieur et un soufflage de l'air suivant la fig. 3 (§§A3, A17, A18).

c) Pour opérer tout ces changements sur le nombre de conducteurs et sur la section, il peut apparaître comme nécessaire de changer le type du bobinage (§A4).

d) Le couple de la machine, fonctionnant en moteur, varie dans la même proportion que la puissance (§A7).

e) L'excitation de la machine reste la même pour les machines à excitation shunt. Dans le cas des excitations en série ou compound, le courant augmente dans ces enroulements et il faut toujours vérifier très attentivement l'échauffement, pour qu'il ne dépasse pas les limites admissibles (§§A5, A19).

f) La tension entre lames du collecteur reste la même, à condition de garder le même collecteur (§§A8, A9).

La tension caractéristique (§A10) peut varier dans certaines limites et il faut toujours la vérifier pour ne pas dépasser les valeurs compatibles avec une bonne commutation.

g) La réaction de l'induit varie dans le même rapport que la charge électrique (§A11).

h) Le poids du bobinage sera en général plus important après transformation (§A12).

i) Les pertes dans le fer augmentent en général sauf pour les machines à excitation en dérivation cas où le flux reste constant (§A13).

Les pertes Joule dans l'induit et au collecteur augmentent (§§A14, A15); les pertes mécaniques restent les mêmes (§A16) dans une génératrice et varient dans un moteur.

j) Les enroulements des pôles principaux, sauf les bobinages en dérivation, des pôles auxiliaires et de compensation seront parcourus par des courants plus intenses et il faut vérifier le refroidissement (§§A19, A20, A21).

k) Le rendement de la machine transformée aura une valeur qui variera avec le rapport $\frac{P_{1t}}{\alpha P_t}$ et qu'il faudra examiner pour chaque cas (§A22).

4. Passons maintenant à la deuxième hypothèse (§2b) :

L'induit et la vitesse restent les mêmes, l'inducteur sera modifié suivant les besoins.

B1. Dans le cas d'une génératrice, le courant I et la vitesse n,

gardent les mêmes valeurs ; en modifiant l'excitation, on obtient une autre tension. Supposant que par un moyen quelconque on puisse augmenter l'excitation avant que la saturation intervienne, on réalise une tension plus grande. De cette manière la puissance sera plus importante, mais ayant une autre tension aux bornes de la machine, la modification peut apparaître dans certains cas sans intérêt. En effet, une augmentation de la tension, en général, n'est pas admissible sur un réseau de distribution.

On n'arrive au résultat que par la seule transformation de l'excitation d'une génératrice ; en pratique on ne peut pas aboutir à une puissance plus grande à cause de la valeur qui résulte pour la tension.

On ne peut pas songer à réduire cette tension par une résistance en série parce que la puissance gagnée par le moyen indiqué serait perdue en effet Joule.

Cette transformation peut, pourtant, devenir intéressante seulement dans le cas où, par suite d'une augmentation du courant dans une ligne, on est obligé de compenser la chute de tension correspondante. En effet, dans cette hypothèse, il peut apparaître nécessaire que la dynamo fournisse une tension plus importante, sans que le courant subisse aucune modification.

Aussi, on est obligé de recourir à une machine avec une tension plus importante dans une station pour la charge des accumulateurs, en supposant que le nombre des batteries à charger augmente au delà de la limite compatible avec la tension produite par la dynamo. On arrive à la même conclusion pour les installations électrochimiques quand on doit augmenter le nombre des bains électrolytiques.

B2. Nous avons pour la puissance P l'expression (3), où nous introduisons le nombre d'ampères-tours $n'i$ et mI pour les enroulements en dérivation et en série. Les constantes C_{sh} et C_s de la relation (3) deviennent dans ce cas C'_{sh} et C'_s ; nous aurons :

$$P = \frac{pNn\,(C'_{sh}\,n'i + C'_s\,mI)\,I}{60.10^8\,a}.$$

Après la transformation, la puissance devient P_1 et en prenant le rapport $\frac{P_1}{P}$, on a :

$$\frac{P_1}{P} = \frac{C'_{sh}\,n'_1\,i_1 + C'_s\,m_1\,I}{C'_{sh}\,n'\,i + C'_s\,m\,I}.$$

En mettant la condition $\frac{P_1}{P} = \alpha > 1$, on obtient :

(17) $\frac{n'_1 i_1 - n' i}{m - m_1} > \frac{C'_s I}{C'_{sh}} = C_{21}$ pour l'excitiaton compound,

(18) $\frac{n'_1 i_1}{n' i} > 1$ pour l'excitation en dérivation et

(19) $m_1 > m$ pour l'excitation en série.

B21. Dans le cas d'une dynamo à excitation en série, pour augmenter le nombre de spires, il faut disposer d'une place suffisante supplémentaire. On peut aussi envisager la possibilité de réduire dans une certaine proportion la section du conducteur et par suite d'augmenter la densité de courant et en conséquence gagner de la place. Naturellement cette solution n'est possible que soit en utilisant des isolants d'une qualité meilleure qui admettent une température limite plus importante, soit en adoptant une ventilation plus active.

B22. Avec une dynamo à excitation en dérivation, pour augmenter la puissance par la transformation du système inducteur, il faut remplir la condition (18). Nous avons le choix des solutions à adopter : agrandissement du nombre de spires n', du courant i et la modification des deux à la fois pour réaliser l'inégalité (18).

Prendre $n'_1 > n'$, avec le même courant i, signifie la même section du conducteur à densité de courant constante. Il faudrait avoir plus de place pour loger les nouveaux conducteurs. Si cette condition n'était pas satisfaite, il faudrait réduire la section du conducteur et travailler à une densité de courant plus importante. Nous avons vu que par cette solution nous sommes conduits à examiner si certaines conditions sont remplies, sans quoi la solution n'est pas applicable.

L'augmentation du courant $i_1 > i$, entraîne une densité de courant plus forte, avec la même section du conducteur. Le changement de cette section n'est possible que s'il y avez de place. D'autre part, l'agrandissement de la densité de courant est une question d'isolement et de ventilation, que nous avons eu l'occasion de discuter plus haut (§A2).

Modifions à la fois n' et i. Supposons que $n'_1 < n'$. Nous aurons de la place disponible pour augmenter la section du conducteur et par conséquent nous pourrons prendre $i_1 > i$. La possibilité de remplir l'inégalité (18) dépend de la proportion dans laquelle on peut augmenter le courant i, par rapport à la diminution du nombre de spires n'.

Dans l'augmentation du courant i nous sommes limité aussi du fait que la tension aux bornes de l'enroulement U est imposée :

$$U = \varrho \frac{l_{md} n' i}{s_d}$$

où :

ϱ est la résistivité du matériel employé et

l_{md} la longueur moyenne d'une spire de l'inducteur (avec excitation en dérivation).

La possibilité de l'augmentation du courant i est intimement liée à l'agrandissement de la section s_d. Seulement dans le cas où on suppose que la dynamo à excitation en dérivation est transformée en dynamo à excitation separée, la condition ci-dessus n'est plus imposée. Ce cas peut se présenter dans les circonstances suivantes. Supposons que dans une centrale électrique on essaie d'augmenter la puissance de toutes les machines et que celles-ci ont des enroulements en dérivation qui permettent l'augmentation du courant i. On impose que la tension aux bornes reste la même. Dans ces hypothèses il faut recourir à l'excitation séparée pour toutes les dynamos de la centrale. Les enroulements d'excitation seront alimentés par un groupe auxiliaire fournissant une tension $U_1 > U$, plus grande que la tension aux bornes. De cette manière on réussit à augmenter le courant d'excitation i et en remplissant en même temps la condition (18), on est conduit à l'augmentation de la puissance P de la machine. En même temps il y aura un certain accroissement de la tension aux bornes U. Il n'y aura pas d'inconvénient si le courant peut être augmenté dans une certaine proportion, en tenant compte que la chute de tension dans les circuits devient plus importante et par suite la tension aux bornes reste à peu près la même.

B23. Dans les génératrices à excitation compound, la condition pour obtenir une puissance plus grande P_1 est de satisfaire à l'inégalité (17), qu'on met sous la forme :

$$n'_1 i_1 + C_{21} m_1 > n' i + C_{21} m.$$

Une possibilité de remplir cette condition est que chaque terme du premier nombre soit plus grand que les termes correspondant du deuxième membre. Cela nous conduit aux discussion faites plus haut pour les dynamos à excitation en dérivation et en série (§§ B21, B22).

Observation. Par l'augmentation du courant d'excitation, on a un flux plus important. Dans les calculs il faut tenir compte que par l'agrandissement du flux Φ, il y aura une autre chute de potentiel magnétique le long du circuit, qu'on ne peut pas négliger. Par conséquent, une partie de la f. m. m. sera absorbée pour faire circuler le nouveau flux et seulement la différence sera utilisée dans le but proposé.

B3. *Moteur*

Considérons maintenant le fonctionnement de la machine en moteur.

B31. *Couple et vitesse*

En exprimant la puissnace sous forme électrique et mécanique, on trouve pour le couple C :

$$C = \frac{EI}{2\pi n}.$$

Cette relation nous montre qu'avec une tension d'alimentation constante, le courant restant le même, le couple varie en sens inverse avec la vitesse n. Le courant reste le même parce que dans ce cas on ne peut pas le modifier, l'induit n'étant pas changé.

En remplaçant E par sa valeur (1), on trouve une relation entre le couple et le flux de la machine :

$$C = \frac{p}{a} \cdot \frac{N\Phi I}{2\pi . 10^8}. \tag{20}$$

On observe que le coup'e est indépendant de la vitesse n du moteur, mais qu'il varie avec le flux et le courant. De ces deux variables, en réalité seulement le flux Φ peut varier, parce que nous avons vu que le courant garde la même valeur.

Pour les moteurs à courant continu, nous avons aussi le relation bien connue :

$$n = \frac{a}{p} \cdot \frac{(E - RI).\ 60.\ 10^8}{N\Phi} \tag{21}$$

qui met en évidence la liaison entre la vitesse et le flux.

Examinons maintenant les moteurs avec differentes sortes d'excitations.

Considérons d'abord les moteurs à excitation en série Comme dans les génératrices, il faut remplir la relation (19). Avec le même raisonnement, supposons qu'on réussissa à renforcer l'excitation. La relation (20) nous montre que le couple sera plus important, tandis que suivant (21) la vitesse n sera plus petite.

Dans le moteur à excitation en dérivation on peut changer aussi le courant qui circule dans les enroulements de l'inducteur. Si on réalise la condition (18) le moteur transformé aura d'autres caractéristiques. Les conclusions tirées plus haut dans le cas d'un moteur série, concernant le couple et la vitesse, restent valables, dans la même hypothèse d'une alimentation à tension constante.

Mêmes conclusions pour un moteur à excitation compound.

On constate, que par le changement du système inducteur, dans certains cas on peut obtenir un flux plus important. Il résulte une augmentation du couple, mais en échange la vitesse diminue dans la même proportion. La puissance reste par conséquent constante pour le moteur. Pourtant on peut mettre en mouvement un poids plus important, mais avec un vitesse plus petite. Nous constatons une différence essentielle par rapport au fonctionnement de la même machine en génératrice.

B4. *Pertes dans le fer*

Ces pertes sont données par la relation :

$$P_{fer} = C_{21}\, V f B^{1,6} + C_{22}\, V f^2 B^2$$

où :

C_{21} et C_{22} sont des constantes qui varient avec la qualité du matériel,

V est la volume du fer,

f la fréquence.

Par le changement de l'excitation nous aurons d'autres valeurs du flux et par conséquent, d'autres inductions dans les différentes parties du circuit magnétique.

Utilisons la valeur du flux donnée par la relation (2). Les pertes dans l'armature de l'induit seront :

$$P_{fer} = P_H + P_F = \frac{C_{21}\, f L (C'_{sh}\, n'\, i + C'_s\, m\, I)^{1,6}}{S_{fer}^{0,6}} + \\ + \frac{C_{22}\, f^2 L (C'_{sh}\, n'\, i + C_s\, m\, I)^2}{S_{fer}}.$$

Examinons séparemment les pertes par hystérésis et par courants de Foucault quand on change l'excitation des machines.

Les rapports des pertes par hystérésis et par courants de Foucault seront, quand la puissance varie :

$$\frac{P_{1H}}{P_H} = \frac{f_1}{f}\left[\frac{C'_{sh}\, n'_1\, i_1 + C'_s\, m_1\, I}{C'_{sh}\, n'\, i + C'_s\, m\, I}\right]^{1,6} \tag{22}$$

et

$$\frac{P_{1F}}{P_F} = \left(\frac{f_1}{f}\right)^2\left[\frac{C'_{sh}\, n'_1\, i_1 + C'_s\, m_1\, I}{C'_{sh}\, n'\, i + C'_s\, m\, I}\right]^2. \tag{23}$$

On constate que les deux grandes paranthèses augmentent parce qu'on doit satisfaire aux conditions (18) et (19). Dans le fonctionnement en moteur le rapport des fréquences diminue par suite de l'agran-

dissement du flux, suivant les considérations énoncées plus haut. Par conséquent les rapports des pertes varient dans des limites assez étroites. Pour les génératrices à vitesse constante la fréquence reste la même et les rapports des pertes augmentent avec l'excitation.

On aboutit aux mêmes conclusions pour les pertes dans le fer des dents avec l'observation qu'il faut prendre la section et l'induction correspondantes.

B5. *Pertes dans le bobinage de l'inducteur*

Les pertes varient pour deux raisons : d'une part, par la modification du bobinage il peut résulter une autre section du conducteur et une autre longueur moyenne pour la spire ; d'autre part, le courant d'excitation aura une autre valeur pour les machines shunt et compound.

Les pertes Joule dans le bobinage sont données par l'expression :

$$P_e = P_{e\,sh} + P_{es} = \varrho \frac{n' l_{md} i^2}{s_d} + \varrho \frac{m l_{ms} I^2}{s_s}$$

où :

l_{ms} est la longueur de la spire moyenne pour l'enroulement en série,

s_s la section du fil pour l'enroulement en série,

s_d la section du fil pour l'enroulement en dérivation.

Par le changement de l'excitation, le rapport des nouvelles pertes aux anciennes devient:

$$\frac{P_{1e\,sh}}{P_{e\,sh}} = \frac{n'_1 l_{1md} s_d}{n' l_{md} s_{1d}} \left(\frac{i_1}{i}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{P_{1es}}{P_{es}} = \frac{m_1 l_{1ms} s_s}{m l_{ms} s_{1s}}.$$

Supposons d'abord, qu'on travaille à densité constante dans le bobinage de l'inducteur.

La longueur moyenne de la spire subit une variation extrêmement faible quand on modifie la bobine inductrice ; par conséquent on peut admettre que les rapports $\frac{l_{1md}}{l_{md}} \cong 1$ et $\frac{l_{1ms}}{l_{ms}} \cong 1$.

Si on dispose d'une certaine place disponible on peut augmenter le nombre de spires : $\frac{n'_1}{n'} > 1$ et $\frac{m_1}{m} > 1$. Dans le cas contraire, pour gagner de la place par la réduction de l'espace occupé par l'isolement, on peut réduire le nombre de spires et augmenter en échange la section, ce qui permet d'adopter un courant plus fort dans la même proportion pour l'enroulement en dérivation.

Soit S_b la section d'une bobine d'excitation et s_i la section de l'isolement pour chaque conducteur. On peut écrire :

$$S_b = n'_1 s_1 + n' s_i .$$

Supposons qu'après transformation de la machine, la section de la bobine ne peut pas être changée, faute de place disponible. Avec un nombre de spires $n'_1 < n'$ et une section pour le cuivre $s_{1d} > s_d$, nous aurons :

$$S_b = n'_1 s_{1d} + n'_1 s_i .$$

De ces deux égalités on déduit :

$$n'_1 s_{1d} - n' s_d = (n' - n'_1) s_i = S_i$$

en mettant S_i la section totale de l'isolement qu'on a gagnée par suite de la modification adoptée. Cette place disponible nous permettra d'augmenter la section des spires avec :

$$\frac{S_i}{2n'_1} = s'_{1d} .$$

S'il y avait la possibilité d'accroître aussi la section de la bobine S_b, de façon à augmenter la section des spires avec une autre quantité s''_{1d}, la section totale du conducteur active sera :

$$S_{1d} = (s_{1d} + s'_{1d} + s''_{1d})\, n'_1 .$$

Supposons qu'on emploie un isolant d'une qualité meilleure, de manière à pouvoir diminuer sa section, $s'_i < s_i$, pour l'isolement de chaque conducteur.

La section totale de l'isolement gagné sera $S'_i > S_i$ et il y aura une nouvelle place disponible $\frac{S'_i - S_i}{2n'_1} = s'''_{1d}$ pour augmenter la section du conducteur.

A la fin, nous aurons pour la section totale des conducteurs actives :

$$S_{1d} = (s_{1d} + s'_{1d} + s''_{1d} + s'''_{1d})\, n'_1 .$$

A densité constante le courant initial i sera augmenté dans la proportion :

$$i_1 = i \frac{S_{1d}}{S_d} \qquad \text{où} \qquad S_d = n' s_d .$$

Avec une nouvelle valeur pour le densité de courant γ_1, nous aurons :

$$i'_1 = i \frac{S_{1d}}{S_d} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma} .$$

Les pertes correspondantes seront agrandies parce qu'elles varient avec le carré de ce courant.

Pour les enroulements en série il n'y a plus le même intérêt d'augmenter la section parce que dans ce cas on ne peut pas changer l'instensité du courant, qui reste constante et par conséquent les pertes dans l'enroulement série sont indépendantes du courant d'excitation.

Quand il est possible de consentir à une densité de courant plus importante, avec le même nombre de spires et la même section des conducteurs, nous aurons $i_1 > i$ pour l'excitation en dérivation de manière que le nombre d'ampères - tours sera agrandi et les pertes subiront un accroissement plus important, parce qu'elles varient avec le carré du courant.

Pour l'excitation en série, dans cette hypothèse, on peut employer un bobinage avec un fil d'une section moindre et par conséquent avec un nombre de spires plus grand, $m_1 > m$. Par cette voie on réussit aussi à augmenter le nombre d'ampères-tours $m_1 I > mI$. Les pertes seront plus grandes pour deux raisons : d'une part la section diminue et d'autre part le nombre de spires augmente.

B6. *Pertes Joule dans l'induit*

Ces pertes restent constantes parce qu'on suppose qu'on n'a rien changé au bobinage et au courant.

B7. *Pertes au collecteur*

Les pertes Joule au collecteur, pour les mêmes raisons, restent constantes. Les pertes par frottements peuvent varier, mais dans des limites très restreintes. Cette variation peut résulter de la modification de la vitesse de la machine quand elle fonctionne en moteur.

B8. *Pertes mécaniques*

Dans le fonctionnement en génératrice, les pertes mécaniques restent les mêmes, parce que la vitesse n'a pas été changée.

Dans le cas du moteur la vitesse peut changer et en général diminuer, quand on augmente le flux (21). Les pertes mécaniques par frottements dans les coussinets et par ventilation ont été discutées au § A16 et seront de la forme :

$$P_m = C_{27} l_{28} \left(\frac{C_{23}}{C'_{sh} \sigma n' i + C_s' \nu m I} \right)^{x_1} + C_{29} \left(\frac{C_{23}}{C'_{sh} \sigma n' i + C'_s \nu m I} \right)^3$$

où :

$$\sigma = \frac{n'_1 i_1}{n' i} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{m_1}{m}.$$

B9. *Echauffement*

Il faut étudier l'échauffement de différentes parties de la machine pour ne pas dépasser les limites prévues pas les normes.

Dans l'induit nous avons des pertes par effet Joule, qui restent les mêmes après la transformation de la machine.

Les pertes dans le fer augmentent de toute façon, mais dans une proportion plus ou moins importante suivant le fonctionnement en génératrice ou en moteur (§ B4).

Le résultat général s'écarte assez peu de la situation initiale. Pourtant il faut vérifier le refroidissement et le cas échéant, recourir aux systèmes exposés auparavant (§A17).

Au collecteur on peut négliger les variations des pertes qui peuvent surgir, étant donné leur petitesse.

Les pertes dans les bobinages des pôles principaux, doivent être examinées plus attentivement, parce que c'est ici qu'on opère les modifications les plus importantes.

Dans le cas où on craint un échauffement trop important, il faut aviser à une amélioration du refroidissement. On peut le réaliser, si on dispose d'une place suffisante, en divisant le bobinage en galettes ou en activant la ventilation avec des palettes montées sur l'axe de la machine et constituant un ventilateur. En toute extrêmité on peut recourir même à un ventilateur électrique extérieur, suivant la description donnée au §A17.

Les pertes et les échauffements des enroulements des pôles de commutation et de compensation restent les mêmes parce que les caractéristiques des conducteurs et les courants ne subissent aucune variation.

B10. *Poids du bobinage inducteur*

Dans le cas général d'une machine à excitation compound, le poids du bobinage inducteur sera :

$$G = G_d + G_s = d\,(n'\,l_{md}\,s_d + m\,l_{ms}\,s_s) = d\left(\frac{l_{md}}{\gamma_d}\,n'\,i + \frac{l_{ms}}{\gamma_s}\,m\,I\right),$$

en introduisant les densités de courant γ_d et γ_s respectivement dans l'excitation en dérivation et en série.

Après transformation, on peut prendre le rapport entre la nouvelle et l'ancienne valeur des poids que nous étudions :

$$\frac{G_{1d}}{G_d} = \frac{l_{1md}\,\gamma_d\,n'_1\,i_1}{l_{md}\,\gamma_{1d}\,n'\,i} \quad \text{et} \quad \frac{G_{1s}}{G_s} = \frac{l_{1ms}\,\gamma_s\,m_1}{l_{ms}\,\gamma_{1s}\,m}.$$

Le poids de l'enroulement en dérivation varie proportionnellement à l'inverse des densités de courant et directement avec le nombre de spires et le courant. On peut admettre que les longueurs moyennes des spires restent à peu près les mêmes.

Les mêmes conclusions pour les enroulements en série, avec la différence que le courant, qui reste constant, n'entre plus en discussion.

A densité constante $\frac{\gamma_d}{\gamma_{1d}} = 1$ et $\frac{\gamma_s}{\gamma_{1s}} = 1$; pour l'enroulement en dérivation, on doit avoir $\frac{n'_1 i_1}{n' i} > 1$ et pour l'autre bobinage $m_1 > m$. Dans les deux cas le rapport des poids sera surunitaire et le poids des enroulements, après la transformation de la machine, sera augmenté.

B11. *Tension entre lames*

La tension entre les lames du collecteur est donnée par la relation écrite au §A9.

Dans les génératrices, nous avons vu (§B1) qu'il peut arriver le cas où la tension augmente. Dans cette hypothèse, la tension e_{moy} augmentera dans la même proportion. Parce qu'il s'agit de légères modifications de la tension principale, en général il n'y a aucun danger quant à la valeur de la tension entre les lames du collecteur. Il faut pourtant faire attention seulement dans le cas où on se trouverait à la limite supérieure de la tension moyenne admissible entre les lames du collecteur, pour ne pas la dépasser. Dans cette hypothèse on court le danger des difficultés de commutation, sauf si on peut recourir à des enroulements de compensation, qui, dans ces occasions, présentent de graves inconvénients de construction.

B12. *Commutation*

On observe la valeur de la tension caractéristique donnée au § A10.

Tous les éléments composant cette relation restent constants, sauf la fréquence f. Nous avons vu, que la vitesse n peut diminuer pour les moteurs et par conséquent la fréquence f. Cela signifie qu'il y aura une certaine facilité en ce qui concerne la commutation.

B13. *Rendement*

Examinons maintenant les rendements η_g et η_m (§A22) des machines fonctionnant en génératrice et en moteur :

$$\eta_g = \frac{1}{1 + \frac{P_t}{UI}} \qquad \text{et} \qquad \eta_m = 1 - \frac{P_t}{UI}.$$

Les pertes totales seront :

Les pertes dans le fer (§§ B4, B8) peuvent être écrites aussi sous la forme suivante :

$$P_f = \delta f (C'_{sh}\, \sigma\, n' i + C'_s\, \nu\, m I)^{1,6} + \delta^2 f^2 (C'_{sh}\, \sigma\, n' i + C'_s \nu\, m I)^2$$

où

$$\delta = \frac{f_1}{f}.$$

Ces pertes pour une génératrice augmentent avec l'excitation ; dans le moteur leur variation est très limitée, accusant toutefois une légère augmentation ;

les pertes Joule dans l'induit et au collecteur et dans les enroulements de compensation et des pôles de commutation C_{24}, restent constantes ;

les pertes Joule dans l'enroulement en dérivation seront de la forme :

$$C_{30} \frac{n'_1\, i_1^2}{s_{1d}} ;$$

les pertes Joule dans les enroulements série de l'excitation augmentent et seront de la forme : $C_{25}\, \nu\, m I^2$;

les pertes par frottements au collecteur : $C_{26}\, n$;

les pertes mécaniques sont données au §B8 ;

les pertes dans le ventilateur (s'il existe) : $C_{20}\, \varphi(I)$.

Les pertes totales seront :

$$P_{1t} = \delta f (C'_{sh}\, \sigma\, n' i + C'_s\, \nu\, m I)^{1,6} + \delta^2 f^2 (C'_{sh}\, \sigma\, n' i + C'_s \nu\, m I)^2 +$$

$$+ C_{24} + C_{30} \frac{n'_1\, i_1^2}{s_{1d}} + C_{25}\, \nu\, m I^2 + C_{26}\, n +$$

$$C_{27} l_{28} \left(\frac{C_{23}}{C'_{sh} \sigma\, n' i + C'_s \nu\, m I} \right)^{x_1} + C_{29} \left(\frac{C_{23}}{C'_{sh}\, \sigma\, n' i + C'_s\, \nu m I} \right)^3 + C_{20}\, \varphi(I).$$

Dans le fonctionnement en génératrice, $\delta = 1$, $\sigma > 1$, $\nu > 1$.

Comme résultat général, on peut dire que les pertes augmentent, mais plus lentement que dans le cas de la première partie quand on a modifié l'induit.

Avec l'excitation en dérivation, on a $\nu = 0$, tandis que dans le cas de l'excitation en série, $\sigma = 0$.

Dans la marche en moteur, les pertes mécaniques diminuent légérement, δ devient plus petit que l'unité, mais assez rapproché de cette valeur.

Comme résultat final, on peut dire que les pertes totales P_{1t} aug-

mentent, par rapport aux pertes P_t avant la transformation, mais l'accroissement n'est pas trop important.

Pour la machine fonctionnant en dynamo, pour le rendement η_g les mêmes conclusions que nous avons déduites au § A22.

Dans la marche en moteur, nous avons vu que la tension et le courant restent constants et par conséquent $\alpha = 1$. En réalité, dans ce cas, la machine transformée a la même puissance, seulement on obtient d'autres valeurs pour le couple et la vitesse, résultats qui peuvent nous intéresser dans certaines occasions. Pour ce fonctionnement les nouvelles pertes totales P_{1t} sont très peu différentes des anciennes P_t.

Par conséquent, en général, les rendements η_{1m} et η_m auront des valeurs très proches.

B14. *Conclusions*

Dans l'hypothèse qu'on garde le même induit et la même vitesse et qu'on modifie le bobinage du système inducteur, on arrive aux conclusions suivantes, dans les conditions initiales admises, quand on désire agrandir la puissance d'une machine à courant continu :

a) Dans la limite de la place disponible et de l'échauffement permis on peut augmenter le nombre de spires de l'enroulement inducteur, prendre une densité de courant plus importante ou combiner ces deux solutions à la fois. Dans certains cas il apparaît comme nécessaire de recourir à l'excitation séparée (§ B2).

b) Dans le fonctionnement en moteur il peut résulter, par le changement du système inducteur, une augmentation du couple, mais il y a en même temps une diminution de la vitesse, de manière que la puissance reste constante.

Nous avons une différence principale par rapport au fonctionnement en génératrice de la même machine (§ B3).

c) Les pertes dans le fer varient très peu avec le changement de l'excitation pour le moteur et augmentent davantage pour la génératrice (§B4).

d) Les pertes dans le cuivre de l'inducteur augmentent, mais d'une manière différente, suivant le type de l'excitation (§ B5).

e) Une série de pertes restent constantes (pertes Joule dans l'induit, dans les enroulements de compensation, des pôles auxiliaires et au collecteur) ; d'autres varient très peu (pertes mécaniques) (§ B6,B7, B8).

f) L'échauffement de l'induit et du collecteur ne subit pas de variation, tandis qu'il faut le vérifier pour l'inducteur, afin de ne pas dépasser les limites prescrites et prendre les mesures nécessaires, le cas échéant (§ B9).

g) Le poids du bobinage inducteur augmente après la transformation de la machine (§ B10).

h) La tension entre les lames du collecteur et la commutation gardent à peu près les mêmes caractéristiques (§§ B11, B12).

i) La rendement de la machine, fonctionant soit comme génératrice, soit comme moteur, varie dans des limites très étroites (§ B13).

5. Considérons la troisième hypothèse (§ 2c):

L'induit et l'inducteur seront modifiés à la fois.

C1. Dans cette hypothèse on garde seulement les parties en fer de la machine et le collecteur, ayant toute liberté de changer les enroulements de l'induit et de l'inducteur.

Dans le but de réaliser une machine avec une puissance plus importante, nous commençons par la recherche du flux maximum qu'on peut produire. Le fer restant le même, il faut calculer les sections des différentes parties du circuit magnétique et de choisir les inductions maxima admissibles pour ne pas faire intervenir les phénomènes de saturation. Dans ce choix il existe pourtant une sérieuse difficulté, parce que nous ne connaissons pas, en général, les qualités magnétiques des tôles et du matériel employés dans la construction de la machine à transformer. Nous sommes donc obligés de faire des suppositions quant à la qualité du matériel et d'utiliser les courbes de magnétisation pour les matériaux que nous croyons devoir entrer dans la fabrication de la machine.

Quand on dispose de toutes les données nécessaires, on peut faire les calculs pour déterminer les éléments dont on a besoin pour se rendre compte de la manière dont fonctionnait la machine avant la transformation. Des fois, il peut arriver que le bobinage de l'induit ou de l'inducteur ou le collecteur n'existe plus et alors il est plus difficile de refaire tous ces calculs; il faut recourir à certaines suppositions pour résoudre le problème posé.

C2. *Flux*

Pour établir le flux maximum qu'on désire faire circuler dans le circuit magnétique, il faut déterminer d'abord les sections des différentes parties du circuit en fer: culasse S_c, noyau polaire S_p, dent S_d et armature de l'induit S_a. Par rapport au matériel qu'on suppose être utilisé et suivant la fréquence f qu'on peut calculer, on choisit les valeurs des inductions dans ces différentes parties du circuit magnétique.

Pour ne pas dépasser les limites de saturation il faut donner une attention toute particulière à l'induction fixée dans la plus petite section des dents de l'induit, B_{d2} et dans les noyaux polaires B_p. L'induction apparente maximum dans la région étranglée de la dent, ne

doit pas dépasser 25.000 Gauss pour des fréquences jusqu'à 15 cycles par seconde. Une fois ces valeurs choisies, on peut déduire le flux Φ_1 :

$$\Phi_1 = S_{d2} B_{d2} = S_p B_p = \cdots$$

C3. *Nombre de conducteurs et section*

De la relation (1) de la f. é. m., on déduit :

$$\frac{N_1}{a_1} = \frac{60.10^8 E}{n \Phi_1 p}. \tag{24}$$

La f. é. m. E est imposée ; la vitesse n et le nombre de pôles $2p$ sont aussi donnés ; le flux a été calculé.

On obtient une valeur pour le rapport $\frac{N_1}{a_1}$ du nombre de conducteurs au nombre de paires de circuits dérivées. Suivant les caractéristiques de la machine à transformer on peut choisir pour $2a_1$ soit la valeur qu'il avait avant la transformation, soit prendre une autre valeur jugée plus en concordance avec les nouveaux besoins. D'autre part, pour éviter des difficultés de commutation, on doit remplir la condition que le nombre d'ampères-conducteurs par entaille ne dépasse pas la valeur de 1000-1200, soit :

$$N_{1c} J_1 = 1200 \tag{25}$$

où N_{1c} est le nombre de conducteurs par entaille.

La section d'une entaille S_{1c} contient la section de tous les conducteurs $N_{1c} s_1$ et la section de l'isolement S_{1iz}, qu'on peut écrire sous la forme :

$$S_{1iz} = \Gamma N_{1c} + \Delta S_{1c} \tag{26}$$

où :

Γ et Δ sont des coefficients,

ΓN_{1c} représente la surface ocupée par l'isolement des conducteurs et

ΔS_{1c} la surface reservée à l'isolement par rapport à la masse, à l'isolement entre les bobines et pour la clavette.

En rapport avec la tension de la machine et à l'aide des différentes courbes qu'on trouve dans tous les traités de machines électriques, on déduit les isolements nécessaires et par conséquent ΓN_{1c} et ΔS_{1c}.

La surface de l'entaille sera :

$$S_{1c} = N_{1c} s_1 + S_{1iz}.$$

Remplaçons s_1 par: (27) $s_1 = \frac{J_1}{\gamma_1}$ et S_{1iz} par sa valeur (26); on a:

$$S_{1c} = N_{1c}\frac{J_1}{\gamma_1} + \Gamma N_{1c} + \Delta S_{1c}. \tag{28}$$

Les équations (25) et (28) permettent le calcul des deux inconues N_{1c} et J_1, dont les valeurs sont:

$$J_1 = \frac{1200\Gamma}{S_{1c}(1-\Delta) - \frac{1200}{\gamma_1}}$$

$$N_{1c} = \frac{S_{1c}(1-\Delta) - \frac{1200}{\gamma_1}}{\Gamma}.$$

La valeur trouvée pour J_1 ne doit pas dépasser 500-600 A.

La section du conducteur sera déterminée par la relation (27), en choisissant une valeur pour la densité de courant γ_1. Des éléments connus de la machine existente nous avons calculé la valeur initiale de γ. Suivant cette valeur, nous savons s'il est possible d'augmenter γ ou non et dans quelle proportion. Quand on n'a pas les moyens de connaître γ, on choisit une valeur entre les limites admissibles pour ne pas craindre un échauffement exagéré.

Connaissant le nombre d'évents n_{1e}, on calculera le nombre total de conducteurs de la machine:

$$N_1 = N_{1c} n_{1e}.$$

Ayant les valeurs de $\frac{N_1}{a_1}$ et N_1, on déduit a_1. Il faut toujours avoir pour a_1 une valeur entière. Dans le cas contraire on doit modifier N_1 pour arriver à ce résultat. En même temps la valeur de a_1 doit satisfaire aux conditions de bobinage qui serait éventuellement imposées.

Le courant total sera:

$$I_1 = 2a_1 J_1.$$

Pour augmenter la puissance de la machine il faut remplir la condition:

$$P_1 = \alpha P$$

ou

$$UI_1 = \alpha UI.$$

En supposant la tension constante, nous obtenons:

$$I_1 = \alpha I.$$

Introduisons dans la valeur de I_1 trouvée plus haut la relation

$$2a_1 J_1 = \alpha I;$$

On peut déduire la valeur cherchée pour α :

$$\alpha = \frac{2a_1 J_1}{I}. \tag{29}$$

La valeur de α nous montre dans quelle mesure, nous avons réussi à augmenter la puissance de la machine par la transformation qu'on essaie.

Dans l'hypothèse que a_1 soit fixé du commencement, en connaissant $\frac{N_1}{a_1}$ de l'expression (24), on peut calculer N_1 et ensuite essayer de loger ces conducteurs dans les entailles.

On connaît le nombre de conducteurs par entaille N_{1c} et la section s_1. Nous savons aussi les dimensions des encoches et donc nous sommes en situation de fixer les dimensions des conducteurs. Autant que possible on choisira parmi les dimensions normalisées et seulement dans des cas extrêmes on demandera des dimensions spéciales. En fonction de la tension de service on établit les isolements respectifs. On vérifie ensuite la manière dont on peut arranger les conducteurs dans les encoches avec l'isolement nécessaires. Le cas échéant, on modifiera les dimensions, en gardant la même section pour loger les conducteurs fixés par encoche.

C4. *Bobinage*

Nous connaissons le nombre de pôles de la machine et nous avons choisi le nombre de circuits dérivées de l'induit. Par conséquent, le type du bobinage est bien déterminé. Ayant le nombre de conducteurs, on utilise les relations (9) et (10), suivant le cas, pour déterminer les pas de l'enroulement. Avec les bobinages du type série, il peut arriver que le nombre de conducteurs ne soit pas celui réclamé pour la vérification de la relation (9). Dans ce cas, s'il est possible, on revient sur les calculs précédents pour rectifier N_1 ou on consent à un bobinage dyssymétrique.

C5. *Commutation.*

Utilisons la relation (12) de la tension caractéristique.

Dans l'hypothèse que nous examinons, on peut mettre e_γ sous la forme :

$$e_\gamma = C_3 z^x,$$

tous les autres éléments restant constants, ou même s'ils subissent de

très légères variations, l'influence sur la valeur totale est négligeable.

Remplaçons z et $\varkappa$ par leurs valeurs (11) et (7), en tenant compte de (29); on obtient :

$$\frac{e_{1\gamma}}{e_\gamma} = \alpha \frac{a}{a_1}\left(\frac{N_1}{N}\right)^2.$$

α est toujours sur-unitaire, suivant la condition initiale d'augmenter la puissance de la machine par la transformation.

Quand le type de bobinage reste le même, on a $\frac{a}{a_1} = 1$. Il peut arriver qu'on change le bobinage. Dans ce cas, avec la tension supposée constante aux bornes, on poursuit l'augmentation du courant I_1. A cette fin, on doit augmenter les deux facteurs a_1 et J_1 qui composent le courant total. Nous avons examiné les possibilités d'agrandir le courant par dérivation J_1. Il nous reste encore le choix d'un nombre plus grand de circuits dérivés $2a_1$. D'après les possibilités dont nous disposons pour l'augmentation de $2a$, il résulte un courant total plus grand. Par conséquent, en général, nous avons tout intérêt à augmenter a, $(a_1 > a)$ et le rapport $\frac{a}{a_1}$ sera sous-unitaire.

Nous avons constaté aussi que pour augmenter le courant, il est avantageux de réduire le nombre de conducteurs par encoche et d'augmenter, en échange, leur sections. Donc le rapport $\frac{N_1}{N}$ peut devenir aussi plus petit que l'unité.

Comme résultat final, on peut dire qu'en général le rapport $\frac{e_{1\gamma}}{e_\gamma}$ sera ou égal à l'unité ou plus petit, de façon que la commutation sera allégée après notre transformation.

C6. *Réaction de l'induit*

La discussion sur la réaction de l'induit, nous conduit aux mêmes résultats qu'au § A11.

Pour le collecteur les considérations énoncées au §§ A8 et A9 restent valables.

C7. *Nombre d'ampères-tours*

Nous sommes maintenant en possessions de tous les éléments pour commencer le calcul des ampères-tours nécessaires sur le système inducteur pour entretenir un flux Φ_1 dans le circuit magnétique. Il y a pourtant une grosse difficulté, parce qu'on ne connaît pas d'une ma-

nière précise la qualité du matériel employé dans la construction de la machine et les courbes de magnétisme qui s'y rapportent. Nous avons dit plus haut, que dans ce cas il faut recourir à des suppositions qui évidemment sont seulement en partie conformes aux réalités. En tenant compte de l'époque à laquelle a été construite la machine, on trouvera des courbes de magnétisme qu'on pourra utiliser avec succès.

Connaissant le flux Φ_1 et les sections S_x des différentes parties du circuit magnétique, on peut calculer les inductions respectives B_x et les ampères-tours I_x qui y correspondent. On détermine ensuite le nombre d'ampères-tours à vide :

$$I_0 = \Sigma I_x .$$

On peut tracer la courbe caractéristique à vide pour se rendre compte du degré de saturation de la machine et on passe au calcul du nombre d'ampères-tours pour la marche en charge I_c.

Suivant l'excitation de la machine (shunt, série ou compound), on détermine par les moyens connus le nombre de spires qu'il faut loger sur chaque pôle. Il faut s'assurer que la place disponible permet le placement du bobinage inducteur calculé ci-dessus.

Nous sommes maintenant en possession des éléments suivants pour la machine transformée : nombre de spires n'_2 du bobinage en dérivation, i_2 courant de dérivation, m_2 nombre de spires du bobinage en série et I_1 le courant total.

C8. *Poids des bobinages*

Pour les poids du bobinage de l'induit et de l'inducteur on fait les mêmes discussions qu'aux §§ A12 et B10 et on aboutit aux mêmes conclusions.

C9. *Pertes dans le fer*

L'expression de ces pertes dans l'armature de l'induit est donnée par les relations (22) et (23), avec l'observation que cette fois-ci il faut faire intervenir les nouvelles valeurs des courants I_1 et i_2 et du nombre des spires n'_2 et m_2 (§ C7) dus à la transformation subie par la machine:

$$\frac{P_{1H}}{P_H} = \frac{f_1}{f}\left[\frac{C'_{sh}\, n'_2\, i_2 + C'_s\, m_2\, I_1}{C'_{sh}\, n'\, i + C'_s\, m\, I}\right]^{1,6}$$

et

$$\frac{P_{1F}}{P_F} = \left(\frac{f_1}{f}\right)^2\left[\frac{C'_{sh}\, n'_2\, i_2 + C'_s\, m_2\, I_1}{C_{sh}\, n'\, i + C'_s\, m\, I}\right]^2 .$$

Les quantités entre paranthèses aux puissances 1,6 et 2, augmentent encore plus vite que dans le cas considéré plus haut, pour les

excitations en série et compound parce que maintenant le courant principal I augmente aussi.

En ce qui concerne la fréquence, restent valables les considérations faites au § B4.

Pour les pertes dans le fer des dents, par un raisonnement analogue on arrive aux mêmes conclusions.

C10. *Pertes Joule*

Dans l'enroulement de l'induit nous avons des pertes de la même forme que celles trouvées au § A14.

Dans l'inducteur nous avons des pertes analogues à celles calculées au § B5, avec la remarque qu'il faut tenir compte pour les pertes dans les enroulements série du fait que le courant total I, a été augmenté. Par conséquent, pour les excitations en série et compound nous aurons des pertes plus importantes que celles données au § B5.

Les pertes dans les pôles de commutation et dans l'enroulement de compensation seront de la même forme que celles calculées au §§ A20 et A21.

Il peut apparaître comme nécessaire de changer ces enroulements par suite de la modification du courant principal.

Les pertes Joule au collecteur sont donneés au § A15.

C11. *Pertes mécaniques*

Elles sont calculées au § A16 et les pertes par frottements au collecteur sont indiquées au § A15.

C12. *Echauffement*

Les échauffements des différentes parties de la machine ont été calculés dans l'exposé que nous avons fait jusqu'ici.

Nous avons donné les détails de calcul au § A17 pour l'induit, au § A18 pour le collecteur et au § B9 pour le système inducteur.

C13. *Rendement*

Les valeurs des rendements pour la machine fonctionnant en génératrice ou en moteur sont données au § A22.

Pour calculer les rendements, il faut évaluer les pertes totales P_t. Nous avons les pertes suivantes :

Dans le fer (§ C9 et relations (22), (23)) :

$$f_1 (C'_{sh}\, n'_2\, i_2 + C'_s\, m_2\, I_1)^{1,6} + f_1^2 (C'_{sh}\, n'_2\, i_2 + C'_s\, m_2\, I_1)^2 ;$$

dans l'induit :

$$C_{32}\,\frac{N_1 I_1^2}{s_1};$$

au collecteur : $C_{17}\,s_c + e\,I_1$;

dans l'inducteur : $C'_{sh}\,n'^2_2\,i^2_2 + C'_s\,m_2\,I_1^2$;

dans les enroulements des pôles auxiliaires et de compensation :

$$C_{33}\,I_1^2;$$

pertes mécaniques :

$$C_{27}/_{28}\left(\frac{C_{23}}{C'_{sh}\,n'^2_2\,i_2 + C'_s\,m_2\,I_1}\right)^{x_1} + C_{29}\left(\frac{C_{23}}{C'_{sh}\,n'^2_2\,i_2 + C'_s\,m_2\,I_1}\right)^3;$$

pertes dans le ventilateur, s'il existe : $C_{20}\,\varphi\,(I_1)$.

La somme de toutes ces pertes nous donnera les pertes totales de la machine transformée.

La discussion sur la valeur des pertes totales après la transformation de la machine est la même que la discussion faite dans la première partie de cette étude. Suivant la valeur du rapport $\frac{P_{1t}}{\alpha P_t}$ nous aurons des rendements plus grands, égaux ou plus petits que dans le fonctionnement initial.

C14. *Conclusions*

De la troisième partie de notre étude, on peut déduire les conclusions suivantes quand on essaie d'augmenter la puissance d'une machine à courant continu, en modifiant l'induit et l'inducteur à la fois :

a) En partant du flux maximum admissible pour le circuit magnétique on peut établir le nombre de conducteurs, le type du bobinage, le courant par dérivation, etc. pour arriver à une certaine valeur de α (§§C2, C3 et C4).

b) En général, avec l'examen de la situation dans chaque cas, on peut dire que la commutation ne sera pas plus difficile après la transformation (§C5).

c) L'enroulement du système inducteur peut être complétement déterminé (§C7).

d) Les pertes dans le fer seront plus importantes (§C9). Les pertes par effet Joule dans les différents enroulements seront aussi plus grandes (§C10).

e) L'échauffement doit être examiné avec la plus grande attention afin de prendre les mesures nécessaires de reffroidissement quand la situation l'exige (§C12).

f) Le rendement varie, suivant le cas considéré, en fonction du rapport $\frac{P_{tt}}{\alpha P_t}$ (§C13).

6. Dans la quatrième hypothèse l'induit et l'inducteur ne subissent aucun changement. Pour modifier la puissance de la machine dans ce cas, il ne reste que la possibilité de varier la vitesse.

Cette question nous l'avons étudiée dans l'article cité auparavant [1]).

7. *Conclusions générales*

De cette étude, il résulte qu'il est possible d'augmenter la puissance d'une machine à courant continu quand on garde le même fer et qu'on modifie le bobinage de l'induit, de l'inducteur ou les deux à la fois, ou bien si on change seulement la vitesse sans toucher à la construction de la machine.

Dans chaque hypothèse, suivant les indications données, il faut faire les calculs de la machine pour trouver la meilleure solution à tous les points de vue. En principe la transformation est possible, sauf des cas spéciaux. Il faut mentioner que le cas le moins intéressant est celui où l'on change seulement l'inducteur.

En examinant de plus près le rendement de la machine transformée et les dépenses en exploitation qui en résultent on peut se rendre compte de l'utilité de la transformation et de la rentabilité par rapport aux frais nécessaires pour réaliser cette modification.

Laborafoire de Machines Electriques
de l'Ecole Polytechnique de Jassy
et
Institut National de recherches
technologiques
Direction Régionale de Jassy

(Reçu le 21 Mai 1948)

1) Cf. César Partení Antoni et N. Popinceanu loc. cit.

FORMULE THÉORIQUE DES COEFFICIENTS DE RESTITUTION DES CORPS IMPARFAITEMENT ÉLASTIQUES.

par

Z. HORAK

E. Hodgkinson a déduit de ses expériences (il y a plus de cent ans [1]), que le coefficient de restitution k_{12} relatif au choc d'une sphère de matériel 1 contre une sphère de matériel 2 est donné par l'expression

$$k_{12} = \frac{E_2 k_{11} + E_1 k_{22}}{E_1 + E_2}, \tag{1}$$

où les k_{11}, k_{22} sont les coefficients de restitution de chacune des deux sphères, les E_1, E_2 étant leurs modules d'élasticité.

Jusqu'à présent, cette formule n'a trouvé, que je sache, aucun fondement théorique et il n'est pas donc sans intérêt que l'on peut déduire une formule très voisine de la formule (1), en partant de la théorie de Hertz du contact des deux corps élastiques [2]) ou de celle de Boussinesq [3]), concernant les déformations d'un demi-espace élastique.

Par un calcul facile, on démontre que les deux théories conduisent au résultat suivant : lorsque deux corps déformables sont en contact sous une faible pression totale P, la surface de contact étant une ellipse à grand demi-axe a, les déplacements normaux maxima ζ_1, ζ_2 au centre de cette ellipse de contact peuvent s'écrire sous la forme ;

$$\zeta_1 = \frac{3}{2\pi}\frac{P}{a}F(\varepsilon)\,\vartheta_1\,, \qquad \zeta_2 = \frac{3}{2\pi}\frac{P}{a}F(\varepsilon)\,\vartheta_2 \tag{2}$$

---

1) *On the Collision of imperfectly Elastic Bodies*, Report of the Fourth Meeting of the British Association in 1834, London 1835.

2) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Bd. 92, p. 156-171, Gesammelte Werke, Bd. I, 155-173.

3) *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques* . . . , Paris (Lille) 1885, p. 92.

où

$$F(\varepsilon) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}},$$

ε designant l'excentricité numérique de l'ellipse de contact. Les quantités ϑ_1, ϑ_2, sont définies (pour les deux corps) moyennant l'expression

$$\vartheta = \frac{1-\sigma^2}{E} = \frac{m-1}{2mg} \tag{3}$$

dans laquelle E signifie le module d'élasticité de Young et $\sigma = \frac{1}{m}$ le nombre de Poisson, tandis que g désigne le module de torsion. La déformation normale pour chacun de deux corps est donc proportionnelle à la quantité ϑ qu'on peut alors appeler *mollesse* du dit corps.

En se basant sur la théorie de Boussinesq, il n'est pas difficile de démontrer que le dernier résultat est encore vrai pour le contact, sous faible pression, d'un corps arrondi avec un corps à face plane.

En résumant, on a donc le résultat suivant :

Si deux corps déformables arrondis, dont l'un peut être remplacé par une plaque suffisamment épaisse, sont en contact, sous une faible pression, leurs déformations normales au centre de l'ellipse de contact sont proportionnelles à leurs mollesses.

Pour obtenir la valeur du coefficient de restitution pour un choc de deux corps différents, j'introduirai une quantité que j'appelle *élasticité dynamique* (ou bien réaction élastique) définie pour chacun des corps comme le rapport, changé de signe, de la vitesse de restitution du corps à la fin du choc à la vitesse de la compression du corps au début du choc [4]). Si l'on désigne par V_1 la vitesse de compression du premier corps au début du choc et par V_1' sa vitesse de restitution à la fin du choc, son élasticité dynamique e_1 est donnée par l'expression

$$e_1 = -\frac{V_1'}{V_1} \tag{4}$$

et de même l'élasticité dynamique e_2 du second corps

4) Il faut admettre que la valeur de cette quantité dépende non seulement des propriétés mécaniques et géométriques du corps mais aussi de la vitesse du choc, comme on le trouve aussi pour le coefficient de restitution de Newton.

(5) $$e_2 = -\frac{V_2'}{V_2}.$$

D'autre part, la vitesse V de rapprochement des deux corps au début du choc est évidemment égale à la somme de deux vitesses de compression

$$V = V_1 + V_2$$

et une relation analogue est vraie aussi pour la vitesse de rebond

$$V' = V_1' + V_2' .$$

Alors, le coefficient de restitution

$$k_{12} = -\frac{V'}{V} = -\frac{V_1' + V_2'}{V_1 + V_2}$$

ou en tenant compte de (4) et (5)

(6) $$k_{12} = \frac{V_1 e_1 + V_2 e_2}{V_1 + V_2}.$$

Le coefficient de restitution, que l'on peut obtenir par mesure des vitesses initiales et finales des deux corps de choquant, est donc donné par la moyenne „pondérée" des élasticités dynamiques, leur poids étant proportionnels aux vitesses de compression au début du choc. La valeur du k_{12} ne dépend que de leur rapport, car on peut écrire évidemment

(7) $$k_{12} = \frac{e_1 + \frac{V_2}{V_1} e_2}{1 + \frac{V_2}{V_1}}.$$

Exception fait le cas $e_1 = e_2 = e$ qui donne $k_{12} = e$ indépendamment du rapport des vitesses. Cela nous conduit à la définition expérimentale de l'élasticité dynamique comme coefficient de restitution en cas d'un choc de deux corps identiques.

En cas général d'un choc de deux corps *différents*, le coefficient de restitution peut-être calculé de leurs élasticités dynamiques d'après la formule (7), si l'on détermine d'une manière quelconque le rapport des vitesses de compression au début du choc. Or, des formules (2), on déduit par division pour le rapport des compressions des deux corps

(8) $$\zeta_1 : \zeta_2 = \vartheta_1 : \vartheta_2$$

ce qui suggère l'idée de se servir des dites formules aussi pour détermi-

ner le rapport des vitesses de ces compressions. Avant de l'essayer il faut s'assurer, bien entendu, que les conditions de validité des relations (2) sont encore remplies pour le choc imparfaitement élastique. Les deux théories supposent, comme on sait, 1^0 que les corps sont en état d'équilibre, 2^0 que leurs déformations sont très petites par rapport aux dimensions des corps, 3^0 que les corps sont parfaitement élastiques.

Quant à la supposition 1^0, on peut remarquer que Hertz lui même a appliqué sa théorie statique de contact des corps au choc élastique, ce qui a conduit aux résultats confirmés par l'expérience. D'autre part, Boussinesq [3] p. (717) fait remarquer que, pendant le choc des corps contigus à formes massives et arrondies, les seules déformations perceptibles ont lieu près de la surface de contact, dans des parties dont la masse totale et les inerties sont insignifiantes en égard à leurs tensions. Ainsi l'équilibre intérieur y existe sensiblement à tout instant du choc. On peut en conclure que les résultats déduits pour l'état d'équilibre restent encore pratiquement valables pour un choc.

La supposition 2^0 n'est pas vraie-en général-pendant toute la durée du choc, mais elle peut-être considérée comme exacte pour les déformations initiales, se produisant au début du choc.

La dernière condition 3^0 semble être en contradiction essentielle avec la possibilité de l'application des théories de Hertz et Boussinesq au choc de corps imparfaitement élastiques. Mais il ne faut pas oublier que les expériences de C. V. Raman [5]) et de D. B. Deodhar [6]) ont montré que le coefficient de restitution s'approche à l'unité, lorsque la vitesse de choc s'affaiblit, ce qui s'explique par le fait que, tant que les déformations restent suffisamment petites, tous les corps se comportent comme parfaitement élastiques. On peut en conclure que les compressions initiales-qui sont évidemment très faibles-obéissent au lois valables pour les déformations élastiques, même si le choc dans son cours ultérieur cesse d'être parfaitement élastique. On peut donc légitimement admettre que les résultats déduits ci-dessus sont en tout cas applicables aux déformations ayant lieu au début du choc.

Par conséquent, les déformations initiales ζ_1, ζ_2 des deux corps remplissent la proportion (8) et leur rapport est donc constant tant qu'elles restent suffisamment petites. Par dérivations par rapport au temps on en tire

---

5) *The Photographic Study of Impact and Minimal Velocities*, Physical Review, 2 ser. Vol. XII. 1918, p. 442-447.

6) *Of the Collision of Spherical Bodies...*, Philosophical Magazine, 6. ser., Vol. 48, London 1924, 89-96.

$$\zeta_1 \dot{\zeta}_2 - \dot{\zeta}_1 \zeta_2 = 0$$

ou aussi en raison de (8),

$$\zeta_2 : \zeta_1 = \dot{\zeta}_2 : \dot{\zeta}_1 = \vartheta_2 : \vartheta_1 .$$

Les vitesses de compression sont évidemment égales aux dérivées – par rapport au temps – des compressions elles-mêmes ce qui entraîne pour les vitesses initiales de compression :

$$V_2 : V_1 = \dot{\zeta}_2 : \dot{\zeta}_1 = \vartheta_2 : \vartheta_1 .$$

En le portant dans l'équation (7), on obtient la formule

$$k_{12} = \frac{\vartheta_1 e_1 + \vartheta_2 e_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \tag{10}$$

ou, en tenant compte de (3),

$$k_{12} = \frac{\frac{1-\sigma_1^2}{E_1} k_{11} + \frac{1-\sigma_2^2}{E_2} k_{22}}{\frac{1-\sigma_1^2}{E_1} + \frac{1-\sigma_2^2}{E_2}} . \tag{10'}$$

Dans cette dernière formule, j'ai écrit k_{11} et k_{22} au lieu de e_1 et e_2 pour exprimer que l'élasticité dynamique d'un corps est égale au coefficient de restitution obtenu en cas du choc du corps contre le corps identique.

On voit que la formule (10'), que nous venons d'obtenir, ne diffère pas essentiellement de celle de Hodgkinson (1) laquelle a été déduite des expériences faites sur plusieurs corps de divers matériaux; la formule (1) qui peut être mise sous la forme

$$k_{12} = \frac{\frac{k_{11}}{E_1} + \frac{k_{22}}{E_2}}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}} \tag{11}$$

reproduit, d'après cet auteur, les résultats de ses mesures avec l'écart maximum de 11%. Notre formule (10') résulte de (11) en remplaçant les facteurs $\frac{1}{E_1}$ et $\frac{1}{E_2}$ par les expressions $\frac{1-\sigma_1^2}{E_1}$ et $\frac{1-\sigma_2^2}{E_2}$ où les nombres σ_1, σ_2 prennent des valeurs intermédiaires entre 0 et $1/2$. Les expressions (10') et (11) ne diffèrent pas sensiblement tant que les σ_1, σ_2 ont des valeurs voisines de la valeur moyenne ($1/3$). Leur différence augmente cependant plus les valeurs σ_1 et σ_2 diffèrent entre elles et plus diffèrent les deux coefficients k_{11}, k_{22}. Si l'on considère, par exem-

ple, le choc d'une bille de verre ($E_1 = 7{,}3.\ 10^5$ kg/cm^2, $\sigma_1 = 0{,}20$, $k_{11} = 0{,}94$) contre une bille de plomb ($E_2 = 1{,}66.\ 10^5$ kg/cm^2, $\sigma_2 = 0{,}44$, $k_{22} = 0{,}20$), la formule de Hodgkinson donne $k_{12} = 0{,}34$, tandis que notre formule théorique offre la valeur $k_{12} = 0{,}36$, qui dépasse la première de 6%.

Mais si l'on supposait que $k_{22} = 0$, $E_1 = E_2$, $\sigma_1 = 1/2$, la formule (11) donnerait (indépendamment des valeurs k_{11}, σ_2)

$$k_{12} = \frac{1}{2} k_{11},$$

tandis qu'on tirerait de notre formule (10')

$$k_{12} = \frac{\frac{3}{4} k_{11}}{\frac{3}{4} + 1} = \frac{3}{7} k_{11},$$

de sorte que la différence serait – dans ce cas – a peu près 14%. Or, on peut croire que cette valeur ne soit pas loin de la plus grande différence possible entre les valeurs données par les deux formules et, d'autre part, elle est du même ordre de grandeur avec l'écart maximum des valeurs calculées par la formule de Hodgkinson des valeurs mesurées. Les expériences de Hodgkinson ne fournissent pas – malheureusement – une base sûre pour décider laquelle des deux formules et plus exacte : néanmoins, on peut s'attendre à ce que notre formule théorique soit d'accord avec les résultats expérimentaux, tout au moins au même degré de précision comme la formule de Hodgkinson.

Quant aux expériences d'autres auteurs, on peut mentionner le résultat expérimental suivant de Morin[7]) : Quand l'un des deux corps, prenant part au choc, est sensiblement plus compressible que l'autre, le rapport de la hauteur de retour à la hauteur de chute ne dépend que de la réaction élastique du premier corps et il est, dans des limites des expériences, indépendant de l'élasticité, de la rigidité et de la masse de l'autre. Cela résulte évidemment de notre formule (10), puisque le terme ϑe, relatif à un corps peu compressible (possédant une faible mollesse ϑ) est insignifiant devant celui, relatif à un corps fortement compressible.

C'est l'application de notre formule au cas d'égales mollesses ($\vartheta_1 = \vartheta_2$) qui offre une autre possibilité de vérifier sa validité. Dans ce cas-là, l'expression (10) prend la forme simple

7) *Note sur la résistance...*, Comptes rendus Ac. Sci., T. XIII., Paris 1841, p. 1022-3.

(12) $$k_{12} = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$$

qui se prête surtout au calcul du coefficient de restitution pour un choc de deux corps différents, constitués du même matériel. A savoir, l'élasticité dynamique (ou bien coefficient de restitution) dépend aussi de la grandeur et de la forme du corps [8]), de sorte que deux corps différents de même matériel ont, en général, des élasticités différentes, disons e_1, e_2. Le coefficient de restitution, relatif au choc de tels corps, est alors égal à la moyenne arithmétique de leurs élasticités dynamiques.

Il est intéressant d'appliquer ces résultats théoriques aux expériences de H. Tallquist [9]). Cet auteur a étudié le choc de billes contre des plaques pour divers matériaux et a constaté que, par exemple, une bille d'acier, après avoir choqué une plaque d'ivoire, rebondit avec une vitesse plus faible qu'une bille d'ivoire choquant une plaque d'acier. Les valeurs correspondantes des coefficients de restitution $k^{*\prime}{}_{11}, \ldots, k^{\prime *}{}_{22}$ sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

PLAQUE	BILLE	
Matériel constituant	Acier	Ivoire
Acier	$k^{*\prime}{}_{11} = 0{,}926$	$k^{\prime *}{}_{12} = 0{,}863$
Ivoire	$k^{*\prime}{}_{12} = 0{,}774$	$k^{\prime *}{}_{22} = 0{,}818$

Pour se rendre compte de ces résultats, supposons que la plaque d'acier ait une élasticité dynamique e'_1 différente de l'élasticité e^*_1 de la bille d'acier et désignons par e'^2, e^*_2 les deux élasticités analogues pour ivoire. En vertu des formules (10) et (12) on aura

$$k^{*\prime}{}_{12} = \frac{\vartheta_1 e^*_1 + \vartheta_2 e'_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2}, \qquad k^{\prime *}{}_{12} = \frac{\vartheta_1 e'_1 + \vartheta_2 e^*_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2}$$

$$k^{*\prime}{}_{11} = \frac{1}{2}(e^*_1 + e'_1), \qquad k^{\prime *}{}_{22} = \frac{1}{2}(e^*_2 + e'_2)$$

8) C. V. Raman : *On some applications of Hertz's theory of impact*, The Physical Review (2), Vol. 15, 1920, p. 277 - 284.

9) *Om restitutionskoefficienter*. Fysisk Tidskr., 21, 1923, p, 188-193.

et, en éliminant les valeurs inconnues e^*_1, e'_1, e^*_2, e'_2 on obtiendra la relation

$$\frac{k^{*\prime}_{12} + k'^*_{12}}{2} = \frac{\vartheta_1 k^{*\prime}_{11} + \vartheta_2 k'^*_{22}}{\vartheta_1 + \vartheta_2}. \tag{13}$$

Or, si l'on prend

$$E_1 = 2{,}2.\ 10^6\ kg/cm^2, \qquad E_2 = 9{,}0.10^4\ kg/cm_2$$

et si l'on suppose que les σ_1 et σ_2 soient à peu près égaux, on obtient pour la moyenne arithmétique (13) la valeur

$$\frac{4{,}54.\ 0{,}926 + 111.\ 0{,}818}{4{,}54 + 111} = 0{,}823$$

qui ne diffère de la moyenne $0{,}819$ des coefficients mesurés que de $0{,}5\%$.

Université technique
de Prague

(Reçu le 24 Avril 1948)

621.8

AU SUJET DE LA DETERMINATION DES RAYONS DES CIRCONFERENCES DE TETE DES ROUES D'UN ENGRENAGE CYLINDRIQUE DROIT A ODONTOIDES EN DEVELOPPANTE DE CIRCONFERENCE

par

CYP. DEMARS

Introduction

L'engrenage, connu et utilisé en Egypte, déjà avant notre ère, inventé à Rome par le mécanicien Ctésibius, ainsi que le signale Marcus Vitruvius Pollo dans son livre „*de architectura*" dédié à Auguste ; mis en oeuvre, par les Arabes, dès la plus haute antiquité, dans leurs „noria", par exemple, a vu son emploi se développer de plus en plus au cours des temps, et ce, à un point tel, qu'actuellement, il n'est pas un ensemble mécanique, si puissant et si rapide qu'il puisse être, où on ne le trouve.

L'étude de ce mécanisme, partout répandu, à déjà fait l'objet de très nombreuses études et publications, pourtant, l'accord ne semble pas encore être fait au sujet, notamment, de la théorie qu'il conviendrait d'appliquer pour fixer, au mieux, les profils des dents du plus simple même, d'entre eux, savoir : l'engrenage cylindrique à dentures droites et à odontoïdes en développante de circonférences.

Il semble que l'on puisse affirmer que choisir la question „usure" comme base de la théorie d'où devraient découler les caractéristiques radiales des deux dentures de cet engrenage est admis par la plupart des auteurs qui se sont occupés de la question, mais les théories qu'ils ont proposées diffèrent, notablement, par les hypothèses de départ admises. De plus, certaines ne rejoignent pas l'observation.

Le problème, sans nul doute, est délicat, du fait que, d'une part, notamment, le contact odontoïdal est, théoriquement, ponctuel et qu'il se fait, d'autre part, en glissement et roulement combinés.

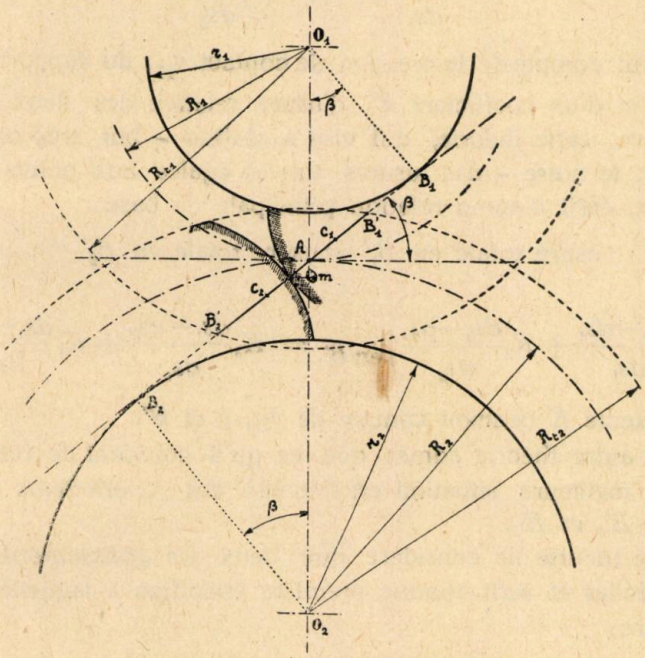
Disons, rapidement, quelques mots de théories au sujet desquelles il a été publié en Belgique.

Nous désignerons [1]) :

par ds_1 un élément odontoïdal du pignon,

par ds_2 un élément odontoïdal de la roue et, plus particulièrement, celui qui *correspond* à ds_1,

par B_1' (fig. 1) le point extrême de contact entre flanc du pignon et face de la roue.



Pignon : n_1 dents, N_1 t/m
Roue : n_2 dents, N_2 t/m
Fig. 1.

Pendant cette période de contact, on a :

$$ds_2 > \text{à } ds_1$$

par B_2' le point extrême de contact entre flanc de la roue et face du pignon.

Pendant cette période de contact :

$$ds_1 \text{ est} > \text{à } ds_2.$$

Une première théorie *pose* que l'usure d'un élément odontoïdal léché par l'élément conjugué correspondant est, notamment, proportionnelle à son *„glissement relatif"* [2]). Ainsi :

1) Les indices inférieurs 1 indiquent qu'il s'agit du pignon.
2) Les indices inférieurs 2 indiquent qu'il s'agit de la roue.

en B_1', les glissements relatifs sont :

$$\frac{ds_2 - ds_1}{ds_1} \text{ pour le pignon, } \frac{ds_2 - ds_1}{ds_2} \text{ pour la roue,}$$

en B_2', ils sont, respectivement :

$$\frac{ds_1 - ds_2}{ds_1} \text{ et } \frac{ds_1 - ds_2}{ds_2}.$$

Tenant compte de la pression de contact σ_H, du rapport de transmission ϱ et d'un coefficient k'' d'usure relative des deux matériaux en présence, cette théorie, qui vise à réaliser – but très correct qui sera, aussi, le nôtre – des usures totales égales aux points extrêmes de contact, écrit comme relation principale de base :

(a) usure totale en B_1' = usure totale en B_2'

soit :

$$\text{(b)} \quad \left(K_1 \frac{ds_2 - ds_1}{ds_1} + K_2 \frac{ds_2 - ds_1}{ds_2}\right) \text{en } B'_1 = \left(K_3 \frac{ds_1 - ds_2}{ds_1} + K_4 \frac{ds_1 - ds_2}{ds_2}\right) \text{en } B'_2$$

où les facteurs K tiennent compte de σ_H, ϱ et k''.

Une autre théorie admet que ce qu'il convient de réaliser pour obtenir la meilleure situation est l'égalité des „*coefficients de glissement*" en B'_1 et B'_2.

Cette théorie ne considère que deux des „*glissements spécifiques*" précités et écrit comme première condition à laquelle il importe de satisfaire :

$$\text{(c)} \quad \left(\frac{ds_2 - ds_1}{ds_1}\right) \text{ en } B'_1 = \left(\frac{ds_1 - ds_2}{ds_2}\right) \text{ en } B'_2 \quad \text{(Cf. b)}$$

sans tenir compte de σ_H, ϱ et k''.

Par la suite, l'auteur de cette théorie écrit que l'usure dépend de la pression interodontoïdale σ_H dont il dessine le diagramme.

Pérignon dans son livre „Théorie et technologie des engrenages" écrit (pp. 108 et 109) :

„*De prime abord, l'idée d'usure appelle celle de glissement „et c'est de ce côté, surtout, que s'est porté l'effort des chercheurs. „Efforts divergents, d'ailleurs, et presque toujours entachés d'erreur, „dès le principe. On trouve, en effet, à la base de ces études la „notion de „glissement spécifique" qui, du point de vue de l'homogé„néité, est sans dimension, alors que le glissement réel a les dimen„sions d'une vitesse*".

Pérignon ne propose aucune théorie.

L'auteur du présent mémoire est d'accord avec Pérignon pour admettre qu'il n'est pas indiqué de prendre en considération le „*coefficient de glissement*" dans la relation explicitant l'usure, mais il n'épouse pas, telle qu'elle, l'idée que paraît contenir la dernière phrase du texte qui vient d'être rappelé.

A son avis, l'usure dépend, non seulement de la vitesse relative de glissement, mais, aussi, d'un facteur tenant compte des longueurs glissantes en jeu. Il raisonne comme suit :

Soient : un premier groupe (groupe 1) de deux surfaces, de longueurs l et L qui glissent l'une sur l'autre, et ensuite, un autre groupe de pièces (groupe 2) de longueurs $\lambda . l$ et $\lambda . L$ qui (toutes autres conditions demeurant identiques) glissent, aussi, l'une sur l'autre.

L'usure de chacune des pièces du groupe 2 est λ fois plus grande que celle de la pièce correspondante du groupe 1.

L'auteur déduit de cela que la fonction dont il a été question doit tenir compte d'un facteur ayant la *dimension* d'une longueur et non pas d'un facteur „*rapport de longueurs*", comme l'est le „glissement proportionnel".

D'autre part, il ne paraît pas pouvoir être nié que, pour un même groupe de pièces glissantes, la vitesse du déplacement relatif ait une influence sur l'usure qui se produit au bout d'un temps déterminé, mais la relation qui, raisonnablement, semble devoir exister entre l'usure et la vitesse de glissement (relation qui ne pourra être déterminée que par voie expérimentale) n'est pas connue.

Exposé schématique de la méthode suivie par l'auteur

Les deux relations dont l'auteur déduit, finalement, les rayons des circonférences de tête et de pied de chacune des roues d'un engrenage cylindrique à dentures droites sont les suivantes (fig. 1) :

(d) (usure du pignon + usure de la roue) en B'_1 = (usure du pignon + usure de la roue) en B'_2

(e) $B'_1 B'_2 = k' . p_b$ (où le „*recouvrement*" k' est fixé *a priori*[3]).

Il tient compte, dans l'explicitation de la première :

de la pression interodontoïdale σ_H,

du rapport de transmission ϱ (le pignon, dans la transmission du mouvement, intervient ϱ fois plus que la roue),

d'un coefficient d'usure relative du matériau-roue et du matériau-pignon,

3) Dans les engrenages à dentures standardisées, le „*recouvrement*" est subi et non choisi.

d'un terme „*usure unitaire*" que l'auteur, dans l'état actuel des connaissances, ne peut que supposer constant,

d'un *facteur* de dimension „longueur" (voir introduction).

Pour fixer l'expression de ce *facteur*, l'auteur admet l'hypothèse, *qu'au point de vue de glissement*, le mouvement relatif de deux éléments odontoïdaux conjugués qui viennent en prise (ds_1 et ds_2) s'effectue comme s'ils étaient plans. De plus, pour tenir compte de ce que les usures odontoïdales varient d'un point au suivant d'une manière continue, il admet que l'usure de chacun des éléments est proportionnelle à son usure théorique maxima, usure dont il établit l'expression en étudiant, théoriquement, l'usure de deux plans se déplaçant l'un sur l'autre.

Faisons remarquer que les différents termes de la relation d ne doivent exprimer les usures qu'à une commune échelle. Connaître les usures n'est pas le but du problème et la relation d ne doit être entendue que sous la signification suivante :

les usures aux points extrêmes de contact B'_1 *et* B'_2 *sont égales* sans plus.

Limiter, au plus, les usures est un autre problème qui dépendra essentiellement, des qualités, au point de vue de la résistance à l'usure, des matériaux en présence, compte tenu des conditions particulières du fonctionnement d'un engrenage.

L'appareil mathématique mis en oeuvre, les formules et les diagrammes en déduits, sont relativement simples, du fait de la prise en considération de la variable

$$x = \frac{B_1 m}{B_1 B_2} \quad \text{(valeurs extrêmes 0 et 1)}$$

pour fixer la position d'un point m (fig. 1) de contact entre odontoïdes en prise, sur le *segment* $B_1 B_2$ *des contacts corrects possibles.*

Cette variable situe, très visuellement et très simplement, m sur $B_1 B_2$, puisque

$$B_1 m = x.\, B_1 B_2 = x.\, R_1.\, (1 + \varrho).\, \sin\beta$$

et ce, plus que autre variable (angulaire, par exemple) que l'on pourrait choisir.

Il n'est nécessaire de justifier longuement la nécessité où l'on se trouve de réduire autant que possible l'usure odontoïdale des dentures d'un engrenage, ni non plus l'avantage économique qu'il y a à désirer réalisées des usures égales aux point de prise de contact des dents.

Les jeux engendrés, les modifications provoquées des profils ren-

dent la transmission du mouvement et de la puissance de moins en moins satisfaisantes vu que la cause du dommage (c'est-àdire : l'usure) croît avec les effets provoqués, continûment.

Pour pouvoir fixer, d'une manière rationnelle, les rayon des circonférences de tête des roues d'un engrenage, on s'impose de réaliser aux points extrêmes de contact (et mieux : aux points simultanés de prise de contact) des usures totales (usure U_1 du pignon + usure U_2 de la roue) égales.

I. — Les usures odontoïdales en point de contact m des profils conjugués des dents en prise, dépendent :

a) des longueurs ds_1 et ds_2 [4]) des éléments odontoïdaux conjugués en prise au point de contact m (ils interviennent dans l'explicitation du *facteur*, de dimension „longueur", dont il a été question dans l'introduction),

b) du rapport ϱ de transmission [5]),

c) du rapport k'' [6]) des usures des matériaux constituant la roue et le pignon de l'engrenage,

d) des usures unitaires u_2 du matériau-roue et u_1 du matériau-pignon, qui devraient s'exprimer en fonction de la vitesse relative de glissement

$$V_g = f(x)$$

mais qu'il faut, actuellement, vu le manque de connaissances, supposer constantes,

e) de la pression σ_H existant en m, entre les surfaces odontoïdales.

Nous établirons les relations qui lient : les usures U_1 et U_2 du pignon et de la roue, en m, et les facteurs précités.

II. — Les usures odontoïdales aux points extrêmes de contact considérés, B'_1 et B'_2 par exemple (voir plus loin), dépendent :

f) de la position de B'_1 et de B'_2 sur le *segment* B_1B_2 *des con-*

---

4) Cf. (1).

5) $$\varrho = \frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

R = rayon d'une circonférence de roulement
r = rayon d'une circonférence de base
n = nombre de dents
N = nombre de tours par unité de temps
ω = vitesse angulaire.

6) $$k'' = \frac{\text{usure unitaire du matériau-roue}}{\text{usure unitaire du matériau-pignon}}.$$

tacts corrects possibles, partant : de la grandeur du *segment* $B'_1B'_2$ *des contacts réalisés*, de sa position sur B_1B_2 et, par conséquent :

g) du „*recouvrement*" k' [7]), des nombres de dents : n_1 et $n_2 = \varrho.n_1$ ainsi que de l'angle de pression β.

Notations et variable utilisées.

Les notations utilisées sont précisées par ce qui précède et par la fig. 1.

La position d'un point de contact m sera repérée, sur B_1B_2, par la valeur de la variable

$$x = \frac{B_1 m}{B_1 B_2} \tag{1}$$

qui fixe, très simplement, et très visuellement, par rapport à B_1, la position de m sur $B_1 B_2$, puisque :

$$B_1 m = x.\, B_1B_2 = x.\, R_1.\,(1+\varrho).\,\sin\beta. \tag{2}$$

La variable x peut avoir toutes les valeurs comprises entre :

$$\text{et} \quad \left.\begin{matrix} x = 0 \text{ en } B_1 \\ x = 1 \text{ en } B_2 \end{matrix}\right\}. \tag{3}$$

Nous noterons spécialement :

$$x'_1 = \frac{B_1 B'_1}{B_1 B_2} \text{ l'abscisse } x \text{ qui correspond à } B'_1 \tag{4}$$

$$x_A = \frac{B_1 A}{B^1 B_2} \text{ l'abscisse } x \text{ qui correspond à } A \tag{5}$$

$$x'_2 = \frac{B_1 B'_2}{B_1 B_2} \text{ l'abscisse } x \text{ qui correspond à } B'_2. \tag{6}$$

Remarque : 1) un point de contact m, situé sur $B_1 A$, et son abscisse x seront notés : m_1 et x_1, d'une manière analogue, un point de contact m, situé sur AB_2 et son abscisse x seront notés : m_2 et x_2.

§ I

Nous examinons, ci-après, les différents facteurs (voir, ci-avant,

---

7) $$k' = \frac{\text{longueur du segment } B'_1 B'_2 \text{ des contacts réalisés}}{p_b}$$

où $p_b = \dfrac{2\pi\, r}{n}$.

sous repères: a, b, c, d et e) dont dépendent les usures U_1 et U_2 du pignon et de la roue en un point de contact m, indiquons comment elles dépendent d'eux et explicitons les relations:

$$U_1 = f_1\,(ds_1, ds_2, \varrho, k'', u_1, \sigma_H) = f_1(x)$$
$$U_2 = f_2\,(ds_1, ds_2, \varrho, k'', u_1, \sigma_H) = f_2(x).$$

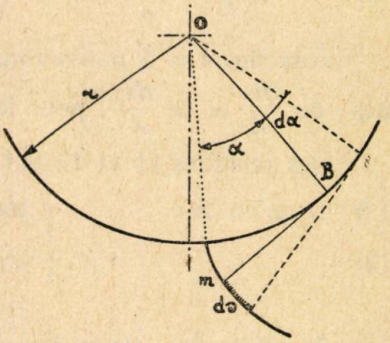


Fig. 2

a) *Explicitation de ds_1 et de ds_2.*

1) *Mesure d'un arc élémentaire de la développante d'une circonférence de rayon r.*

De la fig. 2 nous déduisons immédiatement que l'arc élémentaire ds correspondant à un angle élémentaire $d\alpha$ [8]) de la circonférence développée est:

$$ds = Bm \,.\, d\alpha \tag{7}$$

2) *Formules explicitant les longueurs de ds_1 et de ds_2, éléments odontoïdaux conjugués en prise en un point m.*

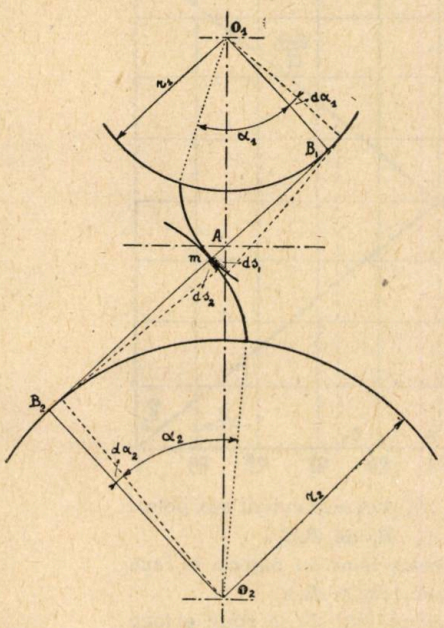


Fig. 3.

De la fig. 3, compte tenu de 7, nous déduisons:

$$ds_1 = B_1 m \,.\, d\alpha_1 \tag{8}$$

et

$$ds_2 = B_2 m \,.\, d\alpha_2. \tag{9}$$

Or:

$$\left\{\begin{array}{l} B_1 m = x \,.\, B_1 B_2 \\ B_2 m = (1-x) \,.\, B_1 B_2 \\ B_1 B_2 = R_1 \,.\, (1+\varrho) \,.\, \sin\beta \\ \text{et} \\ d\alpha_2 = \dfrac{d\alpha_1}{\varrho}. \end{array}\right. \tag{10}$$

Compte tenu de 10, les relations 8 et 9 deviennent:

$$ds_1 = x \,.\, R_1 \,.\, (1+\varrho) \,.\, \sin\beta \,.\, d\alpha_1 = A \,.\, x \tag{11}$$

8) L'angle α est compté à partir du rayon qui passe par l'origine de la développante.

(12) $$ds_2 = \frac{1-x}{\rho} . R_1 . (1+\rho) : \sin\beta . d\alpha_1 = A . \frac{1-x}{\rho}.$$

Aux fig. 4 et 5 nous avons dessiné, en fonction de x, les diagrammes de $\frac{ds_1}{A}$ et de $\frac{ds_2}{A}$, pour les cas où : $\rho = 1$ et $\rho = 2$.

Des relations 11 et 12 (Cf. fig. 4 et 5) nous déduisons :

(13) 1) qu'en B_1 :

(14) $$\begin{cases} ds_1 = 0 \\ ds_2 = A . \frac{1}{\rho} \end{cases}$$

(15) 2) qu'en A: $ds_1 = ds_2 = A . \frac{1}{1+\rho}$ (Cf. 6)

(16) 3) qu'en B_2 :

(17) $$\begin{cases} ds_1 = A \\ ds_2 = 0. \end{cases}$$

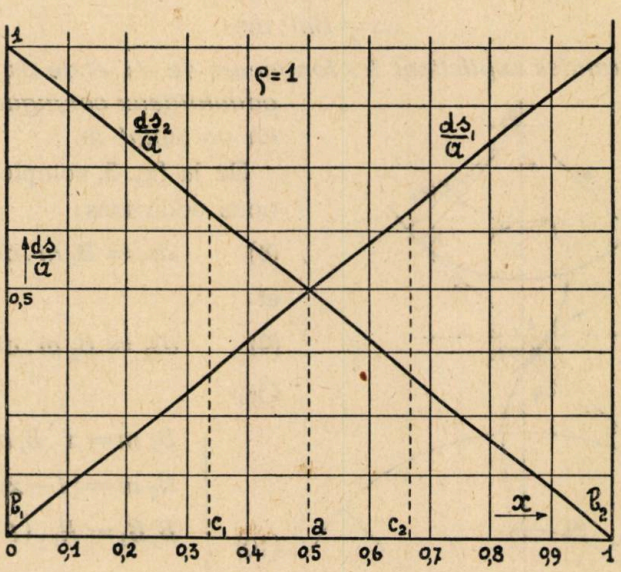


Fig. 4. Les points b_1, c_1, a, c_2, b_2 correspondent aux points B_1, C_1, A, C_2, B_2 de B_1B_2.
De B_1 à A : contact entre flanc du pignon et face de la roue ($ds_2 > ds_1$).
De A à B_2 : contact entre flanc de la roue et face du pignon ($ds_2 < ds_1$).

4) que quand les odontoïdes se touchent en un point m situé entre B_1 et A, le contact se faisant entre flanc du pignon et face de la roue, on a :

(18) $$ds_2 > \text{à } ds_1 .$$

Notons, ces renseignements nous seront utiles par la suite :

α) qu' entre B_1 et A :

(19) $$ds_2 = 2\,ds_1$$

en un point C_1 d'abscisse

(20) $$\bar{x}_1 = \frac{1}{1+2\varrho}$$

déduite de la relation 19 compte tenu de 11 et de 12 ;

β) que quand m est situé entre B_1 et C_1 :

$$0 < x < \frac{1}{1+2\varrho}$$

et que

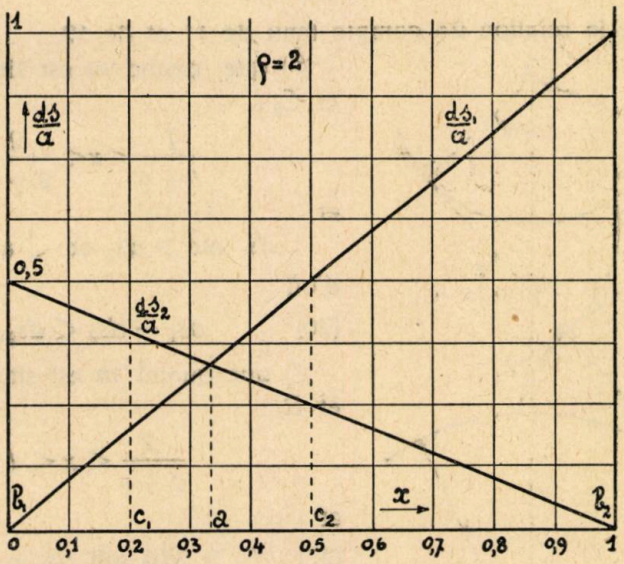


Fig. 5. Les points b_1 , c_1 , a, c_2 , b_2 correspondent aux points B_1 , C_1 , A, C_2 , B_2 de B_1B_2.
De B_1 à A : contact entre flanc du pignon et face de la roue ($ds_2 > ds_1$).
De A à B_2 : contact entre flanc de la roue et face du pignon ($ds_2 < ds_1$).

(21) ds_2 est $> 2\,ds_1$, d'où : $ds_2 - ds_1 > ds_1$;

γ) que quand m est situé entre C_1 et A :

$$\frac{1}{1+2\varrho} < x < \frac{1}{1+\varrho}$$

et que

ds_2 est $> ds_1$ et $< 2\,ds_1$

(22) d'où $ds_2 - ds_1 < ds_1$;

5) que quand les odontoïdes se touchent en un point m situé entre A et B_2, le contact se faisant alors entre flanc de la roue et face du pignon, on a :

(23) $$ds_1 > \text{à } ds .$$

Notons, pour cet intervalle également, ces renseignements nous seront utiles par la suite :

α') qu'entre A et B_2 :

(24) $$ds_1 = 2ds_2$$

en un point C_2 d'abscisse

(25) $$x_2 = \frac{2}{2+\varrho}$$

déduite de la relation 24 compte tenu de 11 et de 12,

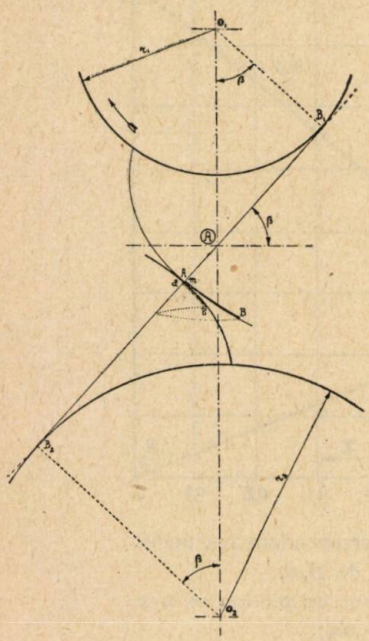


Fig. 6.

β') que quand m est situé entre A et C_2 :

$$\frac{1}{1+\varrho} < x < \frac{2}{2+\varrho}$$

et

$$ds_1 \text{ est } > ds_2 \text{ et } < \text{à } 2ds_2$$

d'où

(26) $$ds_1 - ds_2 < ds_2,$$

γ') que quand m est situé entre C_2 et B_2 :

$$\frac{2}{2+\varrho} < x < 1$$

et

(27) $ds_1 > 2ds_2$ soit $ds_1 - ds_2 > ds_2$.

Remarque : 2) les renseignements fournis par les relations 13 à 27 sont rassemblés au tableau I (ligne 1).

Afin de pouvoir fixer comment ds_1 et ds_2 interviennent dans les relations qui expliciteront les usures odontoïdales U_1 et U_2 en un lieu de contact m, il convient que nous nous rendions compte de la manière dont deux éléments odontoïdaux conjugués ds_1 et ds_2 s'abordent puis se quittent.

Considérons (fig. 6) deux profils conjugués en prise et leurs deux portions ab et AB qui entrent en prise par leurs extrémités a et A.

Quand la roue O_1 tourne, le point de contact des profils se déplace sur B_1B_2 en glissant le long de ab et de AB.

TABLEAU I		de B_1 à A Contact entre: flanc-pignon et face-roue				de A à B_2 Contact entre: flanc-roue et face-pignon		
		$ds_2 > ds_1$				$ds_1 > ds_2$		
		de B_1 à C_1	en C_1	de C_1 à A	en A	de A à C_2	en C_2	de C_2 à B_2
1		$ds_2 - ds_1 > ds_1$ $0 \leqslant x_1 < \frac{1}{1+2\rho}$	$ds_2 - ds_1 = ds_1$ $\overline{x_1} = \frac{1}{1+2\rho}$	$ds_2 - ds_1 < ds_1$ $\frac{1}{1+2\rho} < x_1 < \frac{1}{1+\rho}$	$ds_2 = ds_1$ $x_A = \frac{1}{1+\rho}$	$ds_1 - ds_2 < ds_2$ $\frac{1}{1+\rho} < x_2 < \frac{2}{2+\rho}$	$ds_1 - ds_2 = ds_2$ $\overline{x_2} = \frac{2}{2+\rho}$	$ds_1 - ds_2 > ds_2$ $\frac{2}{2+\rho} < x_2 \leqslant 1$
2	L'usure du pignon est proportionnelle à	$ds_2 - ds_1 = a.\frac{1-x_1.(1+\rho)}{\rho}$	$ds_2 - ds_1 = ds_1 = a.\frac{1}{1+2\rho}$	$ds_2 - ds_1 = a.\frac{1-x_1.(1+\rho)}{\rho}$	0	$ds_1 - ds_2 = a.\frac{x_2.(1+\rho)-1}{\rho}$	$ds_1 - ds_2 = ds_2 = a.\frac{1}{2+\rho}$	$ds_1 - ds_2 = a.\frac{1-x_2}{\rho}$
	L'usure de la roue est proportionnelle à	$ds_1 = a.x_1$	$ds_2 - ds_1 = ds_1 = a.\frac{1}{1+2\rho}$	$ds_2 - ds_1 = a.\frac{1-x_1.(1+\rho)}{\rho}$	0	$ds_1 - ds_2 = a.\frac{x_2.(1+\rho)-1}{\rho}$	$ds_1 - ds_2 = ds_2 = a.\frac{1}{2+\rho}$	$ds_1 - ds_2 = a.\frac{x_2.(1+\rho)-1}{\rho}$
3	$\frac{U_1}{b} =$	$\frac{1-x_1.(1+\rho)}{k''}.\sqrt{\frac{1}{x_1.(1-x_1)}}$	$\frac{\rho}{k''}.\sqrt{\frac{1}{2\rho}}$	$\frac{1-x_1.(1+\rho)}{k''}.\sqrt{\frac{1}{x_1.(1-x_1)}}$	0	$\frac{x_2.(1+\rho)-1}{k''}.\sqrt{\frac{1}{x_2.(1-x_2)}}$	$\frac{\rho}{k''}.\sqrt{\frac{1}{2\rho}}$	$\frac{1-x_2}{k''}.\sqrt{\frac{1}{x_2.(1-x_2)}}$
	$\frac{U_2}{b} =$	$x_1.\sqrt{\frac{1}{x_1.(1-x_1)}}$	$\sqrt{\frac{1}{2\rho}}$	$\frac{1-x_1.(1+\rho)}{\rho}.\sqrt{\frac{1}{x_1.(1-x_1)}}$	0	$\frac{x_2.(1+\rho)-1}{\rho}.\sqrt{\frac{1}{x_2.(1-x_2)}}$	$\sqrt{\frac{1}{2\rho}}$	$\frac{x_2.(1+\rho)-1}{\rho}.\sqrt{\frac{1}{x_2.(1-x_2)}}$
4	$\frac{U_1}{U_2} =$	$\frac{1}{k''}\ \frac{1-x_1.(1+\rho)}{x_1}$	$\frac{\rho}{k''}$	$\frac{\rho}{k''}$	$\frac{\rho}{k''}$	$\frac{\rho}{k''}$	$\frac{\rho}{k''}$	$\frac{\rho}{k''}.\frac{1-x_2}{x_2.(1+\rho)-1}$

AB et ab glissent en roulant l'un sur l'autre et, au bout d'un certain temps, les points extrêmes b et B de ab et AB se trouvent réunis sur B_1B_2 (fig. 7).

Remarquons qu'au début et à la fin de ce mouvement, la portion courte ab est entièrement couverte par la portion longue AB.

Ce que nous venons de dire au sujet du mouvement relatif des deux portions odontoïdales ab et AB vaut, évidemment, à la limite pour deux éléments odontoïdaux conjugués ds_1 et ds_2 en prise, éléments que, *pour ce qui concerne le glissement*, nous considérons comme rectilignes.

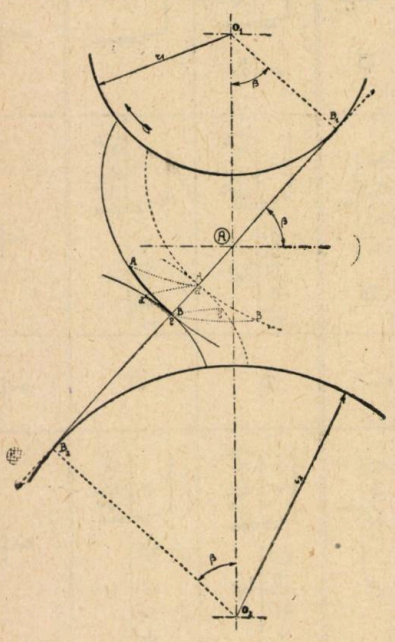


Fig. 7.

Observons que le glissement relatif des portions ab et AB, comme, aussi, des éléments correspondants ds_1 et ds_2 est dû au fait que leurs longueurs sont différentes, cette différence étant $AB - ab$ ou $|ds_2 - ds_1|$ suivant le cas.

Si $|ds_1 - ds_2|$ est nul, il n'y a plus de glissement et seul le roulement subsiste.

C'est ce qui se produit en A où $ds_2 = ds_1$ (Cf. fig. 4 et 5).

Pour pouvoir établir les relations existant entre les usures odontoïdales U_1 et U_2 en un lieu de contact m et les longueurs des éléments ds_1 et ds_2 qui y viennent en prise, nous examinerons d'une manière tout à fait théorique, les deux cas de déplacement de deux surfaces planes ab et AB qui glissent l'une sur l'autre.

Premier cas. Les deux pièces ab et AB occupent, initialement et finalement, les positions indiquées, respectivement, aux fig. 8 et 9.

Remarque: 3) la longueur du déplacement relatif de ab et de AB est égale à la somme des longueurs des deux pièces,

4) les deux pièces sont complètement dégagées l'une de l'autre au début et à la fin du mouvement,

5) s'il ne s'agit pas ici du cas du glissement intéressant le mouvement odontoïdal, il n'est cependant pas inutile de le considérer, comme nous le verrons par la suite.

Chacun des éléments d'une bande de largeur élémentaire de l'une des surfaces est léché, au cours du déplacement, par tous les éléments de

la bande correspondante de l'autre pièce et chacune de ces bandes, partant, la pièce entière, s'est, finalement, usée uniformément [9]).

Si la surface ab, après avoir été complètement léchée par AB, l'est, ensuite, à nouveau, par une pièce identique à AB, la surface ab s'est, en fin de compte, usée deux fois plus que quand elle ne subissait l'action que d'une pièce AB.

Il se déduit de ceci que l'usure de ab est proportionnelle à la longueur de la pièce AB qui glisse sur elle. Remarquons que l'usure d'une des deux pièces ne dépend pas de sa longueur propre. En effet : la moitié, le tiers... la $n^{ième}$ partie de la pièce considérée subit la même usure que la pièce entière.

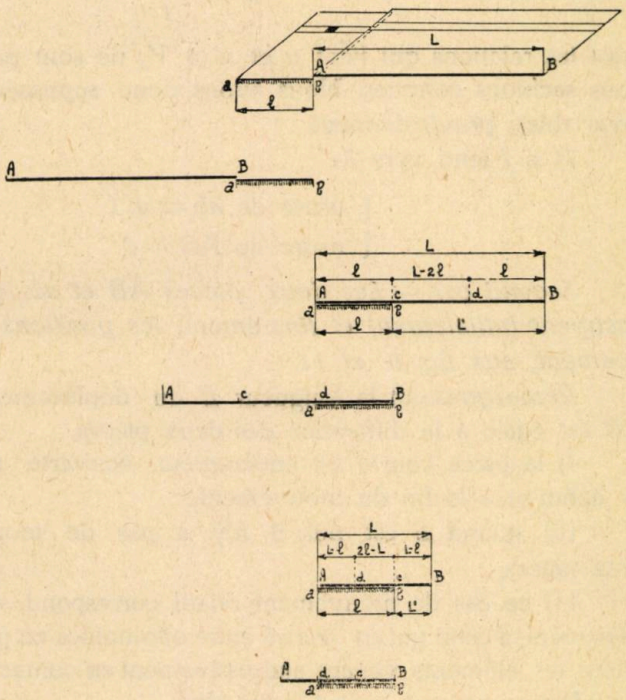


Fig. 8, 9, 10, 11, 12, 13.

Ce que nous venons de dire au sujet de ab vaut – *mutatis mutandis* – pour l'usure simultanée de la pièce AB léchée par ab.

Il se déduit de ce qui précède, pour le cas de glissement envisagé, que : *l'usure de l'une des deux pièces qui glissent l'une sur l'autre comme il est indiqué aux fig. 8 et 9 est proportionnelle à la longueur de l'autre.*

Notons u (nous l'appellerons : *usure unitaire*) l'usure subie par la pièce ab quand, sur elle, glisse une autre pièce (de même nature que AB) dont la longueur est égale à l'unité de longueur.

(28) usure de la pièce $ab = u.L$ }
(29) usure de la pièce $AB = u'.l$ } (fig. 8 et 9)

9) Compte non tenu de tout autre facteur.

u' étant l'usure unitaire de AB quand, sur elle, glisse une pièce de même nature que ab et ayant comme longueur : l'unité de longueur.

Remarques : 6) u et u' doivent, à notre avis, être fonctions de la vitesse relative de glissement

$$V_g = \frac{L + l}{t}$$

mais les relations qui lient u et u' à V_g ne sont pas actuellement que nous sachions connues. Nous avons donc supposée que u et u' sont invariables, provisoirement,

7) si l tend vers 0 :

$$\begin{cases} \text{usure de } ab = u.L \\ \text{usure de } AB = 0 . \end{cases}$$

Second cas. — Les deux pièces AB et ab, que l'on considère, occupent initialement et finalement, les positions indiquées, respectivement, aux fig. 10 et 11.

Remarques : 8) la longueur L' du déplacement relatif de ab et AB est égale à la différence des deux pièces,

9) la pièce courte est entièrement couverte par la pièce longue au début et à la fin du mouvement,

10) quand L' est nul, il n'y a pas de mouvement relatif des deux pièces,

11) ce cas de mouvement relatif correspond, au point de vue du glissement, à celui qui est réalisé entre odontoïdes en prise, quand on considère les éléments venant successivement en contact comme rectilignes.

Deux sous-cas sont à considérer :

1) L' est $>$ à l (fig. 10 et 11),

2) L' est $<$ à l (fig. 12 et 13).

Nous les examinons, successivement, ci-après :

1) *L' est $>$ à l* (fig. 10 et 11).

Usure de AB. — Seule, la portion centrale $cd = L - 2l$ de AB s'use uniformément (théoriquement) et le déplacement relatif de cd et de ab s'effectue dans les conditions examinées au premier cas.

Nous pouvons écrire (voir plus avant) :

(30) usure de cd = usure maxima de $AB = u'.l$.

Usure de ab. — ab étant, constamment, en contact avec AB, s'use, théoriquement, uniformément.

Appelons u l'usure que cette pièce subit quand AB se déplace sur elle d'une longueur égale à l'unité de longueur.

Dans ces conditions :

(31) usure de $ab = u.\ L' = u.(L - l)$.

Nous admettrons que u' et u sont invariables (Cf. remarque 6).

2) L' *est* $<$ *à* l (fig. 12 et 13).

Usure de AB. — Seule, théoriquement, la portion centrale

$$cd = 2l - L$$

de AB s'use uniformément.

Elle est, constamment, en contact avec ab et, nous rapportant à ce qui vient d'être dit pour le même cas (Cf. for. 31), nous pouvons écrire, le déplacement relatif étant : $L' = L - l$,

(32) usure de cd = usure maxima de $AB = u'.(L - l)$.

Usure de ab. — ab est constamment en contact avec AB et l'amplitude du mouvement relatif est $L' - l$, partant :

(33) usure de $ab = u.\ L' = u.\ (L - l)$.

Remarquons que, comme dans le premier cas, l'usure de l'une ou l'autre des deux pièces en présence est, en somme, indépendante de la longueur propre de cette pièce et que le facteur (la fonction) groupant les longueurs, qui intervient dans l'expression de l'usure, a la dimension d'une longueur.

Application de ce qui précède à l'usure odontoïdale.

Le mouvement relatif d'éléments odontoïdaux en prise rentre dans le second des deux cas de glissement examinés et la transposition des résultats qui le concernent (for. 30 à 33) est aisée quand on tient compte des renseignements fournis par la ligne 1 du tableau I.

En effet, de B_1 à C_1, par exemple :

$$L = ds_2 \qquad l = ds_1$$

et

$$L - l = ds_2 - ds_1 \text{ est } > \text{ à } ds_1$$

partant (Cf. 30 et 31) :

l'usure de ds_2 est proportionnelle à $u_2.\ ds_1$ (1)

et

l'usure de ds_1 est proportionnelle à $u_1.(ds_2 - ds_1)$.

Remarque : 12) rappelons : *a*) nous avons admis que l'usure de l'élément le plus long est proportionnelle à son usure théorique maxima.

b) nous devrons encore tenir compte d'autres facteurs pour pou-

voir expliciter les usures U_1 et U_2 du pignon et de la roue en un lieu de contact m.

A la ligne 2 du tableau I, nous avons, pour chacune des portions : $B_1 C_1$ (où $ds_2 - ds_1 > ds_1$) ; $C_1 A$ (où $ds_2 - ds_1 < ds_1$) ; AC_2 (où $ds_1 - ds_2 < ds_2$) ; CB (où $ds_1 - ds_2 > ds_2$) explicité, en fonction de x (Cf. 11 & 12) les longueurs auxquelles les usures odontoïdales respectives du pignon et de la roue sont proportionnelles.

Poursuivons l'examen des autres facteurs dont les usures U_1 et U_2 dépendent :

b) (voir page 231)

Dans un engrenage, les dents du pignon interviennent, pendant un certain laps de temps, ϱ fois plus souvent que celles de la roue dans la transmission du mouvement.

Il se déduit de ceci, que ϱ devra intervenir comme facteur multiplicateur, dans l'expression de l'usure odontoïdale U_1 du pignon.

c) (voir page 231)

Pour pouvoir tenir compte de la résistance à l'usure (toutes autres conditions restant constantes) du matériau-pignon et du matériau-roue, nous avons introduit le coefficient

$$k'' = \frac{\text{usure du métal-roue}}{\text{usure du métal-pignon}} = \frac{u_2}{u_1} \tag{34}$$

que, de sentiment, nous supposerons indépendant de la vitesse de glissement.

En ayant désigné par u_2 l'usure unitaire du métal-roue, nous obtenons donc pour ce qui concerne l'usure unitaire u_1 du métal-pignon

$$u_1 = \frac{u_2}{k''} . \tag{35}$$

e) (voir page 231)

La pression entre éléments odontoïdaux en prise n'est pas sans influence sur l'importance de l'usure. Nous admettrons, à défaut de renseignement plus précis, et comme nos prédécesseurs, qu'elle est proportionnelle à cette pression que l'on calcule par la formule de Hertz et que nous notons σ_H :

$$\sigma_H = \sqrt{0{,}35 \frac{E_1 . E_2}{E_1 + E_2} \cdot \frac{F}{l_e} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 . R_2}} \tag{36}$$

relation dans laquelle :

F = l'effort maximum transmis d'une dent à l'autre,

$R_1 = B_1\, m$ et $R_2 = B_2\, m$ les rayons odontoïdaux de courbure pour le point de contact m envisagé,

l_e la longueur axiale de l'engrenage [10]),

E_1 et E_2 les coefficients d'élasticité longitudinale du matériau-pignon et du matériau-roue.

En fonction de notre variable x, nous obtenons ;

$$\sigma_H = \mathcal{B} \cdot \sqrt{\frac{1}{x \cdot (1-x)}} \tag{37}$$

où

$$\mathcal{B} = \sqrt{\frac{0{,}35}{l_e \cdot R_1 \cdot (1+\varrho) \cdot \sin\beta} \cdot \frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2} \cdot F}. \tag{38}$$

Faisons remarquer que la formule de Hertz a été établie dans le cas, non réalisé ici, d'un contact sec et statique.

Le diagramme du facteur

$$\sqrt{\frac{1}{x \cdot (1-x)}}$$

est dessiné, en fonction de x, à la fig. 14.

Expressions de l'usure U_1 du pignon et de l'usure U_2 de la roue en un point de contact m.

Compte tenu des renseignements consignés à la ligne 2 du tableau I et de ce qui a été dit, sous repères b, c, d, e au sujet de ϱ, u_1, u_2, k'' et σ_H nous établissons aisément les relations explicitant les usures correspondantes U_1 et U_2 en un point de contact m.

Ces relations figurent à la ligne 3 du tableau I.

Le facteur C qui intervient dans les expressions de U_1 et de U_2 se développe comme suit :

$$C = u_2 \cdot A \cdot B = u_2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}175}{k'''} \cdot \frac{E_1}{1 + \frac{E_1}{E_2}} \cdot (1+\varrho) \cdot F \cdot \sqrt{n_1 \cdot \sin\beta}\, d\alpha_1} \tag{39}$$

soit :

$$C = \mathcal{D} \cdot \sqrt{n_1 \cdot \sin\beta}\,. \tag{40}$$

---

10) $l_e = k''' \cdot M$

où M (module) $= \frac{2R}{n} = \frac{p}{\pi}$.

Expression de l'usure totale $U_1 + U_2$ du pignon et de la roue en un point de contact m.

Au tableau II nous avons explicité les relations qui, finalement, permettent le calcul de l'usure totale $U_1 + U_2$ du pignon et de la roue,

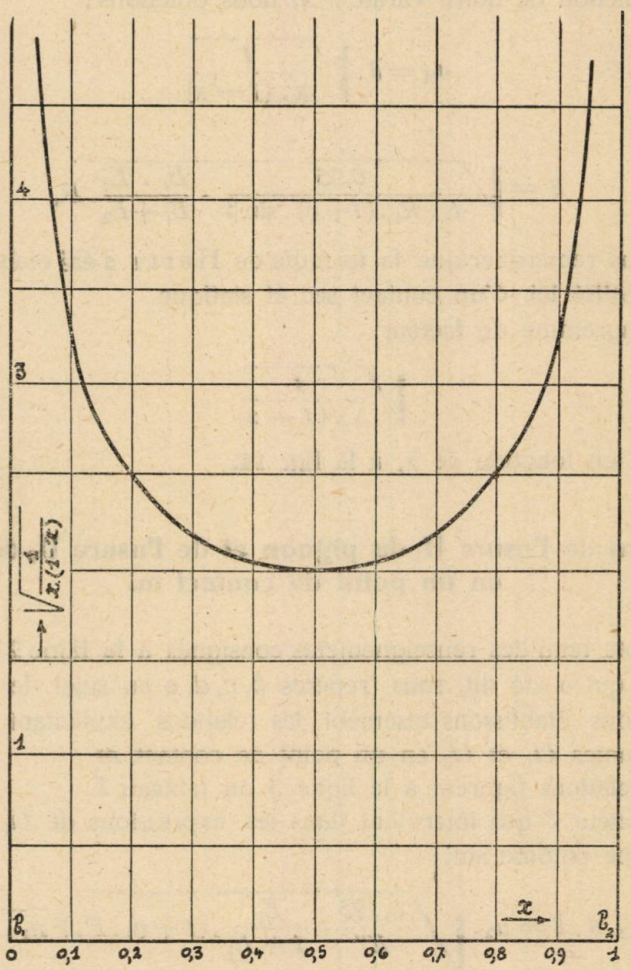


Fig. 14.

en un point de contact m, dans les divers intervalles en lesquels nous avons montré que $B_1 B_2$ devait être scindé au point de vue des lois d'usure s'y rapportant.

Aux fig. 15 et 16 nous avons dessiné les diagrammes de $\frac{U_1 + U_2}{C}$ en fonction de x, pour, respectivement :

(fig. 15) $\begin{cases} \varrho = 1 \ , \ k'' = 1 \\ \varrho = 1 \ , \ k'' = 0{,}5 \end{cases}$

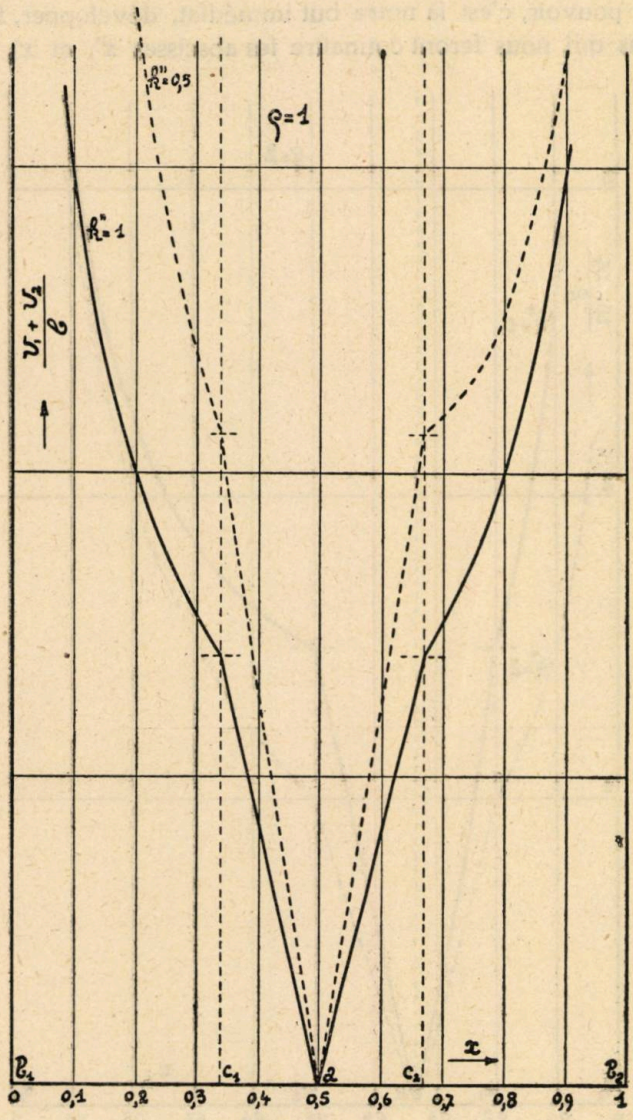


Fig. 15.

(fig. 16) $\begin{cases} \varrho = 2 \ , \ k'' = 1 \\ \varrho = 2 \ , \ k'' = 2. \end{cases}$

§ II

Par ce qui précède, nous avons établi l'expression de l'usure

odontoïdale totale en un point de contact m quelconque de deux odontoïdes conjuguées en prise.

Pour pouvoir, c'est là notre but immédiat, développer, finalement, les relations qui nous feront connaître les abscisses x'_1 et x'_2 des points

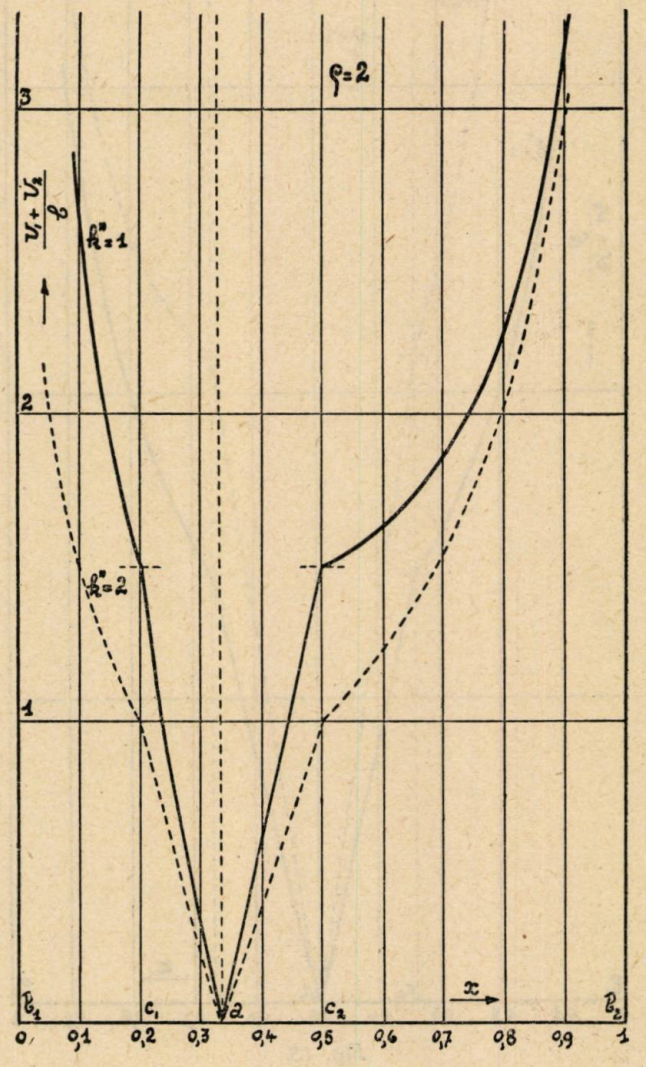


Fig. 16.

extrêmes de contact où nous désirons réaliser des usures totales U_1+U_2 égales (nous en déduirons, finalement, R_{t1} et R_{t2}) il convient d'expliciter, en fonction de x'_1 et de x'_2, l'écart $B'_1 B'_2$ des deux points extrêmes de contact.

Le *segment* $B'_1 B'_2$ *des contacts réalisés* doit être supérieur au pas de base p_b pour que la transmission du mouvement puisse se faire continûment.

Posons :

(41) $$B'_1 B'_2 = k' \cdot p_b$$

où le „*recouvrement*" k' est supérieur à l'unité.

Nous pouvons écrire, successivement :

$$B_1 B'_2 = x'_2 \cdot B_1 B_2$$
$$B_1 B'_1 = x'_1 \cdot B_1 B_2$$

d'où

(42) $$B'_1 B'_2 = (x'_2 - x'_1) \cdot B_1 B_2 .$$

Compte tenu de ce que :

$$p_b = \frac{2\pi \cdot R_1 \cdot \cos\beta}{n_1}$$

et

$$B_1 B_2 = R_1 \cdot (1+\varrho) \cdot \sin\beta$$

nous déduisons de 42, entre x'_2 et x'_1, la relation :

(43) $$\boxed{x'_2 - x'_1 = \frac{2\pi \cdot k'}{n_1 \cdot (1+\varrho) \cdot \operatorname{tg}\beta}} .$$

Remarque préliminaire à la mise en oeuvre des relations du tableau II et de la formule 43 en vue du calcul de x_1' *et de* x_2'.

Il se déduit des relations écrites au tableau II :

1) qu'en C_1 et C_2 les usures totales sont egales,

2) que pour des contacts situés en dehors du segment $C_1\ C_2$ (donc de B_1 à C_1 et de C_2 à B_2) les usures totales sont supérieures à celles qui sont réalisées en C_1 et C_2 (Cf. fig. 15 et 16),

3) que pour des contacts situés sur $C_1\ C_2$, les usures sont inférieures à celles réalisées en C_1 et C_2 (Cf. fig. 15 et 16).

En conséquence, si l'écart $x_2' - x_1'$ est supérieur à $\bar{x}_2 - \bar{x}_1$ (Cf. 20 et 25), il conviendra, pour connaître les usures aux points

TABLEAU II	de B_1 à C_1	en C_1	de C_1 à A	en A	de A à C_2	en C_2	de C_2 à B_2	
$\frac{U_1 + U_2}{\beta}$	$0 \leqslant x_1 < \frac{1}{1+2\varrho}$	$\bar{x}_1 = \frac{1}{1+2\varrho}$	$\frac{1}{1+2\varrho} < x_1 < \frac{1}{1+\varrho}$	$x_A = \frac{1}{1+\varrho}$	$\frac{1}{1+\varrho} < x_2 < \frac{2}{2+\varrho}$	$\bar{x}_2 = \frac{2}{2+\varrho}$	$\frac{2}{2+\varrho} < x_2 \leqslant 1$	
$\left[\frac{1-x_1(1+\varrho)}{k''} + x_1\right] \sqrt{\frac{1}{x_1(1-x_1)}}$	$(\frac{\varrho}{k''}+1) \sqrt{\frac{1}{2\varrho}}$	$\left[1-x_1(1+\varrho)\right]\left(\frac{1}{k''}+\frac{1}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{1}{x_1(1-x_1)}}$	0	$\left[x_2(1+\varrho)-1\right]\left(\frac{1}{k''}+\frac{1}{\varrho}\right)\sqrt{\frac{1}{x_2(1-x_2)}}$	$(\frac{\varrho}{k''}+1) \sqrt{\frac{1}{2\varrho}}$	$\left[\frac{1-x_2}{k''} + \frac{x_2(1+\varrho)-1}{\varrho}\right] \sqrt{\frac{1}{x_2(1-x_2)}}$		
I		II		II		I		

extrêmes de contact d'abscisses x_2' et x_1' de s'adresser aux formules I du tableau II et si l'écart $x_2' - x_1'$ est inférieur à $\bar{x}_2 - \bar{x}_1$, ce sont les formules II du même tableau qui devront être mises en oeuvre.

Admettons que l'on ait fait choix de β, k' et n_1 (voir plus loin).

Les formules du tableau à utiliser seront les formules I ou II suivant que, respectivement, on aura :

$$x_2' - x_1' > \text{ ou } < \text{ à } \bar{x}_2 - \bar{x}_1$$

soit (compte tenu de 20, 25 et 43), suivant que

$$(44) \qquad n_1 \text{ est } < \text{ ou } > \text{ à } \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi \cdot k'}{\operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{(2+\varrho) \cdot (1+2\varrho)}{\varrho \cdot (1+\varrho)} = n_{1c}$$

que nous appelons :

„nombre critique de dents"

de l'engrenage (ϱ, k', β) considéré.

Utilisation des relations du tableau II ou d'un diagramme analogue à ceux des figures 15 et 16 en vue du calcul des rayons des circonférences de tête d'un engrenage pignon - roue extérieur.

1°) Si n_1 est $<$ à n_{1c} on déduira x_1' et x_2' des relations :

$$(45) \quad \begin{cases} x_2' - x_1' = \dfrac{2\pi \cdot k'}{n_1 \cdot (1+\varrho) \cdot \operatorname{tg}\beta} \\ \left[\dfrac{1 - x' \cdot (1+\varrho)}{k''} + x_1'\right] \cdot \sqrt{\dfrac{1}{x_1' \cdot (1-x_1')}} = \\ = \left[\dfrac{1 - x_2'}{k''} + \dfrac{x_2' \cdot (1+\varrho) - 1}{\varrho}\right] \cdot \sqrt{\dfrac{1}{x_2' \cdot (1-x_2')}} \end{cases}$$

2°) Si n_1 est $>$ à n_{1c} on déduira x_1' et x'_2 des relations :

$$(46) \quad \begin{cases} x_2' - x_1' = \dfrac{2\pi \cdot k'}{n_1 \cdot (1+\varrho) \cdot \operatorname{tg}\beta} \\ \left[1 - x'_1 \cdot (1+\varrho)\right] \cdot \sqrt{\dfrac{1}{x'_1 \cdot (1-x'_1)}} = \\ = \left[x'_2 \cdot (1+\varrho) - 1\right] \cdot \sqrt{\dfrac{1}{x'_2 \cdot (1-x'_2)}} \text{ [11]} \end{cases}$$

11) Observons que pour $n_1 > n_{1c}$ la seconde des relations 46 (cf. 45) est indépendante de k''.

Connaissant x'_2 et x'_1 on déterminera, aisément, ensuite R_{t1} & R_{t2}, partant, aussi, R_{p1} et R_{p2} (rayons des circonférences de pied) par les relations 47 que l'on établit sans peine :

$$(47)\quad \begin{cases} R_{t1} = \chi . R_1 \text{ où } \chi = \sqrt{\cos^2\beta + x'^2_2 . (1+\varrho)^2 . \sin^2\beta} \\ R_{t2} = \zeta . R_1 \text{ où } \zeta = \sqrt{\varrho^2 . \cos^2\beta + (1-x'_1)^2 . (1+\varrho)^2 . \sin^2\beta} \\ R_{p1} = \xi . R_1 \text{ où } \xi = 1 + \varrho - \zeta - \dfrac{j}{R_1} \text{ [12]} \\ R_{p2} = v . R_1 \text{ où } v = 1 + \varrho - \chi - \dfrac{j}{R_1} . \end{cases}$$

Influence, sur l'usure odontoïdale :
de la valeur du recouvrement k',
de l'angle de pression β.
du nombre de dents n_1

1) *Influence de k'.*

Il se déduit de la relation 43 et de l'allure des courbes d'usure (Cf. fig. 15 et 16), vu la condition d'égalité des usures totales en B'_1 et en B'_2 que l'on s'impose, que la détérioration par frottement sera d'autant plus faible, que k' est plus réduit, l'écart $x'_2 - x'_1$ étant d'autant plus petit (toutes autres caractéristiques demeurant inchangées) que k' est plus voisin de l'unité.

Plus k' est faible, plus la précision dans la réalisation de l'engrenage doit être grande.

2) *Influence de n_1 et de β.*

Pour discuter de l'influence de n_1 et de β sur l'usure, il faut considérer, simultanément, les relations développant :

$$x'_2 - x'_1 \text{ et } U_1 + U_2 \text{ (en } B'_1 \text{ et en } B'_2).$$

Ces dernières, compte tenu de la relation 40, s'explicitent, d'une manière générale, comme suit :

$$U_1 + U_2 = D . \sqrt{n_1 . \sin\beta} . f(x, \varrho, k'').$$

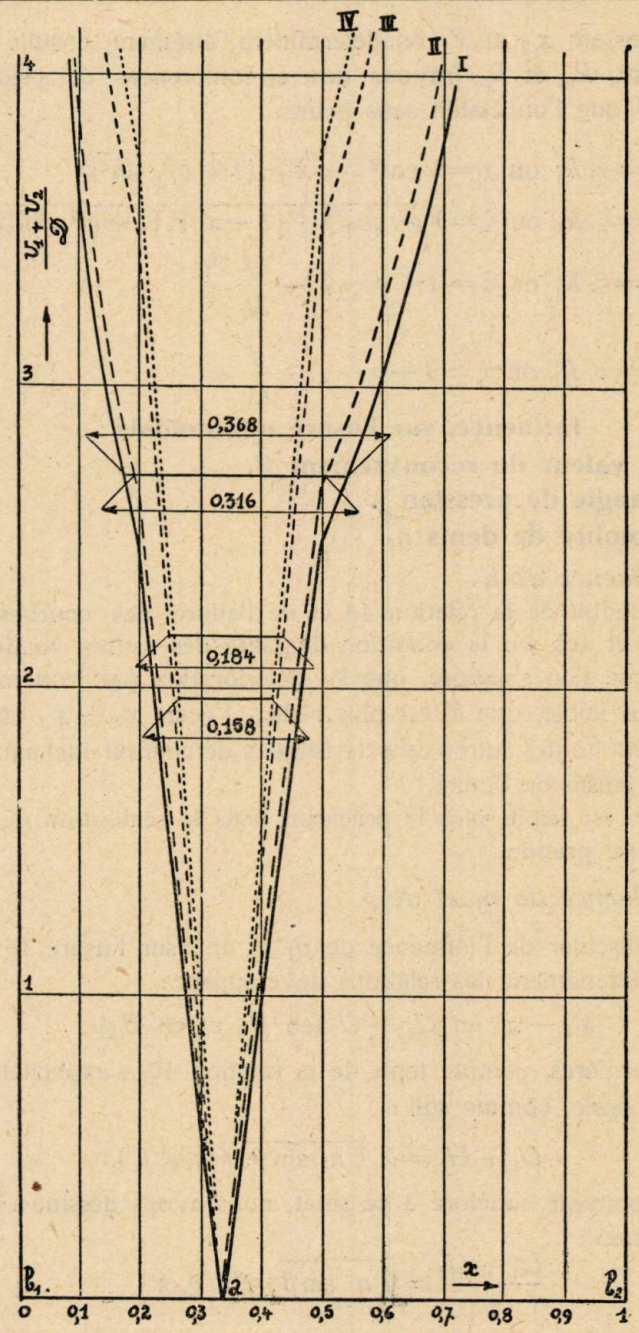
Pour pouvoir conclure à ce sujet, nous avons dessiné à la fig. 17 les diagrammes :

$$(48)\qquad \frac{U_1 + U_2}{D} = \sqrt{n_1 \sin\beta} . f(x, \varrho, k'')$$

correspondant aux cas suivants :

---

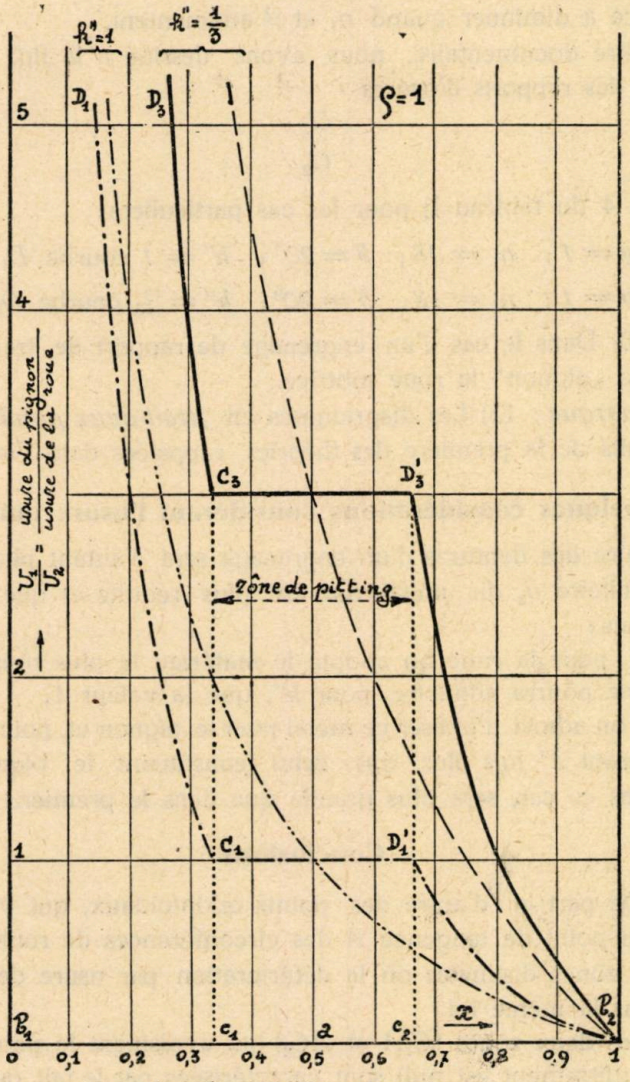
12) On pourra adopter : $j = 0{,}166\ M = 0{,}332\ \dfrac{R_1}{n_1}$ d'où : $\dfrac{j}{R_1} = \dfrac{0{,}332}{n_1}$.



Courbe I : $n_1 = 18$, $\beta = 20^0$ et $x'_2 - x'_1 = 0{,}368$
Courbe II : $n_1 = 18$, $\beta = 23^0$ et $x'_2 - x'_1 = 0{,}316$
Courbe III : $n_1 = 36$, $\beta = 20$ et $x'_2 - x'_1 = 0{,}184$
Courbe IV : $n_1 = 36$, $\beta = 23^0$ et $x'_2 - x'_1 = 0{,}158$

Fig. 17.

$$\left.\begin{array}{ll} n_1 = 18, & \beta = 20^0 \\ n_1 = 18, & \beta = 23^0 \\ n_1 = 36, & \beta = 20^0 \\ n_1 = 36, & \beta = 23^0 \end{array}\right\} \quad \varrho = 2, \quad k' = 1{,}15, \quad k'' = 2.$$



„*zône de pitting*" = zône où

$$\frac{\text{longueur roulante}}{L'} \text{ est} > \text{à } 1$$

et tend vers 1' en A.

Fig. 18.

La valeur de $x'_2 - x'_1$ pour chacun de ces cas est, respectivement :

$$0{,}368\ ;\quad 0{,}316\ ;\quad 0{,}184\ ;\quad 0{,}158.$$

L'examen des diagrammes indique clairement que l'usure

$$(U_1 + U_2)_{\text{en } B'_1} = (U_1 + U_2)_{\text{en } B'_2}$$

a tendance à diminuer quand n_1 et β augmentent.

A titre documentaire, nous avons dessiné à la fig. 18, les diagrammes des rapports d'usures

$$\frac{U_1}{U_2}$$

(Cf. ligne 4 du tableau I) pour les cas particuliers :

1°) $\varrho = 1$; $n_1 = 18$; $\beta = 20^0$; $k'' = 1$ courbe $D_1 C_1 D'_1 b_2$

2°) $\varrho = 1$; $n_1 = 18$; $\beta = 20^0$; $k'' = 1/3$ courbe $D_3 C_3 D'_3 b_2$.

N. B. Dans le cas d'un engrenage de rapport de transmission l, on appelle „pignon" la roue motrice.

Remarque : 13) Les diagrammes en *„traît-deux points"* et *„traît"* sont déduits de la première des théories rappelées dans l'introduction ;

Quelques considérations considérant l'usure unitaire.

L'usure des dentures d'un engrenage sera d'autant plus faible que l'usure unitaire u_2 du métal-roue est plus réduite et que k'' est plus grand, mais :

a) si, pour la roue on adopte le matériau le plus résistant à l'usure, on ne pourra admettre, pour k'', que la valeur 1,

b) si on admet d'utiliser ce métal pour le pignon et, pour la roue, un métal s'usant k'' fois plus que celui constituant le pignon, l'usure totale, dans ce cas, sera plus grande que dans le premier.

Conclusions.

1) De part et d'autre des points odontoïdaux, qui viennent en contact au point de tangence A des circonférences de roulement, existent deux zônes distinctes où la détérioration par usure de glissement ne suit pas la même loi.

2) Les deux zônes ($C_1 A$ et AC_2) qui avoisinent le point A (en ce point : le glissement est nul) sont caractérisées par le fait que le roulement l'y emporte sur le glissement. L'ensemble de ces deux zônes doit constituer ce que l'on appelle *„zône de pitting"* caractérisée par une détérioration (due, en ordre principal, à des phénomènes accompagnant le roulement) dont l'aspect diffère de celle que présentent les deux

zônes extérieures (contacts se faisant sur $B_1 C_1$ et $C_2 B_2$) où elle est due, en ordre principal, au glissement.

3) Il existe pour un engrenage dont les dimensions radiales des dentures sont calculées de manière à réaliser des usures totales égales aux points extrêmes de contact, un nombre caractéristique de dents (n_{1c}) du pignon (dépendant de: k', ϱ, β). Si n_1 est supérieur à n_{1c}, les contacts odontoïdaux se font, tous, dans la „zône de pitting".

4) Le nombre de dents du pignon d'un engrenage et l'angle de pression ne doivent pas être trop petits.

5) Le „*recouvrement*" k' doit être aussi faible que possible [13]). Faisons observer que la précision, dans la réalisation des dentures et le montage de l'engrenage, doit être d'autant plus grande que k' est petit.

La construction de moyenne précision s'accomode de 1,4 comme valeur minima de k'.

Dans une construction très précise on pourra descendre jusqu'à $k' = 1{,}25$.

On peut considérer, qu'actuellement, $k' = 1{,}15$ est l'apanage des engrenages de très haute précision.

Faisons observer que quand il s'agit de dentures normalisées (Brown and Sharpe; Fellows; Stub a, b, c; *A. B. S.*) la grandeur du „*recouvrement*" n'est pas choisie, mais subie (il est parfois très grand: 1,7 et plus) vu que des règles purement géométriques, uniquement, fixent les dimensions radiales ce ces dentures.

6) Le phénomène de l'interférence (caractérisant les engrenages à dentures normalisées à petit nombre de dents) à propos duquel tant de méthodes de correction furent proposées n'a plus à être redouté vu que la méthode (on s'impose que tous les contacts soient sur $B_1 B_2$) conduit à des valeurs des rayons des circonférences de tête telles que, toujours: R_{t1} et R_{t2} seront inférieurs, respectivement, à $O_1 B_2$ et $O_2 B_1$.

7) Les engrenages à dentures normalisées n'offrent pas l'avantage économique et fonctionnel de s'user également aux points extrêmes de contact.

(Reçu le 8 Décembre 1947)

(Université de Liége et l'Ecole Industrielle Supérieure de la Ville de Liége)

13) Nous avons admis, pour établir nos formules (Cf. calcul de σ_H), de n'envisager, jamais, qu'un seul point de contact malgré que l'on doive avoir, nécessairement: $k' > 1$ et que, partant, le contact n'est pas constamment monoponctuel.

531/534

LA INTEGRAZIONE DELLA EQUAZIONE $\Delta^4 \chi = 0$ IN UN PROBLEMA ELASTICO IN TRE DIMENSIONI [1]

di

DOMENICO GENTILONI SILVERJ

1. *Enunciato del problema.*

L'elemento di macchina sezionato in figura 1 è un solido di rivoluzione intorno all'asse Z, che viene forzato a caldo, a guisa di coperchio, sul disco che ne constiuisce la sede. Coperchio e disco recano un foro centrale.

Il coperchio ha nello stato iniziale un diametro interno $2(b+r)$ leggermente inferiore al diametro del disco (si ponga $\frac{D}{2} = b+r+\delta$) riscaldato, esso viene liberamente applicato sulla sede appoggiando sul piano EF.

Quando l'anello si raffredda, preme contro la parete ed in conseguenza tutto il pezzo resta elasticamente sollecitato: s'intende studiare qual'è la distribuzione degli sforzi interni indotti nel pezzo, una volta ritornato alla temperatura ordinaria.[2])

La variazione di temperatura (supposta uniforme e lenta, tale da non generare tensioni anomale) costituisce soltanto l'accorgimento tecnico usato per realizzare il calettamento: essa quindi non compare tra i dati del problema elastico perché lo stato di tensione superstite è lo stesso che si avrebbe se, rimanendo il pezzo alla temperatura ordinaria, ai punti della superfice cilindrica fossero impressi certi spostamenti che verranno discussi e precisati appresso nella analisi delle condizioni al contorno.

Il corpo viene a trovarsi in uno stato di coazione, generata dal

---

1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, Roma.

2) Il problema fu proposto all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo dalla Soc. Franco Tosi.

rispetto di un vincolo esterno non compatibile con lo stato iniziale. Si usa il termine di *coazione* perché mancano forze esterne esplicitamente date. E'una coazione che vorremmo chiamare di I tipo in quanto la deformazione è generabile mediante uno spostamento elastico funzione del punto, ovunque continuo. Diremo di II tipo le *distorsioni* (realizzabili fisicamente o almeno idealmente mediante uno spostamento *quasi* [1]) continuo) e di III tipo quelle coazioni (dovute per esempio a tempera irregolare, al superamento del limite elastico in alcuni e comunque diffusi punti del corpo) in cui la deformazione non può in alcun modo essere pensata come derivante da spostamento [2]).

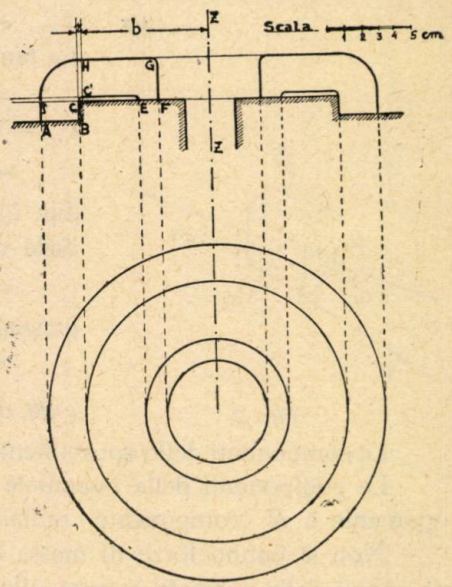


Fig. 1.
Sezione diametrale e proiezione orizzontale del pezzo.

Questo accenno valga a ricordare che nel caso presente la deformazione deve soddisfare ovunque le equazioni di congruenza, appunto perché deriva da uno spostamento ovunque continuo.

Il problema può allora essere presentato in due forme: ricerca delle componenti dello spostamento, ovvero ricerca delle componenti della deformazione. Nella *prima forma* si evitano le equazioni di congruenza in quanto le funzioni incognite u, v, w sono primitive. Nella *seconda forma* le funzioni incognite (le ε, le γ) sono derivate e quindi non possono essere scelte ad arbitrio tra le soluzioni del sistema delle equazioni di equilibrio che è appunto indeterminato: essa è tuttavia preferita perché introducendo una *funzione di tensione* permette di ricondurre il sistema ad un'unica equazione differenziale alle derivate parziali.

2. *Equazioni dell'elasticità.*

Il problema proposto è in tre dimensioni; il solido è simmetrico

1) Vedi M. Picone - *Appunti di Analisi Superiore* - Ed. Rondinella 1940, Napoli, pag. 201.

2) Vedi G. Colonnetti - *Scienza delle Costruzioni* - Ed. Einaudi 1941, Torino, cap. XXIII.

e simmetricamente deformato rispetto ad un asse che chiameremo z. Giova quindi impiegare coordinate cilindriche: ϱ, θ (coordinate polari nel piano).

Tenuto conto della simmetria, su un elemento tridimensionale $d\varrho \,.\, \varrho d\theta \,.\, dz$ si hanno quattro componenti di tensione:

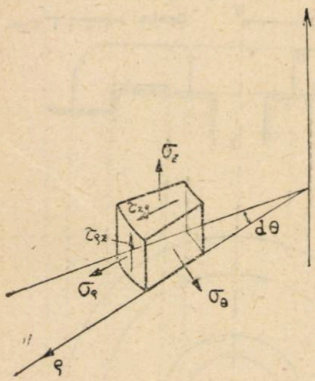


Fig. 2.

– sulla faccia $\varrho d\theta \,.\, dz$: σ_ϱ normale; $\tau_{\varrho z}$ tangenziale, parallela all'asse z;

– sulla faccia $\varrho d\theta \,.\, d\varrho$: σ_z normale; $\tau_{z\varrho} = \tau_{\varrho z}$ tangenziale, parallela a ϱ;

– sulla faccia $d\varrho . dz$: σ_θ normale; (fig. 2) e le corrispondenti componenti della deformazione sono:

ε_ϱ ε_θ ε_z allungamenti radiale, tangenziale, parallelo a z.

$\gamma_{\varrho z}$ scorrimento tra le facce $\varrho \, d\theta . \, dz$ $\varrho \, d\theta . \, d\varrho$.

Le componenti dello spostamento non nulle si riducono a due: u, w.

Le componenti della eventuale forza di superfice si riducono analogamente a R (componente radiale) e Z (componente parallela a z).

Non si hanno forze di massa apprezzabili. Si indicano con α, β, γ gli angoli della normale esterna alla superficie con le direzioni rispettivamente tangenziale, radiale, parallela a z (fig. 3). Per la medesima simmetria tutte le funzioni ora nominate sono costanti rispetto all'anomalia θ.

La deformazione è legata allo spostamento dalle relazioni:

$$\varepsilon_\varrho = \frac{\partial u}{\partial \varrho}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{\varrho}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{\varrho z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \varrho}$$

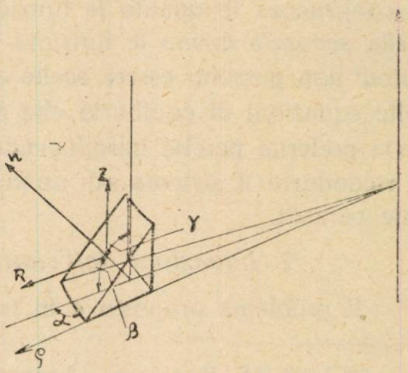


Fig. 3.

la legge di Hooke si esprime come di consueto

$$\varepsilon_\varrho = \frac{1}{E}[\sigma_\varrho - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_\varrho)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_\varrho + \sigma_\theta)]$$

$$\gamma_{\varrho z} = \frac{1}{G}\tau_{\varrho z}$$

essendo

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Il gruppo delle equazioni che si debbono impiegare nella seconda forma in coordinate cilindriche con simmetria rispetto all'asse z è dato dal Timoshenko [1]:
equazioni di equilibrio

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_\varrho}{\partial \varrho} + \dfrac{\partial \tau_{\varrho z}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_\varrho - \sigma_\theta}{\varrho} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{\varrho z}}{\partial \varrho} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\tau_{\varrho z}}{\varrho} = 0\,; \end{cases}$$

equazioni di congruenza

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta\sigma_\varrho + \dfrac{2}{\varrho^2}(\sigma_\varrho - \sigma_\theta) + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2}{\partial \varrho^2}(\sigma_\varrho + \sigma_\theta + \sigma_z) = 0 \\ \Delta\sigma_\theta + \dfrac{2}{\varrho^2}(\sigma_\varrho - \sigma_\theta) + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial}{\partial \varrho}(\sigma_\varrho + \sigma_\theta + \sigma_z) = 0 \\ \Delta\sigma_z + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_\varrho + \sigma_\theta + \sigma_z) = 0 \\ \Delta\tau_{\varrho z} - \dfrac{1}{\varrho^2}\tau_{\varrho z} + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2}{\partial \varrho\,\partial z}(\sigma_\varrho + \sigma_\theta + \sigma_z) = 0. \end{cases}$$

Ne deduciamo mediante la legge di Hooke le equazioni da impiegarsi nella prima forma:

$$\begin{cases} G\Delta u + (\lambda + G)\dfrac{\partial e}{\partial \varrho} - G\dfrac{u}{\varrho^2} = 0 \\ G\Delta w + (\lambda + G)\dfrac{\partial e}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

dove

1) S. Timoshenko - *Théorie de l'Elasticité*, 1936 cap. XI.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{(costante di Lamé)}$$

$$e = \frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{u}{\varrho} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{(dilatazione cubica)}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{(operatore di Laplace)}$$

in coordinate cilindriche, ove la funzione operanda sia come nel nostro caso costante rispetto a θ.

Le condizioni ai limiti possono vincolare vuoi le funzioni primitive (spostamenti) vuoi la derivate (deformazioni, cioé tensioni). Sono del primo tipo le equazioni di compatibilità con i vincoli esterni [1])

$$(3) \qquad \begin{cases} u = u_0(\varrho, z) \\ w = w_0(\varrho, z). \end{cases}$$

Sono del secondo tipo le equazioni di equilibrio per un tetraedro elementare che si affacci al contorno

$$(4) \qquad \begin{cases} \sigma_\varrho \cos\beta + \tau_{\varrho z} \cos\gamma = R \\ \tau_{\varrho z} \cos\beta + \sigma_z \cos\gamma = Z. \end{cases}$$

Le (4) possono esprimersi in termini di spostamento ottenendo le

$$(4') \qquad \begin{cases} \lambda e \cos\beta + G\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}\cos\beta + \frac{\partial u}{dz}\cos\gamma\right) + G\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}\cos\beta + \frac{\partial w}{\partial \varrho}\cos\gamma\right) = R \\ \lambda e \cos\gamma + G\left(\frac{\partial w}{\partial \varrho}\cos\beta + \frac{dw}{dz}\cos\gamma\right) + G\left(\frac{\partial u}{dz}\cos\beta + \frac{\partial w}{\partial z}\cos\gamma\right) = Z. \end{cases}$$

3. *Problemi al contorno*

Se si pone il problema nella prima forma (ricerca degli spostamenti) resta facilitata una visione comprensiva dei diversi problemi al contorno sia dal punto di vista matematico che dal punto di vista tecnico.

Dal punto di vista matematico si tratta della integrazione di due equazioni differenziali simultanee alle derivate parziali, nelle due funzioni incognite, u, w, equazioni valide entro un certo dominio con certe condizioni ai limiti.

L'essere queste del tipo (3) o del tipo (4') importerà in generale una diversa discussione sull'esistenza e unicità della soluzione e diversi metodi risolutivi. La distinzione tra i due casi è analoga a quella che corre tra il problema di Dirichlet e quello di Neumann nella

1) La simmetria rispetto all'asse z riduce a due le equazioni di equilibrio e le condizioni ai limiti.

integrazione dell'equazione $\Delta u = f$. Potrà anche qui presentarsi il problema misto quando su alcune porzioni del contorno siano assegnate le (3) e su altre le (4').

Dal punto di vista tecnico i due casi corrispondono alla impostazione dei sistemi staticamente determinati e a quella dei sistemi cosidetti iperstatici per vincoli esterni. Si ricorda anche che nella Scienza delle Costruzioni vengono principalmente trattate strutture unidimensionali: in esse la ipotesi della conservazione delle sezioni piane permette di sostituire alle condizioni ai limiti *puntuali* condizioni ai limiti *globali* relative cioè a una intera sezione: pertanto alle (4) corrisponde la assegnazione del sistema risultante (momento, sforzo normale, taglio) su determinate sezioni, e alle (3) l'assegnazione delle condizioni di vincolo su determinate altre sezioni (spostamento orizzontale, spostamento verticale, rotazione). E' poi in forza del principio di De Saint Venant che i tecnici accettano soluzioni che siano ovunque equilibrate, congruenti nei punti interni e che soddisfino alle effettive condizioni ai limiti globalmente anche se non puntualmente.

4. *Analisi delle condizioni al contorno*

Si debbono ora interpretare le condizioni al contorno nel problema proposto, alla ricerca di uno schema matematico esplicito e quanto possibile alla realtà.

Ammettiamo che a forzatura avvenuta, la reazione mutua tra disco e coperchio nei punti di AB, EF (fig. 1) sia nulla. Ciò può essere esatto per i punti di AB dove i due pezzi si distaccano o al più rimangono semplicemente a contatto senza sforzo; ma è certamente approssimato per i punti di EF.

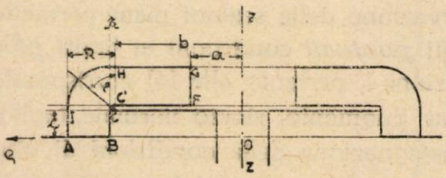
Di fatto nel raffreddamento il coperchio tenderà ad ingobbarsi al centro con concavità verso l'alto e i punti di EF tenderanno ad abbassarsi.

Possono verificarsi allora due ipotesi: se l'attrito lungo CB è sufficiente ad impedire lo spostamento rigido del coperchio, si svilupperà su EF una reazione normale diretta dal disco verso il coperchio che sarà appunto equilibrata dalla reazione tangenziale lungo CB. Se invece il coperchio si solleva (basta uno scorrimento minimo) possiamo ammettere che la reazione tangenziale lungo CB si annulli, annullandosi allora per conseguenza la reazione normale lungo EF.

Tra le due ipotesi abbiamo scelto la seconda che non ripugna dal punto di vista fisico e che permette di impostare un primo studio del problema. In ogni caso essa corrisponde ad una coazione possibile: solido *sospeso nello spazio*, privo di vincoli e di forze esterne espli-

citamente date (si prescinde dal peso proprio) *unicamente deformato dallo spostamento* δ *impresso ai punti del cilindro* CB. (Si può, allora, senza grave inconveniente, sopprimere idealmente il dente EF ottenendo lo schema della fig. 4)

Analizziamo tuttavia le limitazioni cui costringono le ipotesi fatte: noi ammettiamo che nei punti di CB sia ovunque $\tau = 0$. E' invece probabile che durante il raffreddamento nascano e si mantengano delle tensioni tangenziali: qualora però il loro integrale esteso all'intero cilindro di contatto fosse realmente nullo, il principio di De Saint Venant potrebbe entro certi limiti legittimare l'ipotesi addotta.



Sezione diametrale schematizzata.
Fig. 4.

Ai fini della nostra ricerca il punto controverso non è quindi l'annullarsi puntuale della τ quanto il verificarsi o meno di quel minimo movimento del coperchio verso l'alto che permetta l'annullarsi della reazione verticale su EF.

La seconda ipotesi ($u = \delta$ per tutti i punti di CB) importerebbe la assoluta rigidità della sede su cui il coperchio è forzato e il contatto tra disco e coperchio in ogni punto. La rigidità della sede è una ipotesi approssimata accettabile che corrisponde a quella dell'incastro perfetto nelle sezioni terminali degli archi elastici. Il contatto uniforme tra disco e coperchio non è affatto richiesto dalla realtà fisica, tanto è vero che le soluzioni approssimate che ricaveremo recano valori positivi della σ_ϱ (e cioè trazione) in una zona inferiore della superficie cilindrica CB, il che è intuitivo qualora si voglia soddisfare la condizione $M = \text{cost.}$ ma è evidentemente contrario alla realtà fisica.

D'altronde, ponendo $u = \delta$; $\tau = 0$ abbiamo già posto le due condizioni al contorno ammissibili: una ulteriore limitazione $\sigma_\varrho \leq 0$ può non essere compatibile.

Come si vede le ipotesi introdotte sono in parte convenzionali; ma a rigore nei punti della superficie CB noi potremmo fissare soltanto le disuguaglianze

$$u \geqslant \delta$$
$$\tau \leq f\sigma \qquad (f \text{ coeff. attrito})$$
$$\sigma \leq 0$$

le quali sono impotenti ad affrontare il problema.

Accettando le ipotesi fatte, le condizioni al contorno rimangono pertanto fissate come segue: (vedi fig. 4)

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\varrho &= 0\\ \tau_{\varrho z} &= 0\end{aligned}\right\} \text{ per } \left.\begin{aligned}\varrho &= a\\ c+r<z&\leq c+R\end{aligned}\right\} (GF) \text{ e per } \left.\begin{aligned}\varrho &= b+R\\ 0<z&<c\end{aligned}\right\} (AI)$$

(5)

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z &= 0\\ \tau_{\varrho z} &= 0\end{aligned}\right\} \text{ per } \left.\begin{aligned}z &= 0\\ b=r<\varrho&\leq b+R\end{aligned}\right\} (AB) \text{ e per } \left.\begin{aligned}z=c+r;\ z&=c+R\\ a<\varrho&\leq b\end{aligned}\right\} (C'F;\ HG)$$

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\varrho \operatorname{sen}\varphi+\tau_{\varrho z}\cos\varphi&=0\\ \sigma_z\cos\varphi+\tau_{\varrho z}\operatorname{sen}\varphi&=0\end{aligned}\right\} \text{per } \left.\begin{aligned}\varrho&=b+r\operatorname{sen}\varphi\\ z&=c+r\cos\varphi\end{aligned}\right\} (CC') \text{ e per } \left.\begin{aligned}\varrho&=b+R\operatorname{sen}\varphi\\ z&=c+R\cos\varphi\end{aligned}\right\} (IH)$$

$$\left.\begin{aligned}u &= \delta\\ \tau_{\varrho z} &= 0\end{aligned}\right\} \text{ per } \left.\begin{aligned}\varrho &= b+r\\ 0\leq z&\leq c\end{aligned}\right\} (CB).$$

Il problema è solo in apparenza un problema misto: è vero infatti che sulla superficie CB una delle condizioni riguarda lo spostamento e non la deformazione o tensione, ma per la simmetria rispetto all'asse z lo spostamento radiale è legato a una deformazione (allungamento secondo la tangente) da una relazione in termini finiti

$$u = \varepsilon_\theta \cdot \varrho$$

pertanto le condizioni al contorno su CB possono scriversi

$$(5') \qquad \left\{\begin{aligned}\sigma_\theta - \nu(\sigma_z+\sigma_\varrho) &= \delta\,\frac{E}{b+r}\\ \tau_{\varrho z} &= 0\end{aligned}\right.$$

essendo δ lo spostamento assegnato e $b+r$ il valore di ϱ su CB.

La prima condizione è dimensionalmente omogenea con le altre: dal punto di vista fisico è una condizione alquanto diversa perché a secondo membro non figura, come nota, una componente della forza superficiale; ma dal punto di vista matematico è sempre una certa combinazione lineare delle tensioni che sul contorno assume valori assegnati.

Indicando con σ'_θ la tensione ideale in direzione tangenziale, le (5') possono scriversi

$$\left\{\begin{aligned}\sigma_\theta' &= \delta\,\frac{E}{b+r}\\ \tau_{\varrho z} &= 0\end{aligned}\right.$$

sicché su CB viene in definitiva assegnata la σ_θ' al posto della σ_ϱ.

Il sistema viene di conseguenza trattato come se fosse staticamente determinato nel senso che non occorre la seconda integrazione (dalle tensioni agli spostamenti) per risolvere il problema.

Ricercheremo i valori delle tensioni (seconda forma), servendoci di una funzione di tensione.

5. *La funzione di tensione.*

Analogamente a quanto avviene per la funzione di Airy per i sistemi piani, si verifica [1]) che presa una qualsiasi funzione χ biarmonica nell'interno del dominio tridimensionale, quando si ponga:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma_\varrho &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\Delta\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial\varrho^2}\right)\\ \sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\Delta\chi - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\chi}{\partial\varrho}\right)\\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\Delta\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right]\\ \tau_{\varrho z} &= \frac{\partial}{\partial\varrho}\left[(1-\nu)\Delta\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right] \end{aligned}\right.$$

le funzioni σ e τ ora scritte soddisfano alle (1) e alle (2) costituiscono cioé un sistema di tenioni *internamente equilibrato* e *congruente*.

Pertanto alle (1) e (2) si sostituisce l'unica equazione differenziale alle derivate parziali del quarto ordine

$$(7)\qquad \Delta\Delta\chi = 0$$

dove Δ, operatore di Laplace in coordinate cilindriche, significa

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

e diventa per la simmetria rispetto a z

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

e pertanto la (7) diventa

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\chi\right] = 0.$$

---

1) vedi A. E. H. Love, *Theory of Elasticity*, 1927, p. 274.

Si tenga presente che la funzione χ è biarmonica nelle tre variabili ϱ, θ, z e non nelle due variabili ϱ, z.

Difatti l'espressione (7') pur non contenendo, per la simmetria, derivate rispetto a θ, contiene l'addendo $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}$ che altrimenti non comparirebbe.

Il problema analitico è così ricondotto a trovare una funzione χ biarmonica nei punti interi e tale che le combinazioni delle sue derivate parziali terze date dalle (6) soddisfino alle condizioni al contorno. La realtà fisica del problema permette di presumere che questa funzione esista. Per quanto riguarda l'unicità, si può dimostrare l'unicità delle funzioni derivate che rappresentano le tensioni [1]).

Per integrare la (7) si è adottata la soluzione proposta dal Timoshenko per i problemi elastici tridimensionali simmetrici rispetto a un'asse, sviluppando la funzione χ incognita in serie di polinomi biarmonici.

La ridotta n-sima della serie è una combinazione lineare di polinomi biarmonici, è quindi un integrale particolare della (7).

Le costanti della combinazione debbono essere determinate in modo da ottenere la funzione che, con gli n termini presi, meglio si avvicina a soddisfare le condizioni al contorno. Questa proposizione è stata tradotta in un criterio di *approssimazione globale*: determinare le n costanti in modo da rendere minimo l'errore quadratico medio relativo alle condizioni al contorno.

6. *Criterio di approssimazione globale*

Si considerino per questo nel punto generico sul contorno le differenze tra i valori delle componenti della forza superficiale ivi assegnate a quelli che risultano dal calcolo in funzione delle costanti C tuttora incognite.

Si avranno così due *errori*, essendo due nel nostro caso le condizioni (la terza è identicamente soddisfatta par simmetria).

Si faccia il quadrato di ciascuno, si sommino i due quadrati e della funzione così ottenuta si calcoli l'integrale I esteso a tutta la superficie di contorno.

---

1) Per la dimostrazione del teorema di unicità del sistema di tensioni, vedi ad esempio:

I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*. Mc. Graw-Hill, New-York, 1946, pag. 92.

A. Pirard, *La Photoélasticité*. H. Vaillant-Carmanne, Liége, 1947, pag. 80.

L'errore globale I, diviso per l'area della superficie di contorno, fornisce l'errore quadratico medio.

Per rendere minimo questo basterà rendere minima l'espressione I rispetto alle variabili C_i che vengono con ciò determinate mediante n equazioni lineari.

Essendo χ la funzione incognita; sia $\sum_1^n C_i \chi_i$ la ridotta n-sima della serie, P il generico punto interno, Q il generico punto sul contorno.

Le condizioni ai limiti sono del tipo

$$(8) \qquad \begin{cases} L_1[\chi(P)] = \varphi_1(Q) \\ L_2[\chi(P)] = \varphi_2(Q); \end{cases}$$

con il simbolo L indichiamo una operazione comprendente:

a) la combinazione lineare di certe derivate parziali della χ;

b) il passaggio al limite per P tendente a Q.

A secondo membro abbiamo le funzioni assegnate.

L'errore quadratico globale relativo alla ridotta n-sima è:

$$I_n = \int_S \left\{ \left[\sum_1^n C_i L_1(\chi_i) - \varphi_1 \right]^2 + \left[\sum_1^n C_i L_2(\chi_i) - \varphi_2 \right]^2 \right\} dQ$$

in cui S è la superficie del contorno del corpo.

Il criterio di approssimazione adottato consiste nel rendere $I_n = \min$ per ogni n, risolvendo il sistema di n equazioni lineari in n incognite:

$$\frac{\partial I_n}{\partial C_i} = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots n).$$

Si dimostra [1]) che, se è possibile determinare una successione di funzioni $[\chi_i]$ hilbertiane linearmente indipendenti e una successione di costanti $[C_i]$ tali che

$$\lim_{n \to \infty} I_n = 0$$

si ha anche

$$\sum_1^\infty {}_i C_i \frac{\partial^s \chi_i(P)}{\partial x_1^k \ldots \partial x_m^1} = \frac{\partial^s \chi(P)}{\partial x_1^k \ldots \partial x_m^1}$$

uniformemente per P variabile in ogni insieme chiuso interno al campo. Con linguaggio sintetico possiamo dire che l'approssimazione

1) Cfr. ad es., il Corso di Analisi Funzionale Lineare tenuto del Prof. M. Picone presso l'Istituto Naz. di Alta Matematica in Roma, nell'anno accademico 1941-42.

lineare globale delle condizioni al contorno, implica l'approssimazione puntuale alla funzione incognita nell'interno del corpo.

Il metodo, così giustificato in sede teorica, presenta alcuni lati positivi ai fini delle soluzioni approssimate che interessano la fisica e l'ingegneria: prima di tutto, quando si tratti in modo particolare di un problema di elasticità, si può dire che l'approssimazione globale delle condizioni al contorno è in armonia col principio di De Saint Venant, il quale tuttavia ne verrebbe fortemente generalizzato. Si intende che questa generalizzazione è imposta dalla necessità di affrontare in qualche modo il problema.

Con questo metodo le condizioni al contorno vengono inoltre approssimate in modo uniforme; d'altronde, nelle diverse porzioni della frontiera si potrebbero attribuire agli errori *pesi* diversi, dando un peso maggiore nelle zone dove maggiormente si appunta l'interesse del progettista o del ricercatore. Il criterio dei pesi è però del tutto intuitivo, sicché va usato con prudenza perché potrebbe portare a un sistema di tensioni che pure essendo possibile e pur approssimando notevolmente bene le condizioni in un tratto del contorno sia poi troppo diverso da quello reale, falsando così i risultati.

Un altro lato positivo che verrebbe meno in una eventuale approssimazione puntuale delle condizioni al contorno è il seguente: determinate le C_i in base al detto criterio, si calcoli il valore numerico di I_n. Questo numero (errore quadratico globale minimo) permette un giudizio sull'approssimazione raggiunta.

E' noto infatti che per $m > n$ si ha $I_m \leq I_n$; ora dalla maggiore o minore rapidità con cui diminuisce I si può giudicare sulla velocità di convergenza.

7. *Le funzioni approssimatrici.*

Descriviamo ora i polinomi impiegati nella integrazione numerica: è noto che la più generale funzione armonica in una sfera è ivi analitica, sviluppabile in serie di potenze assolutamente e uniformemente convergente in ogni insieme chiuso interno alla sfera.

Lo sviluppo nell'intorno del centro è uno sviluppo in serie di Mac Laurin:

$$u(x, y, z) = \sum_{0}^{\infty} {}_{hkl}\, a_{hkl}\, x^h y^k z^l$$

in cui

$$a_{hkl} = \left(\frac{\partial^{h+k+l} u}{\partial x^h \, \partial y^k \, \partial z^l} \right)_0 \frac{1}{h!\,k!\,l!}.$$

La stessa serie si può ordinare raggruppando in un unico polinomio tutti gli addendi di grado n, sicché

$$u = \sum_0^\infty{}_n \left[\sum_0^n{}_{hkl} \frac{\partial^n u}{\partial x^h \, \partial y^k \, \partial z^l} \frac{x^h}{h!} \frac{y^k}{k!} \frac{z^l}{l!} \right] = \sum_0^\infty{}_n V_n \qquad (n = h + k + l).$$

Gli addendi V_n sono polinomi armonici omogenei, „polinomi di Laplace". Esistono $2n+1$ polinomi di Laplace di grado n linearmente indipendenti.

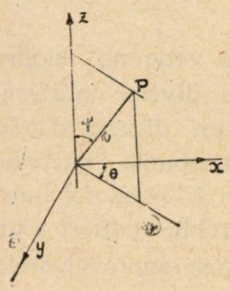


Fig. 5.

Si operi in un polinomio V_n di Laplace la trasformazione di coordinate (fig. 5)

$$x = r \operatorname{sen} \psi \cos \theta$$
$$y = r \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta$$
$$z = r \cos \psi$$

in cui r è la distanza del generico punto $P(xyz)$ dall'origine, ψ è la colatitudine, θ è la longitudine, misurata a partire dal piano xz.

Essendo V_n omogeneo di grado n, si potrà raccogliere r^n a fattor comune:

$$V_n = r^n Y_n(\operatorname{sen} \psi \cos \theta \ , \ \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \ , \ \cos \psi).$$

La Y_n dicesi „funzione sferica di ordine n"; essa è una funzione del punto variabile sulla sfera di raggio unitario, tale che moltiplicata per r^n dia un polinomio armonico omogeneo di grado n. Esistono $2n+1$ funzioni sferiche linearmente indipendenti di ordine n; chiamata Φ_n la loro generica combinazione lineare, il generico polinomio di Laplace sarà

$$V_n = r^n \, \Phi_n(\psi, \theta),$$

similmente nel piano il generico polinomio armonico omogeneo di grado n si esprime come prodotto di ϱ^n per una funzione (circolare) della anomalia θ

$$u = \varrho^n (a \cos n\theta + b \operatorname{sen} n\theta).$$

Si noti che nel piano anche per n negativo si hanno funzioni armoniche. Difatti è funzione armonica qualsiasi combinazione lineare della parte reale e del coefficiente dell'immaginario di una funzione analitica di variabile complessa. Orbene:

$$z^n = \varrho^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

è analitica anche per n negativo. L'analiticità viene però a mancare nell'origine dove le corrispondenti funzioni armoniche hanno un punto singolare.

Nel caso particolare del nostro problema, le funzioni approssimatrici sono quei particolari polinomi di Laplace che rispettino la simmetria rispetto all'asse z, tali che posti sotto la forma

$$V_n = r^n Y$$

diano una Y funzione della sola colatitudine ψ, sempre „funzione sferica" quindi, ma simmetrica rispetto a un asse.

Si verifica che il polinomio di Legendre $\mathcal{X}_n$ di grado n, quando come variabile si ponga $\cos\psi$, è appunto una funzione sferica simmetrica.

Il polinomio di Legendre di grado n, nell'espressione di Rodriguez è:

$$\mathcal{X}_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \qquad (\text{per } -1 < x < 1)$$

calcolabile mediante la formula ricorrente

$$\mathcal{X}_{n+1} = \frac{(2n+1)\, x\mathcal{X}_n - n\mathcal{X}_{n-1}}{n+1} \qquad \text{con } \mathcal{X}_0 = 1,\ \mathcal{X}_1 = x\,.$$

I polinomi di Laplace che ci interessano possono pertanto scriversi sotto la forma

$$V_n = r^n\, \mathcal{X}_n(\cos\psi).$$

Si dimostra poi facilmente che i polinomi

$$\overline{V}_n = r^{n+2}\, \mathcal{X}_n(\cos\psi)$$

sono biarmonici nella sfera.

Abbiamo così le due classi di funzioni da noi impiegate nella esplorazione numerica seguente.

8. *Calcolo delle soluzioni approssimate*

I polinomi di Legendre nella variabile $\cos\psi$ sono:

$$\mathcal{X}_0 = 1$$

$$\mathcal{X}_1 = \cos\psi$$

$$\mathcal{X}_2 = \frac{1}{2}(3\cos^2\psi - 1)$$

$$\mathcal{X}_3 = \frac{1}{2}(5\cos^3\psi - 3\cos\psi)$$

$$X_4 = \frac{1}{8}(35\cos^4\psi - 30\cos^2\psi + 3)$$

$$X_5 = \frac{1}{8}(63\cos^5\psi - 70\cos^3\psi + 15\cos\psi)$$

. . . . . .

I corrispondenti polinomi di Laplace simmetrici

$$r^n X_i\,(\cos\psi),$$

operata la trasformazione di coordinate:

$$r = (z^2 + \varrho^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\psi = \frac{z}{(z^2 + \varrho^2)^{\frac{1}{2}}}$$

sono, a meno di costanti,

$$V_0 = 1$$

$$V_1 = z$$

$$V_2 = 2z^2 - \varrho^2$$

$$V_3 = 2z^2 - 3\varrho^2 z$$

$$V_4 = 8z^3 - 24z^2\varrho^2 + 3\varrho^4$$

$$V_5 = 8z^5 - 40z^3\varrho^2 + 15\varrho^4 z\,.$$

La funzione χ viene approssimata mediante i polinomi biarmonici d'ordine i della successione [1]:

$$[C_i\ V_i + C_i\ (\varrho^2 + z^2)\ V_{i-2}].$$

Esclusi i polinomi d'ordine *0, 1, 2,* ai quali, derivando mediante le (6), corrispondono tensioni nulle, il primo polinomio interessante è quello di ordine *3* al quale corrispondono tensioni costanti in tutto il corpo.

Nel presente lavoro abbiamo svolto tre approssimazioni dando successivamente alla funzione χ i seguenti valori approssimati:

I $$C_1^{(I)}\ (2z^3 - 3\varrho^2 z) + C_2^{(I)}\ (\varrho^2 + z^2)\ z$$

II $$C_1^{(II)}\ (2z^3 - 3\varrho^2 z) + C_2^{(II)}\ (\varrho^2 + z^2)\ z + C_3^{(II)}\ (8z^4 - 24z^2\varrho^2 + 3\varrho^4) + C_4^{(II)}\ (\varrho^2 + z^2)\ (2z^2 - \varrho^2)$$

III $$C_1^{(III)}\ (2z^3 - 3\varrho^2 z) + C_2^{(III)}\ (\varrho^2 + z^2)\ z + C_3^{(III)}\ (8z^4 - 24z^2\varrho^2 + 3\varrho^4 +$$

1) Resterebbe da dimostrare che effettivamente la successione adottata è *completa* per l'approssimazione della χ incognita.

$$+ C_4^{(III)} (\varrho^2 + z^2)(2z^2 - \varrho^2) + C_5^{(III)} (8z^5 - 40z^3 \varrho^2 + 15\varrho^4 z) +$$
$$+ C_6^{(III)} (\varrho^2 + z^2) (2z^3 - 2\varrho^2 z) .$$

Per determinare in ogni approssimazione le costanti C, dovremo rendere minima l'espressione I, di cui riportiamo lo sviluppo riferendoci, per i simboli, allo schema della figura 4.

$$I = \int_S \left\{ \left[\sum_1^n C_i \, L_1 (\chi_i) - \varphi_1 \right]^2 + \left[\sum_1^n C_i \, L_2 (\chi_i) - \varphi_2 \right]^2 \right\} dQ =$$

$$= \int_a^b \lim_{z \to C+R} (\sigma_z^2 + \tau_{\varrho z}^2) \, d\varrho + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\substack{\varrho \to b + R \operatorname{sen} \varphi \\ z \to c + R \cos \varphi}} \Big[(\sigma_\varrho \operatorname{sen}\varphi + \tau_{\varrho z} \cos\varphi)^2 +$$

$$+ (\sigma_z \cos\varphi + \tau_{\varrho z} \operatorname{sen}\varphi)^2 \Big] R \, d\varphi + \int_0^c \lim_{\varrho \to b+R} (\sigma_\varrho^2 + \tau_{\varrho z}^2) \, dz +$$

$$+ \int_{b+r}^{b+R} \lim_{z \to 0} (\sigma_z^2 + \tau_{\varrho z}^2) \, d\varrho + \int_0^c \left\{ \left[\lim_{\varrho \to b+R} (\sigma_\theta - \nu (\sigma_z + \sigma_\varrho)) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \delta \frac{E}{b+r} \right]^2 + \tau_{\varrho z}^2 \right\} dz + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\substack{\varrho \to b+r \operatorname{sen} \varphi \\ z \to c+r \cos \varphi}} \Big[\sigma_\varrho \operatorname{sen}\varphi + \tau_{\varrho z} \cos\varphi)^2 +$$

$$+ (\sigma_z \cos\varphi + \tau_{\varrho z} \operatorname{sen}\varphi)^2 \Big] r \, d\varphi + \int_a^b \lim_{z \to c+r} (\sigma_z^2 + \tau_{\varrho z}^2) \, d\varrho +$$

$$+ \int_{c+r}^{c+R} \lim_{\varrho \to a} (\sigma_\varrho^2 + \tau_{\varrho z}^2) \, dz .$$

Le funzioni assegnate φ_1 φ_2 sono nulle su tutto il contorno, eccezion fatta per il tratto CB dove

$$\varphi_1 = \frac{E}{b+r} \delta$$

e corrispondentemente l'operazione L_1 è quella data dalla (8).

Il differenziale dQ rappresenta l'elemento di superficie di contorno. Ricordando che la sezione della fig. 4 è sezione diametrale di un solido di rivoluzione intorno all'asse z, chiamato ds l'elemento del contorno di detta sezione, si ha

$$dQ = \varrho \, . \, d\theta \, . \, ds.$$

Poiché il solido è simmetrico e simmetricamente deformato si può estendere l'integrazione a uno spicchio di ampiezza angolare $d\theta$.

Ciò è legittimo ed equivale a porre $d\theta = 1$ nell'espressione del dQ.

Si è anche posto $\varrho = 1$; tale semplificazione si giustifica dal punto di vista analitico, poiché nell'uno e nell'altro caso (ϱ variabile; $\varrho = 1$) si ottengono due successioni di funzioni approssimatrici convergenti verso la stessa funzione limite. Va però ricordato che ponendo $\varrho = 1$ si è operato come se si moltiplicassero gli errori per il peso $\sqrt{\frac{1}{\varrho}}$ il che influisce sulle costanti C e importa che le condizioni al contorno vengono in ogni soluzione approssimate tanto maggiormente quanto minore è la distanza dell'asse z.

Il calcolo numerico deve essere in pratica eseguito per un particolare solido di determinate dimensioni: si sono sostituiti alle lettere i valori numerici (fig. 4)

$a = 3$ cm. $b = 7{,}5$ cm. $c = 1{,}3$ cm. $r = 0{,}2$ cm. $R = 2{,}5$ cm.

Si è assunto il coefficiente di Poisson $\nu = 0{,}3$. Le costanti C e quindi le tensioni $\sigma_\varrho\, \sigma_\theta\, \sigma_z\, \tau_{\varrho z}$ risultano proporzionali al modulo di elasticità E e allo spostamento impreso δ. Si può porre nel calcolo $E\delta = 1$.

9. *I^A Approssimazione*

Espressione approssimata della χ:

$$\chi^{(I)} = C_1 (2z^3 - 3\varrho^2 z) + C_2 (z^3 + z\varrho^2)$$

da cui ricaviamo

$$(9^I) \qquad \begin{aligned} \sigma_\varrho &= 6C_1 + (10\nu - 2)\, C_2 \\ \sigma_\theta &= 6C_1 + (10\nu - 2)\, C_2 \\ \sigma_z &= -12C_1 - (10\nu - 14)\, C_2 \\ \tau_{\varrho z} &= 0. \end{aligned}$$

Sostituendo queste espressioni delle tensioni nell'errore globale I, si è calcolato, per i valori numerici suddetti:

$$I = 2217{,}596\, C_1^2 - 1763{,}556.2\, C_1 C_2 + 1638{,}398\, C_2^2 - \\ - 1{,}316883.2\, C_1 E\delta + 0{,}4389610.2\, C_2 E\delta + 0{,}02192612\, E^2\delta^2.$$

Risolvendo il sistema $\dfrac{\partial I}{\partial C_i} = 0 \qquad (i = 1,2)$

si ricava

$$C_1 = 0{,}002644327\ E\delta$$

$$C_2 = 0{,}002578409\ E\delta$$

e quindi

$$I_{\min} = 0{,}01957567\ E^2\delta^2.$$

Il valore di I_{min} ricavato va confrontato con quello che si avrebbe facendo nelle (9^{I}) $C_1 = C_2 = 0$ cioé ammettendo che le tensioni siano ovunque nulle nel corpo (e quindi che la χ sia di grado 0,1,2).

Col primo tentativo siamo dunque discesi dal valore 0,0219 al valore 0,0195.

10. *II^A Approssimazione*

Espressione approssimata della χ:

$$\chi^{(II)} = C_1 (2z^3 - 3\varrho^2 z) + C_2 (z^3 + z\varrho^2) + C_3 (z^4 - 3z^2\varrho^2 + \frac{3}{8}\varrho^4) + \\ + C_4 (z^4 + \frac{1}{2} z^2\varrho^2 - \frac{1}{2}\varrho^4)$$

da cui

$$(9^{II}) \quad \begin{aligned} \sigma_\varrho &= 6C_1 + (10\nu - 2) C_2 + 12 zC_3 + 2(14\nu - 1) zC_4 \\ \sigma_\theta &= 6C_1 + (10\nu - 2) C_2 + 12 zC_3 + 2(14\nu - 1) zC_4 \\ \sigma_z &= -12 C_1 - (10\nu - 14) C_2 - 24 zC_3 + 4(8 - 7\nu) zC_4 \\ \tau_{\varrho z} &= 12\varrho C_3 + 2(7\nu - 8)\varrho C_4 . \end{aligned}$$

Sostituendo queste espressioni, nell'errore globale I, si è calcolato:

$$I = 2217{,}596\, C_1^2 + 1638{,}398\, C_2^2 + 197.920{,}87\, C_3^2 + 173.365{,}54\, C_4^2 - \\ - 1763{,}556.2\, C_1 C_2 + 8942{,}4091.2\, C_1 C_3 - 7421{,}559.2\, C_1 C_4 - \\ - 6264{,}054.2\, C_2 C_3 + 6346{,}3033.2\, C_2 C_4 - 180.349{,}37.2\, C_3 C_4 - \\ - 1{,}316883.2\, C_1 E\delta + 0{,}4389610.2\, C_2 E\delta - 1{,}711948.2\, C_3 E\delta + \\ + 0{,}2853247.2\, C_4 E\delta + 0{,}02192612\, E^2\delta^2 .$$

Risolvendo il sistema $\dfrac{\partial I}{\partial C_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$

ricaviamo:

$$C_1 = 0{,}008463121\ E\delta$$
$$C_2 = 0{,}008953431\ E\delta$$
$$C_3 = -0{,}001159589\ E\delta$$
$$C_4 = -0{,}001173405\ E\delta$$

e quindi

$$I_{min} = 0{,}01636174.$$

11. *III^A Approssimazione.*

Espressione approssimata della χ:

$$\chi^{(III)} = C_1(2z^3 - 3\varrho^2 z) + C_2(z^3 + z\varrho^2) + C_3(z^4 - 3z^2\varrho^2 + \frac{3}{8}\varrho^4) + C_4(z^4 +$$

$$+ \frac{1}{2}z^2\varrho^2 - \frac{1}{2}\varrho^4) + C_5(z^5 - 5z^3\varrho^2 + \frac{15}{8}z\varrho^4) + C_6(z^5 - \frac{1}{2}z^3\varrho^2 - \frac{3}{2}\varrho^4 z)$$

da cui, mediante le (8), ricaviamo:

$$\begin{aligned}
\sigma_\varrho &= 6C_1 + (10\nu - 2)C_2 + 12zC_3 + 2(14\nu - 1)zC_4 + \\
&+ (30z^2 - \frac{45}{2}\varrho^2)C_5 + [3(1 + 18\nu)z^2 + 9(2 - 3\sigma)\varrho^2]C_6 \\
\sigma_\theta &= 6C_1 + (10\nu - 2)C_2 + 12zC_3 + 2(14\nu - 1)zC_4 + \\
&+ (30z^2 - \frac{15}{2}\varrho^2)C_5 + [3(1 + 18\nu)z^2 + 3(2 - 9\nu)\varrho^2]C_6 \\
\sigma_z &= -12C_1 - (10\nu - 14)C_2 - 24zC_3 + 4(8 - 7\nu)zC_4 + \\
&+ (-60z^2 + 30\varrho^2)C_5 + [3(16 - 18\nu)z^2 - 3(17 - 9\nu)\varrho^2]C_6 \\
\tau_{\varrho z} &= 12\varrho C_3 + 2(7\nu - 8)\varrho C_4 + 60\varrho z C_5 + (54\nu - 48)\varrho z C_6 .
\end{aligned} \tag{9^{III}}$$

Sostituendo i valori numerici, si sono calcolati i coefficienti e si sono riportati nella espressione di I, ottenendo:

$$\begin{aligned}
I = {} & 2217{,}595\,C_1^2 + 1638{,}398\,C_2^2 + 197.920{,}874\,C_3^2 + 173.365{,}54\,C_4^2 + \\
& + 57.057.032\,C_5^2 + 69.974.496\,C_6^2 - 1763{,}556.2\,C_1C_2 + \\
& + 8942{,}4091.2\,C_1C_3 - 7421{,}559.2\,C_1C_4 - 203.125{,}21.2\,C_1C_5 + \\
& + 305.360{,}8.2\,C_1C_6 - 6264{,}054.2\,C_2C_3 + 6346{,}3033.2\,C_2C_4 + \\
& + 152.254{,}69.2\,C_2C_5 - 258.576{,}61.2\,C_2C_6 - 180.349{,}37.2\,C_3C_4 + \\
& + 792.619{,}39.2\,C_3C_5 + 68.428{,}28.2\,C_3C_6 - 860.230{,}04.2\,C_4C_5 + \\
& + 10.040{,}158.2\,C_4C_6 - 56.494.652.2\,C_5C_6 - 1{,}316883.2\,C_1E\delta + \\
& + 0{,}4389610.2\,C_2E\delta - 1{,}711948.2\,C_3E\delta + 0{,}28532467.2\,C_4E\delta + \\
& + 93{,}888279.2\,C_5E\delta - 78{,}448922.2\,C_6E\delta + 0{,}02192612E^2\delta^2
\end{aligned}$$

da cui risolvendo il sistema

$$\frac{\partial I}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots 5, 6)$$

si ottengono i valori delle costanti

$$\begin{aligned}
C_1 &= +0{,}01360041\,E\delta \\
C_2 &= +0{,}01455084\,E\delta \\
C_3 &= -0{,}0^2 1845539\,E\delta \\
C_4 &= -0{,}0^2 1755983\,E\delta \\
C_5 &= +0{,}0^4 2356918\,E\delta \\
C_6 &= +0{,}0^4 1662571\,E\delta .
\end{aligned}$$

e corrispondentemente :

$$I_{\min} = 0{,}01397028 .$$

12. *Espressioni approssimate degli spostamenti elastici.*

Sostituendo nelle (9) i valori delle costanti ora calcolati, si ottengono nelle successive approssimazioni tre sistemi di tensioni ognuno dei quali soddisfa le equazioni differenziali (1) e (2).

Essi sono

I.a appross.

$$\begin{cases} \sigma_\varrho = 0{,}01844\, E\delta \\ \sigma_\theta = 0{,}01844\, E\delta \\ \sigma_z = -\,0{,}00337\, E\delta \\ \tau_{\varrho z} = 0. \end{cases}$$

II.a appross.

$$\begin{cases} \sigma_\varrho = (0{,}05965 - 0{,}0214 z)\, E\delta \\ \sigma_\theta = (0{,}05965 - 0{,}0214 z)\, E\delta \\ \sigma_z = (-\,0{,}003 + 0{,}00C2 z)\, E\delta \\ \tau_{\varrho z} = -\,0{,}00007\, \varrho\, E\delta. \end{cases}$$

III.a appross.

$$\begin{cases} \sigma_\varrho = (0{,}0961 - 0{,}03325 z + 0{,}001025 z^2 - 0{,}000367 \varrho^2)\, E\delta \\ \sigma_\theta = (0{,}0961 - 0{,}03325 z + 0{,}001025 z^2 - 0{,}0C0212 \varrho^2)\, E\delta \\ \sigma_z = (-\,0{,}0032 + 0{,}0028 z - 0{,}00088 z^2 - 0{,}000006 \varrho^2)\, E\delta \\ \tau_{\varrho z} = (-\,0{,}00138 \varrho + 0{,}00088 \varrho z)\, E\delta. \end{cases}$$

La seconda integazione che permette di passare dalle deformazioni agli spostamenti non è stata necessaria per la soluzione del problema, ma interessa ora sopratutto per verificare lo spostamento elastico della superficie CB. Si è già osservato che la componente u è legata alle tensioni da una relazione in termini finiti,

$$u = \frac{\varrho}{E}\left[\sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_\varrho)\right]$$

inoltre la componente v è nulla per simmetria e la componente w si ottiene integrando le

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_\varrho + \sigma_\theta)\right] \\ \dfrac{\partial w}{\partial \varrho} = \dfrac{1}{G}\tau_{\varrho z} - \dfrac{\partial u}{\partial z}. \end{cases}$$

Mediante i valori delle tensioni dati dalle (10) si ricava nelle tre approssimazioni :

$$I\text{-}a \text{ appross.} \quad \begin{cases} u = 0{,}0139\,\varrho\delta & \text{[in cm.]} \\ v = 0 \\ w = -\,0{,}0145\,z.\delta + h. \end{cases}$$

$$II\text{-}a \text{ appross.} \quad \begin{cases} u = (0{,}0427\varrho - 0{,}0151\,z\varrho)\,\delta \\ v = 0 \\ w = (-\,0{,}039\,z + 0{,}0065\,z^2 + 0{,}0076\,\varrho^2)\,\delta + h \end{cases}$$

$$III\text{-}a \text{ appross.} \quad \begin{cases} u = (0{,}0682\,\varrho - 0{,}0241\,\varrho z + 0{,}000985\,\varrho z^2 - 0{,}0001\varrho^3)\,\delta \\ v = 0 \\ w = (-\,0{,}06086\,z + 0{,}01025\,\varrho^2 + 0{,}01137\,z^2 + \\ \qquad + 0{,}000167\,\varrho^2 z - 0{,}000498\,z^3)\,\delta + h. \end{cases}$$

La costante di integrazione h riguarda la posizione del solido deformato rispetto alla terna di riferimento : essa definisce soltanto uno spostamento rigido che può essere preso uguale a zero.

13. *Risultati numerici.*

Per fissare le idee su valori numerici si è posto $E = 2.10^6$ kg/cm^2 (modulo dell'acciaio) e $\delta = 10^{-2}$ cm. (spostamento impresso ovvero differenza tra il raggio del disco e quello del coperchio), ammesso che per tale valore di δ, che per noi ha soltanto significato esemplificativo e in funzione del quale tutte le grandezze variano linearmente, la deformazione si mantenga nel campo elastico.

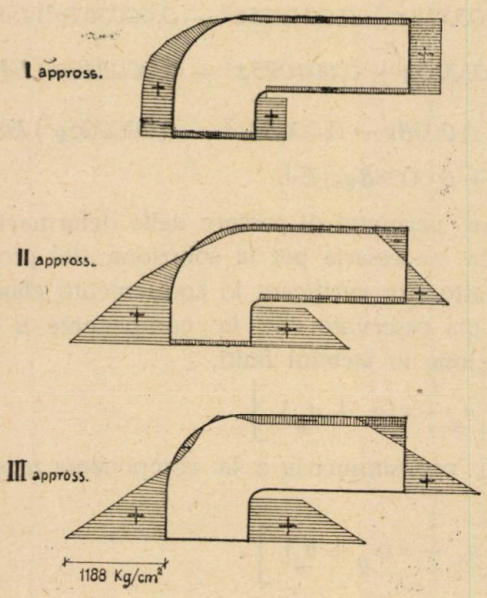


Fig. 6.
Tensione normale σ al contorno.

Si sono così calcolati i diagrammi delle fig. 6, 7 rappresentanti le tensioni σ (normale) e τ (tangenziale) sugli elementi della superficie di contorno, secondo le relazioni

$$\sigma = \sigma_z \cos^2\varphi + \sigma_\varrho \operatorname{sen}^2\varphi + 2\,\tau_{\varrho z} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi$$

$$\tau = -\,\tau_{\varrho z}(\operatorname{sen}^2\varphi - \cos^2\varphi) + (\sigma_\varrho - \sigma_z)\operatorname{sen}\varphi \cos\varphi.$$

Sono le note relazioni del problema elastico piano, valide anche nel nostro caso perché, limitando la ricerca delle tensioni a giaciture la cui normale sia ortogonale alla direzione tangenziale, la quarta componente di tensione σ_θ non influisce.

In esse σ_ϱ σ_z $\tau_{\varrho z}$ hanno i valori forniti per continuità dai sistemi (10) quando il punto interno P tenda al punto Q sulla frontiera e φ è l'angolo formato dalla normale esterna all'elemento di contorno con l'asse z orientato.

Mediante le (11) sono stati poi calcolati i valori delle componenti u,w dello spostamento s dei punti del contorno: per dare una qualche rappresentazione di come si deformi il pezzo, nella fig. 8 (pag. 276) sono stati disegnati in due scale diverse il contorno originale e gli spostamenti elastici s. La scala degli spostamenti è 500 volte più grande di quella delle lunghezze.

Tenendo presente le figure 6, 7, 8 si può giudicare della convergenza delle soluzioni approssimate verso la soluzione ideale. Quest'ultima richiederebbe tensione al contorno τ ovunque nulla e tensione al contorno σ nulla fuori che nel tratto CB dove essa non è assegnata, ma in ogni caso non dovrebbe risultare positiva; nel tratto CB dovrebbe poi essere $u = \delta = \text{cost}$.

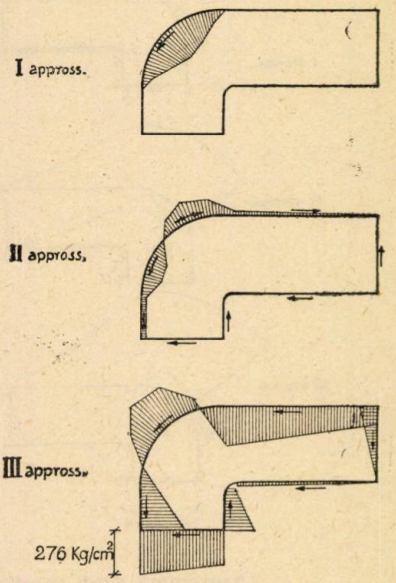


Fig. 7.
Tensione tangenziale τ al contorno

Le soluzioni approssimate sono ancora lontane dal soddisfare tali condizioni; tuttavia nei successivi tentativi aumentano i punti di nullo nei diagrammi delle tensioni al contorno e sopratutto aumentano i valori di u sul tratto CB.

I-a Appross. $u = \text{cost.} = 0{,}107\,\delta$

II-a Appross. per $z = 0$: $u = 0{,}329\,\delta$; per $z = 1{,}3$: $u = 0{,}179\,\delta$

III-a Appross. per $z = 0$: $u = 0{,}479\,\delta$; per $z = 1{,}3$: $u = 0{,}240\,\delta$.

Sono questi segni della convergenza verso la soluzione effettiva, convergenza che è globalmente misurata dalla convergenza a zero dell'errore quadratico I.

I successivi valori di I sono i seguenti:

per $\sigma_\varrho\ \sigma_\theta\ \sigma_z\ \tau_{\varrho z}$ ovunque nulli: $I = 0{,}02193$

I.a Appross. $I = 0{,}01957$

II.a „ $I = 0{,}01636$

III.a „ $I = 0{,}01397.$

L'errore globale si è dunque ridotto del 36,4% : il principale contributo alla diminuzione di I è dato dal diminuire dello scarto $\delta - u$ nel tratto CB.

La terza approssimazione fu già grandemente laboriosa, dati gli strumenti meccanici di calcolo normalmente in uso. Ma i mezzi elet-

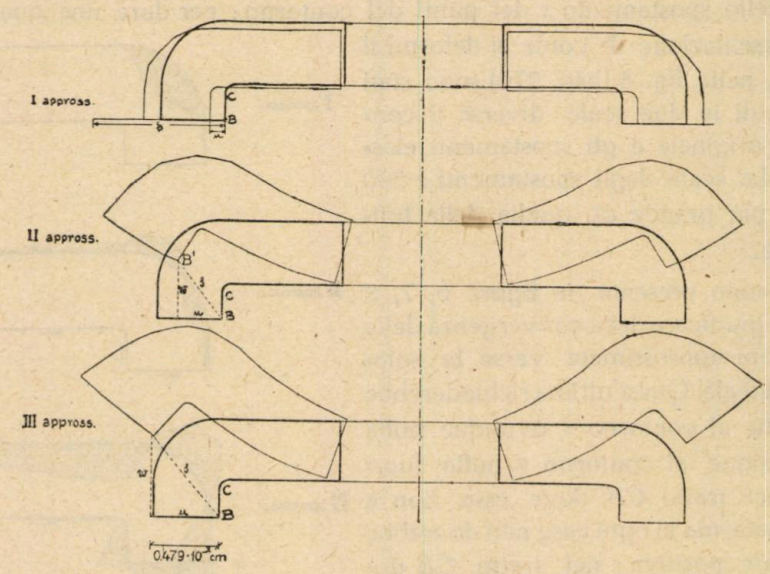


Fig. 8.
Diagramma degli spostamenti s dei punti del contorno

tronici estremamente potenti di cui si ha notizia, permetterebbero di spingere molto più avanti l'approssimazione e di ottenere risultati assai interessanti, confermando la efficacia del metodo usato.

Sull'impiego pratico delle soluzioni approssimate deve giudicare il progettista: in ogni caso esse mantengono un notevole interesse per lo studioso di problemi elastici. Di fatto ognuna di esse corrisponde a un integrale particolare dell'equazione (7) e pertanto rappresenta uno stato di tensione *internamente equilibrato* e *congruente*, cioé uno stato elastico *possibile* per la cui realizzazione basterebbe applicare come forze superficiali le tensioni al contorno corrispondentemente trovate

Facoltà d'Ingegneria
dell'Università di
Roma

(Reçu le 20 Février 1948)

UN NOUVEAU APPAREIL POUR LA MESURE DES VITESSES D'ÉCOULEMENT DES LIQUIDES ET DES GAZ

par

VIRGILIU G. GHEORGHIU

Pour la mesure de la vitesse d'écoulement des liquides et des gaz, on fait emploi aussi de certains appareils, dont le principe de fonctionnement se base sur celui du pendule.

On connaît ainsi des anémomètres, tels que celui de Hookes[1]) la classique girouette de Wild, ou encore l'anémomètre de G. Daloz[2]). Ce dernier est constitué essentiellement par une petite sphère légère, suspendue à une mince tige, et qui peut osciller autour d'un point de suspension. Sous l'action du vent, la sphère est déplacée de sa position initiale d'équilibre, dans laquelle la tige avait la direction verticale, et prend une autre position d'équilibre, où la tige fait un angle α avec la direction verticale dirigée vers le bas. Des appareils analogues sont employés pour la mesure de la vitesse d'écoulement des liquides[3]).

L'angle de déviation dépend evidemment de la force F développée par le fluide sur la sphère, et aussi du poids apparent P de celle-ci par rapport au fluide.

On admet ainsi que dans le cas d'une surface plane placée perpendiculairement à la direction du courant, la valeur de F peut être donnée avec une approximation suffisante par une formule[4]) telle que:

$$F = C \frac{d.u^2}{2} S \tag{1}$$

où C est un coefficient numérique, sans dimensions, qui dépend de la forme de la surface S, d=la densité du fluide, et u=la vitesse d'écoulement. Dans le cas d'une surface plane, C a la valeur *1,1* et *0,44* dans le cas d'une sphère, indépendante du système d'unités employé.

La valeur de l'angle d'équilibre peut être calculée très facilement en écrivant que dans ce cas la somme algébrique des moments des forces F et P par rapport au point de suspension est nulle. On obtient ainsi:

$$(2) \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{P} = \frac{Cdu^2 S}{2P} \qquad \text{et} \qquad (3) \qquad u = \sqrt{\frac{2P \operatorname{tg}\alpha}{CdS}}$$

avec: $P = P_1 - P_2$, P_1 étant le poids du corps sphérique par rapport au vide et P_2 le poids du fluide remplacé par la sphère, en considérant négligeable le poids du la mince tige de suspension, de longueur l. On constate encore, que l'angle d'équilibre α ne dépend pas de l, lequel s'élimine par les conditions d'équilibre.

En considérant u comme fonction de α, et en prenant la différentielle logarithmique des deux membres de (3), on peut montrer facilement, que ces appareils pendulaires ne donnent pas des mesures de u d'une précision convenable que pour les valeurs qui correspondent à un angle α d'environ 45^0, et que cette précision diminue rapidement pour les valeurs extrêmes de u et de α. Aussi la non-linéarité de la relation (3) entre u et α est encore un inconvénient en ce qui concerne l'étalonage et la précision de mesure de u.

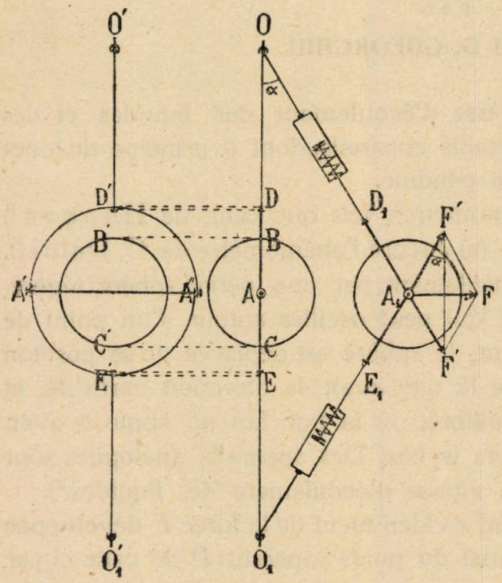


Fig. 1.

Afin d'éviter ces inconvénients des appareils pendulaires on a imaginé un nouveau appareil, dont le schéma du principe est représenté dans la fig. 1. Il est constitué essentiellement par une pièce sphérique de rayon convenable et ayant un poids relatif P négligeable ou très petit, par rapport au fluide dont on veut mesurer la vitesse d'écoulement. Ce corps est suspendu à un cadre constitué par deux demi-cercles de fil mince et rigide $A' D' A''$ et $A' E' A''$ ayant un rayon suffisamment grand, pour éviter la perturbation des filets du fluide autour de la sphère. Ces deux demi-cercles sont attachés aux extrémités de l'axe horizontale $A' A''$, également mince et rigide, qui passe par le centre de la sphère. Pour éviter des turbillons formés par une éventuelle rotation de la sphère, on peut la rendre solidaire avec le demi-cercle supérieur, le demi-cercle inférieur pouvant ainsi seul tourner autour de l'axe horizontale de la sphère. Les demi-cercles sont attachés aussi dans les points D et E et peuvent tourner autour des

fils de suspension DO et EO_1 egalement minces et rigides*). Les points de suspension D et E sont situés à l'angle droit par rapport à l'axe $A'A''$ de la sphère. Sur les fils de supension sont intercalés deux ressorts dynamométriques identiques, de dimensions et constantes élastiques convenables. Les extrémités des fils de suspension sont attachées aux points O,O_1 autour desquels peuvent tourner, grâce à des petites articulations, par ex. à rotule.

Dans la position d'équilibre initial, les fils de suspension et les ressorts dynamométriques maintiennent le centre A de la sphère sur la verticale qui passe par les points de suspension O,O_1 et à égale distance de ceux-ci. Sous l'action du fluide en mouvement qui développe sur la sphère la force F, supposons que son centre prend la position d'équilibre A_1, et que l'angle fait par les fils de suspension OD_1 et O_1E_1 avec la verticale qui passe par les points de suspension O et O_1 soit α.

Dans ces conditions la force F peut être décomposée en deux componentes F', égales par raisons de symétrie. On a donc :

$$F = 2F' \sin\alpha . \tag{4}$$

Désignons : $OA = O_1A = l$; $OA_1 = O_1A_1 = l'$ et $OA_1 - OA = a$, la variation de longueur des ressorts. On a :

$$a = l' - l = KF', \text{ où } K = \frac{64R^3n}{Gd^4}. \tag{5}$$

Dans cette formule : R est le rayon des spires des dynamomètres, n le nombre des spires d'un ressort, d le diamètre du fil employé, et G le module d'élasticité transversale du métal des ressorts.

Le triangle AOA_1 donne :

$$\sin\alpha = \frac{AA_1}{OA_1} = \frac{\sqrt{l'^2 - l^2}}{l'} = \frac{\sqrt{(l+a)^2 - l^2}}{(l+a)} = \frac{\sqrt{2la + a^2}}{(l+a)}. \tag{6}$$

En portant cette valeur de $\sin\alpha$ dans (4) on a :

$$F = 2F' \frac{\sqrt{2la + a^2}}{l + a} \tag{7}$$

et en tenant compte de (5)

$$F = 2\frac{1}{K} a \frac{\sqrt{2la + a^2}}{(l + a)}. \tag{8}$$

En introduisant aussi la valeur de F de (1) on obtient en définitif ;

*) Il est posible aussi, d'employer des fils élastiques de suspension, OD et O_1E (voir fig. 1), sans ressorts dynamométriques.

$$C\frac{du^2}{2}S=\frac{2a}{K}\frac{\sqrt{2la+a^2}}{(l+a)} \tag{9}$$

ou

$$u=\sqrt[4]{\frac{16\,(2la^3+a^4)}{(CdKS)^2\,(l+a)^2}}\,. \tag{10}$$

Cette formule (10) donne la valeur u de la vitesse d'écoulement du fluide, en fonction de la variation de longueur a des ressorts dynamométriques et des données connues, ou qu'on peut mesurer facilement. On peut aussi déterminer u en s'aidant des tableaux ou des abaques appropriés, ou mieux encore en employant un appareil étalonné préalablement par expérience, en marquant les valeurs de u qui correspondent aux différentes valeurs de a.

Si on considère, en première approximation, que pour de petites valeurs, a est négligeable par rapport à l, la relation (10) devient:

$$u=\frac{K_1}{\sqrt[4]{l}}\cdot a^{\frac{3}{4}} \quad \text{avec:} \quad K_1=\frac{\sqrt[4]{2^2}}{\sqrt{CdKS}}\,. \tag{11}$$

C'est à dire, que dans ces conditions, la vitesse d'écoulement du fluide est proportionnelle à la $^3/_4$ puissance de la variation de longueur a des ressorts dynamométriques, et inversement proportionnelle à la $^1/_4$ puissance de l.

Il est possible aussi de calculer la vitesse d'écoulement du fluide en fonction de l'angle de déviation α. Considérons, en effet, de nouveau la fig. 1. On peut écrire:

$$a=l'-l=l\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)=KF'\,. \tag{12}$$

En portant la valeur de F' tirée de (12) dans (4) on obtient:

$$F=\frac{2l}{K}\left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)\sin\alpha=\frac{4l}{K}\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha=\frac{8l\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{K\left(1-\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}\right)}\,. \tag{13}$$

En introduisant de nouveau la valeur de F prise de (1) on aura:

$$C\frac{du^2}{2}S=\frac{8l\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}{K\left(1-\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}\right)} \tag{14}$$

ou encore :

$$(15) \qquad u = \sqrt{\frac{16\, l \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}}{KCdS\left(1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}\right)}},$$

formule qui permet comme (10) ou (11) de calculer la valeur de la vitesse d'écoulement du fluide en fonction de l'angle α, et des autres grandeurs connues.

Si, pour les petites valeurs de α on néglige en première approximation $\operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}$ par rapport à 1, ce qu'il est parfaitement justifié, la relation (15) devient :

$$(16) \qquad u = K_2 \sqrt{l}\, \operatorname{tg}^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{avec : } K_2 = \frac{4}{\sqrt{KCdS}}.$$

En posant encore :

$$\operatorname{tg}^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \backsimeq \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{3}{2}}, \text{ (16) devient } (17) \quad u = \frac{K_2 \sqrt{l}\, \alpha^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}}.$$

Cette relation montre que la vitesse d'écoulement du fluide a une variation un peu plus rapide que linéaire en fonction de l'angle de déviation α, au moins pour les petites valeurs de celui-ci.

Afin de se rendre mieux compte des avantages de l'appareil dynamométrique par rapport à l'appareil pendulaire, on peut aussi faire une étude comparative de la précision de mesure de la vitesse d'écoulement d'un fluide pour de petites valeurs de α, et par suite pour de petites valeurs de a et de u, avec ces deux types d'appareils.

Considérons, en effet, que ces appareils ont des pièces sphériques de même rayon, ont une même valeur pour l, et sont exposés à une même vitesse d'écoulement du fluide, par suite sont actionnés d'une même force F.

Les relations (8) et (2) deviennent ainsi :

$$(18) \qquad F = \sqrt[2]{\frac{8a^3}{K^2 l}} \qquad \text{et} \qquad (19) \qquad F = \frac{Pa'}{l}$$

où a' représente la grandeur de la déviation de l'appareil pendulaire, exprimée avec les mêmes unités de longueur, que la variation de longueur des ressorts dynamométriques.

De (18) et (19) on obtient immédiatement :

(20) $$a = \sqrt[3]{\frac{K^2 l F^2}{8}}$$ et (21) $$a' = \frac{lF}{P}$$

et encore:

(22) $$\frac{a}{a'} = \frac{P}{2}\sqrt[3]{\frac{K^2}{Fl^2}}.$$

Dans des conditions analogues, si on considère u en fonction de α, on aura les relations (13) et (2), qui pour de petites valeurs de l'angle de déviation deviennent respectivement:

(23) $$F = \frac{l\,\alpha^3}{K}$$ et (24) $$\alpha' = \frac{F}{P}$$

où α' est l'angle de déviation de l'appareil pendulaire. De (23) et (24) on tire:

(25) $$\frac{\alpha}{\alpha'} = P\sqrt[3]{\frac{K}{lF^2}}.$$

Avantages de l'appareil dynamométrique. L'examen des relations (22) et (25) montre que la précision relative de mesure de l'appareil à ressorts dynamométriques, par rapport aux appareils pendulaires, augmente avec P et K, et aussi quand F et l diminuent.

En effet, le poids P du corps sphérique est un désavantage des appareils pendulaires, pour des mesures d'écoulement à faible vitesse des fluides, qui n'existe plus pour l'appareil dynamométrique, où le poids apparent de la sphère est compensé par l'action antagoniste des ressorts dynamométriques.

La constante K peut être variée dans des très grandes limites, en actionnant sur les dimensions et les constantes élastiques des ressorts. On a ainsi la possibilité de varier la sensibilité de l'appareil ayant une même pièce sphérique, pour l'adapter à de mesures dans de différents domaines des vitesses d'écoulement des fluides.

Les relations (22) et (25) montrent encore, que pour les petites valeurs de F, donc de u, la sensibilité relative de l'appareil dynamométrique par rapport à l'appareil pendulaire augmente, ce qu'il est un avantage évident du nouveau appareil, surtout si on mesure l'angle de déviation α.

Aussi, pour les petites valeurs de l, qu'on est restreint d'habitude à prendre par raison d'ordre pratique et constructif, l'avantage est encore de la part de l'appareil dynamométrique, car sa sensibilité relative par rapport à l'appareil pendulaire augmente quand l diminue. On pourrait encore varier la sensibilité de mesure d'un même appareil

dynamométrique en changeant par un dispositif approprié la distance $2l$ existante entre les points de suspension.

Quand la vitesse d'écoulement du fluide, et par suite la variation de la longueur des ressorts dynamométriques augmente, la précision des mesures de u augmente, incessamment, tandis que celle des appareils pendulaires diminue rapidement quand l'angle de variation augmente au dessus de 45^0.

Plus encore, la variation de la longueur des ressorts, en fonction de la vitesse u d'écoulement du fluide, est plus près de linéarité que celle de l'angle de déviation α des appareils pendulaires, ce qu'il est encore un avantage pour le nouveau appareil dynamométrique, en permettant ainsi d'obtenir par interpolation, des mesures plus exactes de u.

La simplicité de construction, les dimensions qui peuvent aussi être très réduites, la facilité de la mise en station et des mesures, sont encore des avantages évidentes de l'appareil dynamométrique.

Quand on employe l'appareil dynamométrique pour la mesure des vitesses d'écoulement des liquides, on peut rendre négligeable le poids apparent de la pièce sphérique par rapport au liquide, en introduisant dans la sphère une quantité convenable de liquide.

Pour amortir les oscillations de la sphère si cela est nécessaire, on peut agir, en faisant que les corps des dynamomètres soient suffisamment étanches, en se comportant ainsi comme amortiseurs à air ou à liquide.

Résumé. Dans le présent travail on a donné le principe d'un nouveau appareil pour la mesure de la vitesse d'écoulement des liquides et des gaz. Cet appareil a une pièce sphérique, suspendue par un cadre et deux ressorts dynamométriques antagonistes identiques, à deux points fixes.

Sous l'action de l'écoulement du fluide le sphère de déplace de la position initiale d'équibibre, et l'angle fait par les fils de suspension avec la direction verticale ou la variation de la longueur des ressorts dynamométriques, permettent de mesurer la vitesse d'écoulement du fluide.

Les avantages du nouveau appareil dynamométrique, par rapport aux appareils pendulaires sont :

1. Précision relative de mesure accrue par rapport aux appareils pendulaires.

2. Possibilité d'être employé dans des très divers domaines des vitesses des gaz et des liquides, en agissant sur les dimensions et les constantes élastiques des ressorts dynamométriques, ainsi que sur la distance entre les points fixes de suspension, ou sur le rayon de la sphère.

3. Construction, mise en station et manipulation très simple.

4. Variation près de la linéarité entre la vitesse du fluide et la variation de longueur des ressorts dynamométriques, ce qui permet une interpolation plus facile des valeurs mesurées.

Faculté d'Agronomie
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 15 Janvier 1948)

Travaux cités

1) Wren Harms – „*Handbuch der Experimentalphysik*" Bd. IV, 1 Teil, pag. 574' Akademische Verlagsgesellschaft M. b. H. Leipzig, 1931.
2) R. Champly – „*Les moteurs à vent*", p. 257. Edit. Dunod, Paris, 1933.
3) Pavel Dorin – „*Instalaţiuni şi Maşini hidraulice*" vol. I, p. 68, (I. R. E.) Edit. Monitorul Oficial, Bucureşti, 1936.
4) Voir 1 et aussi: Grimseh l – Tomaschek – „*Lehrbuch der Physik*" Bd. I, pag. 293 et suiv., Verlag. B. G. Teubner, Leipzig & Berlin, 1922.

621.38

LA DÉTERMINATION DES CONDITIONS OU LA MESURE DE L'INTENSITÉ D'UN FAISCEAU DE RAYONS X CONDUIT À DES RÉSULTATS IDENTIQUES, PAR LES DEUX MÉTHODES : ECRAN FLUORESCENT - CELLULE PHOTOELECTRIQUE ET CHAMBRE D'IONISATION

par

EMIL LUCA

Le courant photoélectrique aussi bien que le courant d'ionisation peuvent être utilisés à la mesure de l'intensité d'un faisceau de rayons X.

Mais l'énergie contenue dans un faisceau de rayons X est représentée par l'expression :

$$I = \frac{A\,i\,N}{2\lambda^2_0}$$

où :

A = constante

N = le nombre atomique de l'élément radiateur

i = le courant électronique du tube

λ_0 = la longueur d'onde correspondante à la tension de crête.

Selon la relation d'Einstein [1]), entre la longueur d'onde et la tension appliquée au tube on a :

$$\lambda_0 = \frac{hc}{eV}$$

où :

h = la constante de Planck = $6{,}55.10^{-27}$ c. g. s.

c = la vitesse de la lumière = 3.10^{10} c. g. s.

e = la charge électrique de l'électron = $1{,}59.10^{-20}$ u. e. s. et par conséquent, d'après Duane [2]) :

$$\lambda_0 = \frac{12{,}35}{V}$$

λ_0 étant exprimé en Angströms et V en KV.

En ce cas la relation de l'énergie contenue dans un faisceau de rayons X devient ;

$$I = CNiV^2$$

où d'après Beatty la constante C a la valeur $1{,}67.10^{-6}$ c. g. s. si V est en KV.

Cette relation nous indique que l'intensité d'un faisceau de rayons X est fonction du courant électronique du tube et de la tension appliquée au tube, en variant proportionnellement à l'intensité du courant électronique et au carré de la tension appliquée au tube.

Donc, les variations de tension, qui modifient la longueur d'onde auront sur le faisceau de rayons X, un effet plus accentué que les variations du courant électronique qui modifient la charge électrique même du faisceau.

Dans ce qui suit, nous entendons par l'intensité d'un faisceau de rayons X, le phénomène global qui contient les effets dus à la tension appliquée au tube, aussi bien que ceux qui sont dus au courant électronique du tube de rayons X.

Nous nous sommes proposé de rechercher par l'expérience comment varie l'intensité du faisceau de rayons X, mesuré, soit par le courant photoélectrique, soit par le courant d'ionisation, en fonction de la tension appliquée au tube, en maintenant constant le courant électronique, ou en fonction du courant électronique en maintenant constante la tension.

Dans ce but il faut considérer aussi le fait que l'intensité d'un faisceau de rayons X, conformément aux recherches de : Sadler[3]), Beatty[4]), Barkla et Dallas[5]), Shearrer[6]), Espe[7]), Vette[8]), Küstner[9]), etc., varie selon l'épaisseur de la substance absorbante, ou selon la distance à laquelle on fait la mesure, d'après la relation ;

$$I_1 = I_0 e^{-\tau x}$$

où

I_0 = la valeur de l'intensité du faisceau incident de rayons X

I_1 = la valeur de l'intensité du faisceau de rayons X à la distance x du tube ou l'épaisseur de la substance absorbante

τ = le coefficient d'affaiblissement du faisceau incident

x = la distance du tube ou l'épaisseur de la substance absorbante.

Ce coefficient d'affaiblissement est dû :

- à l'absorption vraie
- à la diffusion par effet Compton
- matérialisation des photons.

Selon Réad, Holthusen, Braun, Destriau [10]), quand on utilise

des faisceaux monochromatiques, le coefficient τ est fonction seulement de la longueur d'onde, en diminuant avec celle-ci, tandis que dans le cas des faisceaux hétérogènes τ est aussi une fonction quelconque de la distance x, conséquence du phénomène de filtrage et dans ces cas la variation de l'intensité du faisceau de rayons X ne s'effectue simplement d'une manière exponentielle, mais selon une courbe qui décroît rapidement au commencement du filtrage en devenant peu à peu moins décroissante.

La méthode de travail

En considérant ces notions introductives, nous nous sommes proposé, dès le début, d'étudier la variation de l'intensité d'un faisceau de rayons X, selon la distance du tube, en effectuant la mesure de cette intensité soit par le courant photoélectrique, soit par le courant d'ionisation.

A. *Dans le cas du courant photoélectrique*, nos déterminations ont été effectuées à l'aide d'un appareil de rayons X „*Heliodor Duplex*" (appartenant à la Caisse des Assurances Sociales de Jassy), qui possède un transformateur „*Siemens Reiniger*" de 70,6 KW ; le tube de rayons X étant un „*Doglas*" pe 6 KW.

Le pupitre de commande de l'appareil nous a offert par ses appareils de mesure, la possibilité de connaître en tout moment la tension appliquée au tube et le courant électronique du tube aussi bien que le chauffage du filament du tube et par là, le courant électronique.

La mesure du courant photoélectrique a été effectuée à l'aide d'une cellule photoélectrique à couche d'arrêt [11]) du type des cellules photovoltaïques [12]) et à l'aide d'un galvanomètre „*Miravi*" de 70 ohms résistance propre. Pour écran fluorescent nous avons employé un écran „*Super Astral*".

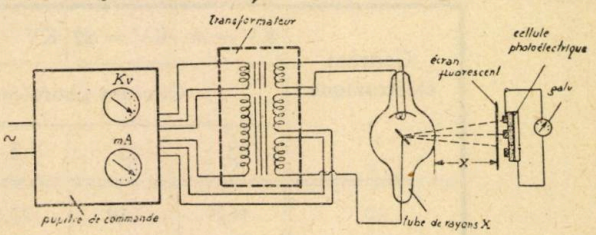


Schéma de l'installation

Fig. 1.

Les premières mesures du courant photoélectrique nous les avons effectuées à la sortie même du tube, donc pour un x (la distance entre le tube et l'écran fluorescent) nul.

Dans ce but nous nous sommes placé au commencement sur un certain plot de pénétration, soit 46 KV, valeur constatée au kilovoltmètre du pupitre de commande ; la durée d'exposition a été fixée à une

seconde, qu'on a maintenue la même, pendant toutes les déterminations ultérieures.

En donnant un certain chauffage au filament du tube, nous avons noté la valeur *i* du courant électronique du tube, constatée au miliampèrmètre du pupitre de commande. De même le courant photoélectrique c'est-à-dire le nombre des divisions du galvanomètre monté en série avec la grille et la couche d'oxyde de la celule photoélectrique.

En maintenant le même plot de pénétration, toujours 46 KV, nous avons donné un autre chauffage au filament, en notant de nouveau la valeur du courant électonique aussi bien que le nombre des divisions du galvanomètre (donc le courant photoélectrique).

Nous avons continué de cette manière, pour une même tension, à savoir, pour une pénétration fixe avec des valeurs du courant électronique entre 40 et 84 m*A*. tant que le tube a pu supporter, en lisant pour chaque valeur de l'intensité du courant électronique, la valeur respective de l'intensité du courant photoélectrique.

On a procédé de même pour d'autres tensions accélératrices en nous maintenant toujours dans les limites imposées par la puissance de l'appareil.

Les résultats expérimentaux obtenus, position de mesure à la sortie du tube, sont ceux qui se trouvent dans le tableau No. 1.

TABLEAU No. 1

distance du tube $x = 0$ cm.

Courant électronique *i*	KV = 46	KV = 52	KV = 59	KV = 66
	Courant photoélectrique			
	β	β	β	β
40	16,5	19	20,5	22
50	22	24	25,5	27
62	27	29	30,5	31,5
72	31,5	33	34,5	35,5
84	33	35	37,5	39

De ces dates il résulte qu'à la sortie du tube, le courant photoélectrique croît avec l'intensité du courant électronique sans qu'on y observe des tendances de saturation, du moins pour notre domaine de travail.

Nous avons continué les mêmes déterminations à différentes distances du tube.

Les résultats sont inscrits dans les tableaux No. 2, 3, 4, 5 et 6.

TABLEAU No. 2
distance du tube $x = 25$ cm.

Courant électronique i	KV = 46	KV = 52	KV = 59	KV = 66
	Courant photoélectrique			
	β	β	β	β
40	10,5	13	15	17
50	13,5	16,5	17	21
62	16	19,5	20,5	24
72	18	22	24	27
84	20	24	26,5	29

TABLEAU No. 3
distance du tube $x = 45$ cm.

Courant électronique i	KV = 46	KV = 52	KV = 59	KV = 66
	Courant photoélectrique			
	β	β	β	β
40	8	9,5	11,5	13
50	8,5	12	15	16,5
62	9	15,5	18,5	20
72	9	17,5	21	23
84	9	19	23,5	26

TABLEAU No. 4
distance du tube $x = 60$ cm.

Courant électronique i	KV = 46	KV = 52	KV = 59	KV = 66
	Courant photoélectrique			
	β	β	β	β
40	6,5	8	9	11
50	7	8,5	11	14
62	7	9	12,5	16,5
72	7	9	13,5	18,5
84	7	9	14	20

TABLEAU No. 5

distance du tube $x = 70$ cm.

Courant électronique i	KV = 46	KV = 52	KV = 59	KV = 66
	Courant photoélectrique			
	β	β	β	β
40	5,5	7	9	11,5
50	5,5	7,5	10,5	14
62	5,5	7,5	11	15,5
72	5,5	7,5	11	16
84	5	7,5	11	16,5

TABLEAU No. 6

distance du tube $x = 75$ cm.

Courant électronique i	KV = 46	KV = 52	KV = 59	KV = 66
	Courant photoélectrique			
	β	β	β	β
40	5	6,5	8,5	10,5
50	5	6,5	9,5	11,5
62	5	6,5	9,5	12,5
72	4,5	6,5	9,5	12,5
84	4,5	6	9,5	12,5

Des résultats ci-dessus, il résulte qu'en nous écartant du tube c'est-à-dire en donnant à la distance x des valeurs de plus en plus grandes, les accroissements du courant photoélectrique en fonction du courant électronique, deviennent respectivement de plus en plus petites, et qu'à une certaine distance du tube apparaissent des phénomènes de saturation ; alors si l'on fait croître le courant électronique, le courant photoélectrique reste presque constant ou il peut même décroître.

Au-delà de cette distance la saturation est atteinte pour des valeurs de l'intensité du courant photoélectrique de plus en plus petites.

Pour une tension plus accentuée appliquée au tube, le phénomène se répète, mais alors la saturation est atteinte pour une distance plus grande.

Si on procède à la choix des tensions et des distances auxquelles apparaît cette saturation, étant donnée un certain courant électronique, (le même) soit 62 mA, nous obtendrons les données du tableau No. 7.

TABLEAU No. 7

Courant électronique i	Distance à quelle apparaît la saturation x cm.	Tension appliquée au tube KV
62	45	46
62	60	52
62	70	59
62	75	66

Représentées graphiquement, ces valeurs nous conduisent à la courbe de la fig. 2.

De cette figure nous remarquons que pour le cas du courant photoélectrique et pour le même courant électronique, la saturation apparaît à des tensions de plus en plus grandes, à mesure que nous nous écartons du tube.

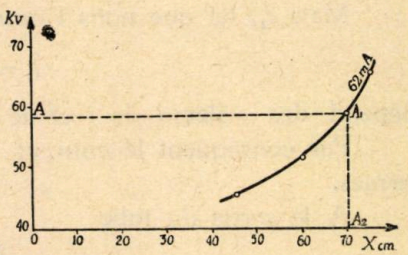


Fig. 2.

Pour une autre valeur du courant électronique, nous obtiendrons une courbe similaire, placée au-dessous ou au-dessus de la courbe de la fig. 2, selon que la valeur de l'intensité du courant électronique sera plus grande ou plus petite.

La courbe de la fig. 2 nous permet de connaître en tout moment à quelle distance du tube le courant photoélectrique présente des phénomènes de saturation pour un certain courant électronique du tube.

Par exemple: si l'on veut connaître à quelle distance du tube apparaît la saturation pour un courant électronique de 62 mA. et une tension de 59 KV, on trace du point A (59 KV) une droite $A - A_1$ parallèle à l'abscisse jusqu'à ce qu'elle rencontre la courbe de saturation pour 62 mA. au point A_1. De ce point (A_1) on descend une nouvelle droite $A_1 - A_2$, parallèle à l'ordonnée, jusqu'à ce qu'elle rencontre l'abscisse au point A_2; ce point A_2 (70 cm) indique la distance d'où

le courant photoélectrique présentera des phénomènes de saturation.

Donc dans le cas d'une tension appliquée au tube de 59 KV et d'un courant électronique de 62 mA, le courant photoélectrique présente des phénomènes de saturation à la distance de 70 cm. du tube.

L'explication de ce phénomène de saturation du courant photoélectrique, qui apparaît d'autant plus prononcé que nous nous écartons du tube réside dans le fait suivant :

On sait que le courant photoélectrique est produit dans une cellule photoélectrique par l'illumination de l'écran fluorescent sur lequel tombe le faisceau de rayons X.

Entre l'illumination de l'écran fluorescent et l'intensité du faisceau de rayons X existant la proportionnalité :

$$\beta = I_1 (1 - e^{-\mu b})$$

où :

β = l'illumination de l'écran

μ = le coefficient d'absorption de la substance fluorescente

b = l'épaisseur de la substance fluorescente

I_1 = l'intensité du faisceau de rayons X au lieu de mesure (à la distance x du tube),

on voit tout de suite que la valeur du courant photoélectrique est fonction de I_1.

Mais I_1, tel que nous l'avons montré, étant donné par la relation

$$I_1 = I_0 e^{-\tau x},$$

dépend des valeurs de τ et de x et en ce cas l'illumination aussi.

Par conséquent le courant photoélectrique sera fonction de ces termes.

A la sortie du tube

$$x = 0$$

et dans ce cas

$$I_1 = I_0 ,$$

donc le courant photoélectrique poursuit les variations du faisceau incident I_0 de rayons X.

En nous écartant du tube et en travaillant avec des faisceaux hétérogènes de rayons X, cette intensité diminue selon la distance, et cette diminution est déterminée aussi par le coefficient d'affaiblissement τ qui, à une certaine distance et pour une certaine valeur du courant électronique, devient si grande qu'il égale ou peut même dépasser l'accroissement de l'intensité du faisceau de rayons X dû à l'augmentation du courant électronique et par conséquent, de ce moment-là, le courant photoélectrique présente des phénomènes de saturation ou il peut même décroître.

En effet, par l'augmentation du courant électronique du tube, nous nous approchons de la zone devançant les décharges par arc, lorsque à cause des charges spatielles avant l'anode, une augmentation du courant électronique mène à une diminution de la tension aux bornes du tube.

La diminution de la tension déterminée par l'augmentation du courant électronique, modifie la composition spectrale du faisceau de rayons X, en appauvrissant le faisceau respectif en rayons de courtes longueurs d'onde et en l'enrichissant par échange en rayons de grandes longueurs d'onde, qui seront plus facilement absorbables.

Ce phénomène fait qu'au-delà d'une certaine distance, l'augmentation de l'intensité du faisceau incident de rayons X, conséquence de l'augmentation du courant électronique ne puisse plus compenser l'affaiblissement d'intensité de ce faisceau dû à la distance x et au coefficient d'affaiblissement τ.

Pour une autre tension donc un autre domaine des longueurs d'onde, le phénomène se répète mais alors la saturation est atteinte pour une valeur de la distance x plus grande ou plus petite selon que la ension appliquée au tube a été elle aussi plus grande ou plus petite.

Conclusions pour le courant photoélectrique

En travaillant avec des faisceaux hétérogènes de rayons X, on constate :

1. A la sortie du tube, le courant photoélectrique croît, du moins pour notre domaine de travail, avec l'intensité du faisceau de rayons X pour toutes les valeurs de la tension appliquée au tube et toutes les valeurs de l'intensité du courant électronique.

2. Plus les mesures sont effectuées à une distance plus grande du tube, plus on constate un phénomène de saturation du courant photoélectrique plus accentué, dû au coefficient d'affaiblissement de l'intensité du faisceau de rayons X, dont la valeur est déterminée par la distance x du tube, et au fait que pour de grandes valeurs du courant électronique nous nous approchons dans le tube de la zone devançant la décharge par arc, lorsqu'une croissance du courant électronique mène à une diminution de la tension appliquée au tube, ce qui détermine un enrichissement du faisceau de rayons X en rayons de grandes longueurs d'onde plus facilement absorbables.

Cette saturation du courant photoélectrique apparaît à partir de petites valeurs de la tension appliquée au tube de rayons X, donc de grandes longueurs d'onde.

B. *Pour le courant d'ionisation*, nos déterminations ont été effectuées par les mêmes appareils et dans les mêmes conditions qu'au cas du courant photoélectrique à l'exception que cette fois-ci l'ensemble formé d'écran fluorescent, cellule photoélectrique et galvanomètre, qui nous indiquait la valeur de l'intensité du courant photoélectrique, a été remplacé par une chambre d'ionisation, qui nous donnât la valeur de l'intensité du courant d'ionisation.

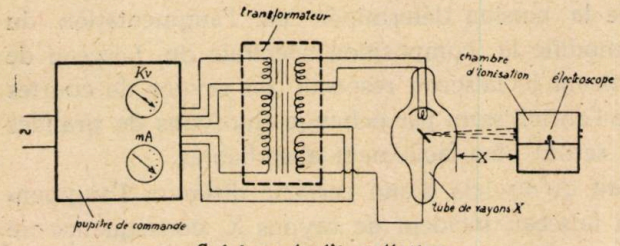


Schéma de l'installation
Fig. 3.

Pour la mesure du courant d'ionisation nous avons employé la „*Chambre d'ionisation de Küstner*“ [15]), l'intensité du courant d'ionisation étant indiquée par le nombre des divisions lues à l'électroscope de la chambre d'ionisation.

Comme il existe une proportionnalité entre le courant d'ionisation et l'intensité du faisceau de rayons X, à savoir:

$$I_1 = kj$$

où;

I_1 = l'intensité du faisceau de rayons X

j = l'intensité du courant d'ionisation

et comme on a déjà écrit,

$$I_1 = I_0 e^{-\tau x},$$

nous voyons qu'en ce cas, la valeur de l'intensité du courant d'ionisation étant fonction de I_1 variera aussi d'après la distance du tube x et avec le coefficient d'affaiblissement τ de l'intensité du faisceau de rayons X.

Il en suivrait qu'en ce cas, le phénomène de saturation apparaisse aussi, de même qu'au cas du courant photoélectrique, selon les mêmes règles.

Dans ce but nous avons effectué les mêmes mesures de la même manière que pour le courant photoélectrique.

Donc, au début, nous nous sommes placés avec la chambre d'ionisation de Küstner à la sortie du tube, donc pour $x = 0$, en nous fixant sur un certain plot de pénétration, soit 46 KV, nous avons mesuré le courant d'ionisation en fonction du courant électronique que nous avons varié de même que le courant photoélectrique entre 40 et 84 mA. Ensuite nous nous sommes fixés sur un autre plot de pénétration, donc sur une autre tension et nous avons effectué les mêmes déterminations,

en maintenant pour toutes ces expériences le même temps d'exposition, d'une seconde.

Les résultats obtenus à la sortie du tube sont ceux que nous indiquons dans le tableau No. 8.

TABLEAU No. 8

distance du tube $x = 0$ cm.

Courant électronique i	KV = 46	KV = 52	KV = 59	KV = 66
	Courant d'ionisation			
	j	j	j	j
40	41	46,5	51,5	55
50	41	46,5	51.5	55
62	41	46,5	51,5	55
72	41	46,5	51,5	55
84	41	46,5	51,5	55

Des données de ce tableau on observe qu'à la sortie du tube le courant d'ionisation mesuré avec la chambre d'ionisation de Küstner, par différence du courant photoélectrique, présente des phénomènes de saturation à partir même des petites valeurs de l'intensité du courant électronique.

En continuant les mêmes mesures à diverses distances du tube, nous avons obtenu les résultats des tableaux No. 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15.

TABLEAU No. 9

distance du tube $x = 18$ cm.

Courant électronique i	KV = 46	KV = 52	KV = 59	KV = 66
	Courant d'ionisation			
	j	j	j	j
40	30,5	34	38	44,5
50	30,5	34	38	46
62	30,5	34	38	47
72	30,5	34	38	47
84	30,5	34	38	47

TABLEAU No. 10

distance du tube $x = 25$ cm.

Courant électronique i	KV = 46	KV = 52	KV = 59	KV = 66
	Courant d'ionisation			
	j	j	j	j
40	26	29,5	31	33
50	26	29,5	31,5	38
62	26	29,5	32	42
72	26	29,5	32	46
84	26	29,5	32	48

TABLEAU No. 11

distance du tube $x = 35$ cm.

Courant électronique i	KV = 46	KV = 52	KV = 59	KV = 66
	Courant d'ionisation			
	j	j	j	j
40	20,5	24	28,5	31
50	20,5	25	32	37
62	20,5	26	35	40
72	20,5	26	37	41,5
84	20,5	26	38	43

TABLEAU Nr. 12

distance du tube $x = 45$ cm.

Courant électronique i	KV = 46	KV = 52	KV = 59	KV = 66
	Courant d'ionisation			
	j	j	j	j
40	16,5	20	25	27
50	17	23	28	31
62	17,5	25,5	30,5	35
72	17,5	26,5	33	37
84	17,5	27	34,5	38

TABLEAU No. 13

distance du tube $x = 60$ cm.

Courant électronique i	KV = 46	KV = 52	KV = 59	KV = 66
	Courant d'ionisation			
	j	j	j	j
40	15	18	21,5	24
50	15	18,5	24	27
62	15	19	27	29,5
72	15	19	29,5	32
84	14,5	19	31	34

TABLEAU No. 14

distance du tube $x = 71$ cm.

Courant électronique i	KV = 46	KV = 52	KV = 59	KV = 66
	Courant d'ionisation			
	j	j	j	j
40	13,5	16,5	19	20
50	13,5	17	19,5	23,5
62	13,5	17	20	26
72	12,5	17	20	28
84	12,5	16,5	20	29

TABLEAU No. 15

distance du tube $x = 75$ cm.

Courant électronique i	KV = 46	KV = 52	KV = 59	KV = 66
	Courant d'ionisation			
	j	j	j	j
40	11,5	14	17,5	19
50	11.5	14	17,5	21
62	11	14	17,5	22
72	11	13,5	17,5	22
84	11	13,5	17	22

Des données ci-dessus on observe qu'en écartant la chambre d'ionisation du tube, le courant d'ionisation commence à suivre les variations (croissance) du courant électronique, la saturation n'étant pas atteinte que pour des valeurs de plus en plus grandes du courant électronique et à mesure que nous nous écartons du tube, donc pour des distances plus grandes.

Mais le fait a lieu seulement jusqu'à une certaine distance à partir de laquelle le courant d'ionisation se produit d'un même aspect que le courant photoélectrique fourni par la cellule photoélectique placée à la même distance. Il résulte qu'à partir d'une certaine distance et d'une certaine valeur du courant électronique le courant d'ionisation ne suit plus les variations (croissance) du courant électronique, mais il reste approximativement constant ou éventuellement il peut décroître, tandis que le courant électronique croît.

Si on procède à la choix des tensions et des distances auxquelles apparaît cette saturation du courant d'ionisation, étant donné un certain courant électronique (le même) soit 62 mA, nous obtiendrons les données du tableau No. 16.

TABLEAU No. 16

Courant électroniqne i	Distance à quelle apparaît la saturation x cm.	Tension appliquée au tube KV
62	46	46
62	35 et 60	52
62	25 et 71	59
62	18 et 75	66

Représentées graphiquement ces valeurs nous conduisent à la courbe de la fig. 4.

De cette figure on observe que pour le courant d'ionisation mesuré avec la chambre d'ionisation, la saturation apparaît pour un même courant et pour toutes les tensions à la sortie même du tube.

En nous écartant du tube, la saturation a lieu pour des tensions appliquées au tube de plus en plus petites, puis passe par un minimum pour une certaine distance (dans notre cas 45 cm.) et commence à augmenter de la même manière que dans le cas du courant photoélectrique, en suivant la même règle c'est-à-dire en apparaissant de nouveau pour des tensions de plus en plus grandes.

Dans ce cas, si l'on veut savoir à quelle distance du tube appa-

raît la saturation pour un courant électronique, par exp. de 62 mA et une tension appliquée au tube de 59 KV, alors on trace du point A (59 KV) une droite $A - A_2$ parallèle à l'abscisse qui coupe la courbe de saturation du courant électronique de 62 mA, dans les points A_1 et A_2. De ces deux points on trace les droites $A_1 B_1$ et $A_2 B_2$ parallèles à l'ordonnée, qui coupent l'abscisse dans les points B_1 et B_2. Ces points indiquant les distances de 25 cm et 71 cm, nous montrent qu'en travaillant avec une tension de 59 KV et un courant électronique de 62 mA nous trouvons les phénomènes de saturation pour toute la distance de 25 cm. à partir du tube. En dépassant cette distance le phénomène de saturation disparaît en reparaissant au-delà de la distance de 71 cm.

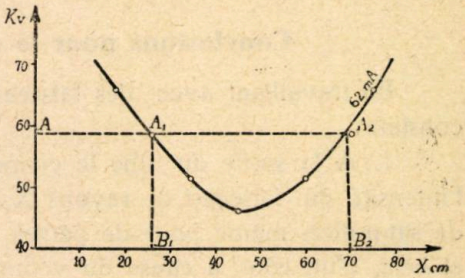


Fig. 4.

L'explication du phénomène réside dans les faits suivants:

Nous admettons qu'à la sortie du tube, pour une certaine tension appliquée au tube (donc un domaine défini de longueurs d'onde), le volume de gaz de la chambre d'ionisation a une certaine limite d'ionisation, qui est vite atteinte, dû à l'intensité du courant électronique aussi bien qu'au faisceau de rayons X, qui pénètre dans ce cas dans la chambre d'ionisation sous un grand angle, ce qui fait qu'une partie du faisceau respectif frappera les parois intérieures de la chambre d'ionisation, en produisant des émissions secondaires d'électrons, qui contribuent aussi à l'atteinte immédiate de la limite de saturation.

Ee nous écartant du tube, l'intensité du faisceau de rayons X ainsi que nous l'avons montré décroît à cause de x et τ, donc il sera besoin d'un courant électronique plus intense qui compense cet affaiblissement du faisceau à cause de x et τ et de plus l'angle sous lequel le faisceau de rayons X pénètre cette fois-ci dans la chambre d'ionisation est plus petit et par conséquent une partie plus réduite de ce faisceau frappera les parois intérieures de la chambre d'ionisation en produisant des émissions secondaires d'électrons. La tendance de saturation apparaîtra en ce cas plus tard, à mesure que nous nous écartons du tube et pour des valeurs du courant électronique de plus en plus grandes.

Ce phénomène continue se produire jusqu'à une certaine distance à partir de laquelle l'augmentation du courant électronique ne peut plus compenser l'affaiblissement du faisceau à cause de x et τ et de plus le faisceau complet de rayons X qui pénètre maintenant dans la

chambre d'ionisation passe par elle et en sort par la partie opposée (fig. 3) sans qu'il frappe les parois intérieures de la chambre et donc sans qu'il produise des émissions secondaires. Au-delà de cette distance le phénomène prend l'aspect de celui de la cellule photoélectrique, à savoir, la saturation n'est plus due à l'ionisation complète du volume de gaz de la chambre d'ionisation, mais au fait qu'à partir d'une certaine distance l'intensité même du faisceau de rayons X ne peut plus croître pendant que le courant électronique croît,

Conclusions pour le courant d'ionisation

En travaillant avec des faisceaux hétérogènes de rayons X on constate:

1. A la sortie du tube le courant d'ionisation ne croît pas avec l'intensité du faisceau de rayons X, mais il présente des phénomènes de saturation même pour de petites intensités du courant électronique et cela, d'un côté, à cause du volume de gaz de la chambre d'ionisation qui a une limite précise d'ionisation, et d'un autre côté, à cause du grand angle sous lequel le faisceau de rayons X pénètre dans la chambre d'ionisation, lorsqu'une partie de ce faisceau en frappant des parois intérieures de la chambre, produit des émissions secondaires d'électrons, qui mènent à la saturation immédiate du volume de gaz de la chambre d'ionisation.

2. En nous écartant du tube, le courant d'ionisation commence à suivre les variations (croissances) du courant électronique, en présentant des phénomènes de saturation pour des intensités du courant électronique de plus en plus grandes, à mesure que les distances du tube deviennent plus grandes, étant donée que l'intensité du faisceau de rayons X diminue à cause de la distance x et du coefficient d'affaiblissement τ et de plus que l'angle sous lequel le faisceau de rayons X pénètre dans la chambre d'ionisation est plus petit et par conséquent l'émission secondaire respective d'électrons est beaucoup plus petite.

Dans ce cas il sera nécessaire d'un courant électronique plus grand qui compense cette diminution en résultant que le phénomène de saturation sera de plus en plus moins prononcé.

3. Mais ce fait a lieu seulement jusqu'à une certaine distance, au-delà le courant d'ionisation se comporte de la même manière que le courant photoélectrique du cas précédent, à savoir, le phénomène de saturation commence à se prononcer de nouveau, en apparaissant pour des tensions de plus en plus grandes, cette fois-ci, à partir de cette distance la saturation n'étant plus déterminée par la limite d'ionisation

du gaz, mais par le fait que l'intensité même du faisceau de rayons X ne croît plus, alors que le courant électronique croît.

C. *En comparant* les résultats obtenus séparément par la mesure du courant photoélectrique et par la mesure du courant d'ionisation on aboutit aux courbes de la fig. 5.

On voit de ces courbes qu'à partir de la distance de 45 cm. du tube, au cas du courant photoélectrique aussi bien qu'au cas du courant d'ionisation, le phénomène de saturation apparaît approximativement pour les mêmes valeurs, ce qui nous autorise d'affirmer que seulement quand on travaillera à partir de cette distance, par les deux méthodes, il pourra exister un parallèlisme parfait entre les résultats obtenus par les deux méthodes; ce phénomène de saturation étant mis dans les deux cas sur le compte du même phénomène, à savoir de l'impuissance du faisceau incident de rayons X de produire un dépassement d'une certaine limite d'ionisation.

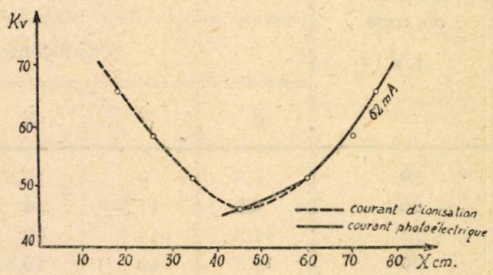


Fig. 5.

En cas des radiographies et des radioscopies, la distance pratique de travail, entre le tube de rayons X et l'écran fluorescent, étant d'approximativement 70 cm, nous avons fixé donc comme distance de travail 70 cm, parce que, dans ce cas, le mesures effectuées par les deux méthodes, celle du courant photoélectrique et celle du courant d'ionisation, donneront des résultats comparables.

Une fois établi cette première condition de la manière de travail par les deux méthodes, on peut passer au problème proposé dès le début, à savoir l'étude des variations du courant photoélectrique et du courant d'ionisation à la distance de 70 cm, en fonction de la tension appliquée au tube en maintenant constant le courant électronique et inversement.

I. *La variation du courant photoélectrique β en fonction de la tension appliquée au tube, en maintenant constant le courant électronique.*

C'est à dire:

$$\beta = f(KV).$$

Dans ce but nous nous sommes placés avec l'ensemble: „écran fluorescent-cellule photoélectrique et galvanomètre" à la distance de 70 cm. du tube et en fixant au début un certain courant électronique, nous avons varié successivement la tension aux bornes du tube, en

notant chaque fois pour quelle intensité du courant électronique nous avons travaillé.

Nous avons procédé pour les autres intensités du courant électronique, comprises entre 30 et 84 mA, tant que le tube les a permis, de

TABLEAU No. 17

Tension au tube KV	Courant électronique					
	$i=30$mA	$i=40$mA	$i=50$mA	$i=62$mA	$i=72$mA	$i=84$mA
	Courant photoélectrique					
	β	β	β	β	β	β
59	7,5	9	10,5	11	11	11
66	9,5	11,5	14	15,5	16	16,5
73	11,5	14	17	19,5	21	21,5
79	12,5	16	19,5	22,5	24,5	26
84	13	18	22	25	27	29

la même manière (variations des tensions appliquées aux bornes du tube).

Les résultats obtenus sont indiquées dans le tableau No. 17.

Représentées graphiquement, ces données nous conduisent à une série de droites indiquées dans la fig.6.

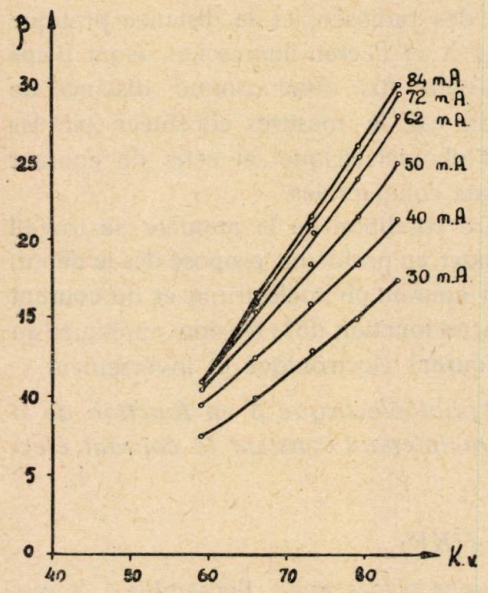


Fig. 6.

De l'étude de ce graphique on voit :

a) Le courant photoélectrique croît avec la tension appliquée aux bornes du tube,

b) Pour des valeurs de plus en plus grandes du courant électronique les courbes sont de plus en plus rapprochées cette situation étant manifeste même pour des petites valeurs de la tension appliquée au tube.

II. *La variation du courant photoélectrique β en fonction du courant électronique i, en maintenant constante la tension appliquée au tube.*

C'est à dire

$$\beta = f(i).$$

Dans ce cas, nous avons procédé comme dans le cas précédent à

la seule différence que cette fois nous avons maintenu la tension constante et nous avons varié la courant électronique.

Les résultats obtenus sont indiqués au tableau No. 18.

TABLEAU No. 18

Courant électronique i	Tension apliquée au tube				
	KV=59	KV=66	KV=73	KV=79	KV=84
	Courant photoélectrique				
	β	β	β	β	β
30	7,5	9,5	11,5	12,5	13,5
40	9	11,5	14	16	18
50	10,5	14	17	19,5	22
62	11	15,5	19,5	22,5	25
72	11	16	21	24,5	27
84	11	16,5	21,5	26	29

Représentées graphiquement ces valeurs nous donnent une série de courbes selon la fig. 7.

De ces courbes on voit:

a. Le courant photoélectrique β tend vers des valeurs de saturation à des tensions croissantes, pour des intensités de plus en plus grandes du courant électronique.

b. Dans notre cas (distance 70 cm.) la saturation est atteinte pour la tension de 59 KV et un courant électronique de 62 mA.

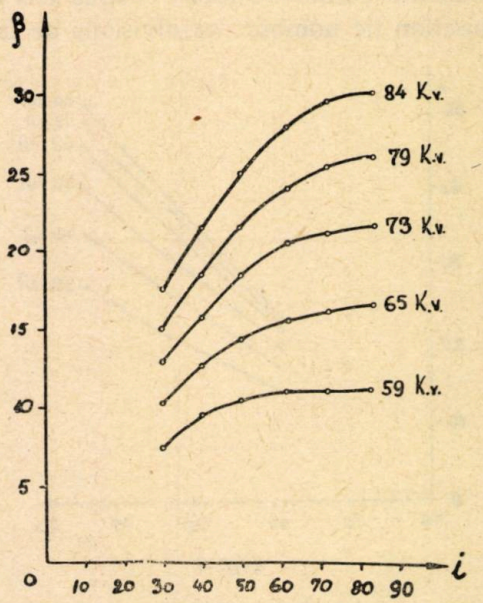


Fig. 7.

III. *La variation du courant d'ionisation j en fonction de la tension appliquée au tube, en maintenant constante l'intensité du courant électronique.*

C'est à dire

$$j = f(\mathrm{KV}) \ .$$

Nous avons remplacé l'ensemble „écran fluorescent – cellule photoélectrique et galvanomètre",

par „la chambre d'ionisation de Küstner", en nous plaçant à la même distance de 70 cm. du tube, sur le trajet des rayons X.

Les résultats obtenus sont indiquées au tableau No. 19.

TABLEAU No. 19

Tension au tube KV	Courant électronique					
	$i=30$mA	$i=40$mA	$i=50$mA	$i=62$mA	$i=72$mA	$i=84$mA
	Courant photoélectrique					
	j	j	j	j	j	j
59	14,5	17	19	21	22,5	23
66	18,5	22	26	28	30	31
73	22	27,5	32	36	37	37,5
79	25	32	37	42	44,5	45,5
84	27	35	43	48	50	52

Puis nous avons procédé de la même manière que dans le cas du courant photoélectrique, en établissant des valeurs constantes pour le courant électronique et en variant ensuite successivement la tension des bornes du tube ; chaque fois nous avons noté le courant d'ionisation (le nombre des divisions de la chambre de Küstner).

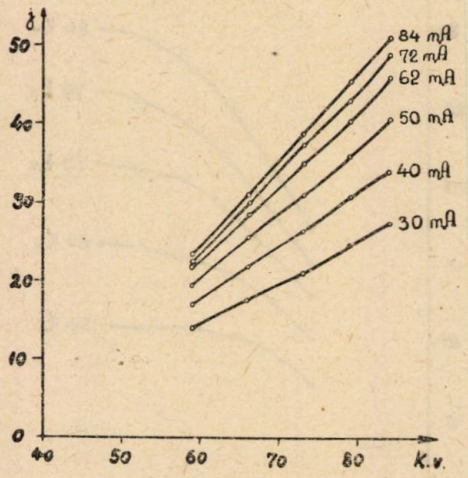


Fig. 8.

En prenant ensuite d'autres valeurs pour le courant électronique comprises toujours entre 30 et 84 mA, nous avons procédé de la même manière (diverses tensions appliquées au tube).

Représentées graphiquement, ces valeurs nous donnent une série de droites, selon la fig. 8.

De ces droites on voit :

a) Le courant d'ionisation croît avec la tension appliquée au tube.

b) Pour des valeurs du courant électronique de plus en plus grandes, les courbes sont de plus en plus rapprochées, en commençant pour de petites valeurs de la tension appliquée au tube.

IV. *La variation du courant d'ionisation j en fonction du courant électronique i du tube, en maintenant constante la tension appliquée au tube.*

C'est à dire:

$$j = f(i).$$

Ici aussi, nous avons procédé de la même manière que dans le cas précédent, à la seule différence que nous avons maintenu constante la tension appliquée au tube et nous avons varié le courant électronique.

Les résultats obtenus sont indiqués au tableau No. 20.

TABLEAU No. 20

Courant électronique i	Tension appliquée au tube				
	VK = 59	KV = 66	KV = 73	KV = 79	KV = 84
	Courant photoélectrique				
	j	j	j	j	j
30	14,5	18,5	22	25	27
40	17	22	27,5	32	35
50	18	26	32	37	43
62	21	28	36	42	48
72	22,5	30	37	44,5	50
84	23	31	37,5	45,5	52

Représentées graphiquement, ces valeurs nous donnent une série de courbes, selon la fig. 9.

De ces courbes on voit:

a) Le courant d'ionisation j tend vers la saturation à des tensions croissantes, pour des valeurs du courant électronique de plus en plus grandes.

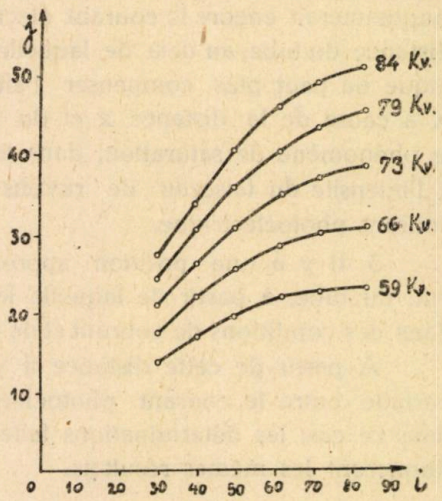


Fig. 9.

Conclusions générales

1. Le courant photoélectrique aussi bien que le courant d'ionisation peuvent servir à la mesure de l'intensité d'un faisceau de rayons X.

a) Au cas du courant photoélectrique, cette mesure de l'intensité du faisceau de rayons X peut être effectuée à n'importe quelle

distance du tube, puisqu'il existe en permanence une proportionnalité entre l'intensité du faisceau de rayons X et la valeur du courant photoélectrique.

b) Au cas du courant d'ionisation, la mesure de l'intensité du faisceau de rayons X ne peut être effectué qu'à une certaine distance du tube qui doit être établie.

2. Le courant photoélectrique, aussi bien que le courant d'ionisation présentent des phénomènes de saturation et notamment:

a) La saturation du courant photoélectrique montre que l'intensité même du faisceau de rayons X ne croît plus mais qu'elle reste constante ou qu'elle peut même décroître, à cause de la distance x et du coefficient d'affaiblissement τ. Dans ce cas, la saturation apparaît pour des valeurs de plus en plus grandes de la tension appliquée au tube à mesure que nous nous en écartons.

b. Au cas du courant d'ionisation, la saturation est déterminée de plus par l'angle sous lequel le faisceau de rayons X pénètre dans la chambre d'ionisation et par la limite d'ionisation du volume de gaz de la chambre d'ionisation. Dans ces conditions à la sortie du tube la saturation du courant d'ionisation ne sera plus dûe au fait que l'intensité du faisceau de rayons X n'aurait plus crû par la variation du courant électronique, mais par le fait que, pour un faisceau d'une certaine longueur d'onde, à cause de l'angle sous lequel ce faisceau pénètre dans la chambre d'ionisation, le gaz de la chambre atteint une limite d'ionisation, qui ne peut être dépassée n'importe combien on augmenterait encore le courant électronique. C'est à peine à une certaine distance du tube, au delà de laquelle l'augmentation du courant électronique ne peut plus compenser l'affaiblissement du faisceau de rayons X à cause de la distance x et du coefficient d'affaiblissement τ, que le phénomène de saturation, dans le cas du courant d'ionisation est dû à l'intensité du faisceau de rayons X, de même que dans le cas du courant photoélectrique.

3. Il y a une position approximativement à la distance de 46 cm. du tube, à partir de laquelle le phénomène de saturation apparaît dans des conditions de courant et de tension identiques, dans les deux cas.

A partir de cette distance il y a donc une concordance presque parfaite entre le courant photoélectrique et le courant d'ionisation et dans ce cas, les déterminations faites avec ces deux moyens différents donneront les mêmes résultats.

(Reçu le 30 Juin 1948)

Laboratoire de Mesures Electriques
de l'Ecole Polytechnique de Jassy

Travaux cités

1. Einstein. - Ann (4) 17. p. 132, 1905.
2. G. Destriau - *Physique appliquée des installations à rayons X.* p. 21, Paris 1945.
3. Sadler - Philosophic. Mag v. 19. p. 337. 1910.
4. Beatty - Ebenda v. 20. p. 320, 1910.
5. Barkla et Dallas - Philosophic. Mag. v. 47. p. 1. 1942.
6. Shearrer - Philosophic. Mag. v. 44. p. 793. 1922.
7. W. Espe. - Ann. d. Phys. v. 2. p. 381. 1929.
8. E. Vete. - Ebenda. v. 5. p. 929. 1930.
9. H. Küstner. - Strahlentherapie. v. 47. p. 35.
10. Destriau. - Loc. cit.
11. Merry Cohn. - R. G. E. 38. p. 123. 1935.
12. V. Z. Zworynkin et E. D. Wilson. - *Les cellules photoélectriques.* Paris, 1937.
13. H. Küstner. - Röntgen-Strahlentherapie. v. 20, p. 603.

54/57

SUR LA PROPRIÉTÉ DU PHOSPHORE D'EMETTRE DES RAYONS ULTRAVIOLETS DANS L'ORGANISME ANIMAL ET VEGETAL. LES RAYONS VITAUX

par

HARALAMBIE VASILIU [1])

A la suite de mes études antérieures sur la configuration moléculaire des matières albumineuses et sur la structure du Protoplasme [2]), j'ai pensé au rôle que le Phosphore peut avoir dans l'organisme.

Parmi les éléments, qui constituent la matière vivante – *C,H,O, N,S,P* – le *P* seul donne des radiations à la température ordinaire, et étant donné le fait qu'il se trouve dans les différentes parties de la cellule en proportion de l'intensité de la vie, il se pourrait qu'il ait un rôle très important dans les phénomènes vitaux.

Parmi les composés du Phosphore, seul l'acide phosphorique se trouve dans les organismes comme Phosphoprotéides, Nucléoprotéides et Phosphatides ; donc c'est de lui que nous allons nous occuper surtout pour voir si cet élément peut émettre des radiations dans les organismes. Gurwitsch, de l'Institut de Médecine expérimentale de Leningrad, a trouvé en 1923, les rayons mitogénétiques émis par les organismes, puis Stempell, Rajevski, Reiter, et Gabor et un grand nombre d'autres expérimentateurs ont travaillé dans cette direction.

Nous nous proposons d'examiner d'abord, si le *P* et d'autres éléments peuvent émettre des rayons, lorsqu'ils passent d'un degré inférieur d'oxydation à un autre supérieur.

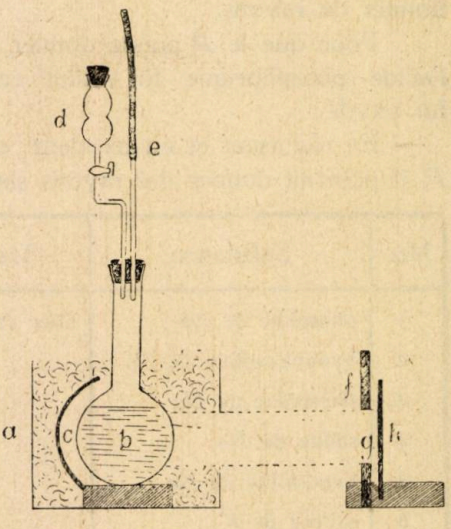
J'ai exécuté l'expérience de la façon suivante :

J'ai pris une boite en zinc de dimensions 12/12/12 cm, pourvue d'une ouverture latérale de 5 cm. Dans un ballon de 100 cmc. de quartz –, car, comme on le sait, le verre ordinaire ne laisse pas passer les rayons ultraviolets – j'ai versé 60 cmc. d'eau et j'y ai fait dissoudre 5 gr. phosphite de *Na*. Puis j'ai mis le ballon dans la boite et à la partie opposée à l'ouverture circulaire j'ai posé une capsule de verre ordinaire pour servir de miroir de réflexion aux rayons ultraviolets. Le tout a été fixé avec du papier chiffonné.

Dans un des orifices du bouchon de gomme j'ai introduit un entonnoir de 25 cmc, pourvu d'un robinet ; dans le second orifice j'ai fait passer un tube de verre terminé par un autre de caoutchouc long d'environ 60 cm.

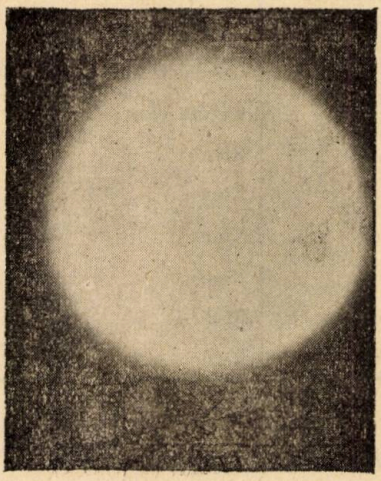
En face de l'ouverture circulaire de la boite, à 10 cm. de distance, j'ai posé une plaque carrée de zinc de dimensions $^{12}/_{12}$ cm., pourvue aussi d'une ouverture circulaire de 5 cm., montée sur un support de bois.

Dans l'entonnoir de verre j'ai versé d'abord 15 cmc. d'eau distillée, puis 10 cmc. d'eau oxygénée à 30 $^0/_0$. J'ai bouché le ballon et j'ai fixé le robinet de façon qu'une goutte tombe tout les 15". Après j'ai placé l'appareil dans une étuve dans la chambre noire. Puis j'ai fait passer le tube de caoutchouc par la tubulure de l'étuve.



a. boite, *b.* ballon, *c.* capsule de verre, *d.* entonnoir, *e.* tube de caoutchouc, *f.* plaque de zinc, *g.* plaque photographique,

Fig. 1.



Oxydation du phosphite en phosphate.
Fig. 2.

Ensuite dans l'obscurité j'ai placé sur le support de bois, derrière la plaque de zinc, une plaque photographique „Agfa". j'ai fermé la porte de l'étuve en couvrant le tout avec une toile opaque. Après 24 heures environ, j'ai développé la plaque.

En expérimentant avec diverses substances, j'ai obtenus les résultats donnés à la page suivante.

On voit que les combinaisons, du *C* ne donnent pas, à l'oxydation, de radiations, et que, parmi les éléments qui se trouvent dans les organismes, seulement le *S* et le *P* peuvent êtres pris en discussion, en ce qui concerne la possibilité de donner des rayons.

Le *S* se trouve dans le protoplasme comme cystine, donc pas

sous forme oxydée, et, selon ce que nous avons vu, il ne peut pas donner de rayons.

Pour que le *P* puisse donner des rayons il faudrait d'abord que l'acide phosphorique fût réduit en acide phosphoreux et que celui-ci fut oxydé.

En réduisant et en oxydant alternativement le même atome de *P*, il pourrait donner des rayons sans cesse selon les formules :

No.	Substance	Traitement	Résultat
1	phosphite de *Na*	avec $H^2 O^2$	Cercle clair
2	hypophosphite de *Na*	„	Cercle clair
3	phosphate de *Na*	„	Rien
4	sulfite de *Na*	„	Cercle clair
5	hyposulfite de *Na*	„	Cercle clair
6	sulfure de *K*	„	Rien, Précipité de *S.*
7	hydrogène sulfuré	„	„ „
8	phosphore en morceaux en ballon	avec de l'air	Cercle clair, phosphorescense
9	phosphore en morceaux plongé dans l'eau	avec $H^2 O^2$	Rien
10	bichlorure d'étain	„	Cercle clair
11	sulfate ferreux	„	Cercle moins clair
12	arsénite de *Na*	„	Cercle clair
13	nitrite de *Na*	„	Cercle clair
14	aldéhyde formique	„	Rien
15	aldéhyde benzoïque	„	Rien
16	alcool éthylique	„	Rien
17	glucose	„	Rien
18	glucose + sels	fermenté aux Sacch.	Rien
19	blanc d'oeuf	digéré artificiellement	Rien

$$H - PO(OH)^2 \underset{-O}{\overset{+O}{\rightleftarrows}} HO - PO(OH)^2.$$

On pourrait faire à cette théorie deux reproches :

1. La toxicité de l'acide phosphoreux. On sait que le *P* libre est toxique et que la toxicité diminue avec le degré d'oxidation, l'acide

phosphorique n'étant pas toxique ; donc l'acide phosphoreux a un certain degré de toxicité. Mais l'aldehyde formique, le premier produit de l'assimilation chorophyllienne, est aussi toxique ; probablement que l'acide phosphoreux ne reste pas longtemps tel quel, mais il se transforme par oxydation en acide phosphorique.

2. L'acide phosphorique est réduit très difficilement, plus difficilement même que l'acide sulfurique. Mais l'organisme a aussi de grandes possibilités de réduction. On doit penser à la synthèse des matières grasses, à la réduction des matières mères de l'acide hippurique etc.

Les atomes de *P* qui donnent des radiations ne sont pas ceux qui se trouvent comme acide phosphorique dans les liquides du corps ou dans les os, mais, ceux qui se trouvent dans le protoplasme vivant surtout comme Nucléoprotéides.

On sait que l'acide nucléinique est une polinucléotide, formée de plusieurs nucléotides de la forme :

Pentose (Hexose) + acide phosphorique + Bases (purinique ou pirimidinique). Dans la molécule de l'acide nucléinique on trouve donc un grand nombre de molécules d'acide phosphorique et dans chacune un oxydril ($-OH$) est attaché à l'atome de *P*. Nous pourrons avoir aussi des redoxsystèmes, comme dans le cas précédent, qui fonctionneront de la même manière.

$$\begin{matrix} R_1-O \\ R_2-O \end{matrix}\!\!>\!P\begin{matrix}-H\\=O\end{matrix} \;\underset{-O}{\overset{+O}{\rightleftarrows}}\; \begin{matrix} R_1-O \\ R_2-O \end{matrix}\!\!>\!P\begin{matrix}-OH\\=O\end{matrix}.$$

La batterie d'atomes de *P* de l'acide nucléinique bombardera énergiquement à l'aide d'ultraphotons en donnant des rayons ultraviolets.

Pour la réduction du groupe $-OH$ de l'acide phosphorique dans le protoplasme on utilise l'énergie chimique des substances des aliments tandis que l'énergie résultée de l'oxydation de $-OH$ de l'acide phosphorique se dégage sous forme de rayons ultraviolets.

Envisageons maintenant la question : *Ce que sont ces rayons émis par le P dans les organismes ?* J'ai pensé que peut être les rayons mitogénétiques de Gurwitsch sont ces rayons mêmes donnés par le *P*.

J'ai essayé d'abord de savoir si les rayons émis par les organismes n'impressionnent pas la plaque photographique.

Bien entendu que les rayons émis par la racine horizontale d'oignon dans l'expérience fondamentale de Gurwitsch étant trop faibles ne pourraient impressionner la plaque ; c'est pourquoi j'ai cherché à obtenir des rayons de plus grande intensité.

A cet effet, dans les années 1945/1946, j'ai exécuté les expériences suivantes:

1. J'ai pris 300 petits oignons et je les ai plantés dans un vase avec du sable humide. En gardant le sable toujours humide et à la température convenable pendant 16 jours, les oignons ont poussé. J'ai retiré les plantes du vase. J'ai fait tomber le sable et puis je les ai bien lavés. Après j'ai arrangé les racines, l'une à côté de l'autre, afin que leurs extrémités inférieures soient dans le même plan et le faisceau autant que possible cylindrique.

J'ai posé le faisceau ficelé dans un dispositif de bois, composé d'une petite pièce toujours en bois, verticale, de dimensions 15/8/8 cm, pourvue d'une ouverture circulaire de 5 cm. et une planche horizontale.

Sur la planche horizontale j'ai placé à gauche le faisceau, à droite le racines ; en face de la pièce verticale une plaque en verre de quartz et de l'autre côté la plaque photographique ; bien entendu, dans l'obscurité.

2. Une expérience semblable a été exécutée avec les extrémités des racines coupées verticalement avec une lame de rasoir.

3. L'expérience décrite au point 1, où ou lieu du verre plan de quartz on a pris une lentille convergente de quartz.

4. 5. 6. Des expériences semblables avec des haricots.

7. 8. Des expériences analogues avec des asperges, et enfin,

9. 10. Des expériences de la même manière avec de l'amarante.

En aucun cas je n'ai pu obtenir une impression photographique. Quelquefois il semblait que la plaque fût très faiblement impressionnée, mais c'était insuffisante pour permettre de tirer une conclusion précise. Peut être aurais-je réussi avec des plaques photographiques plus sensibles, mais à cause des évènements je n'ai pas pu me les procurer.

Du reste beaucoup d'expérimentateurs ont essayé d'obtenir des impressions photographiques, mais sans succès et la cause serait l'intensité extraordinairement faible de ces rayons émis par les organismes.

Plus de mille expérimentateurs sérieux ont travaillé avec ces rayons et quoiqu'ils n'aient pu démontrer précisément l'existence de ces derniers par la photographie, leur témoigage ne peut être mis en doute.

Puis j'ai essayé d'établir un parallélisme entre le spectre ultraviolet du phosphore d'une part et le spectre mitogénétique d'autre part et j'ai trouvé quelques concordances.

Lundegardh [1]) a donné pour le spectre ultraviolet du phosphore des chiffres autour de 2565 *A*, tandis que pour le spectre mitogénétique

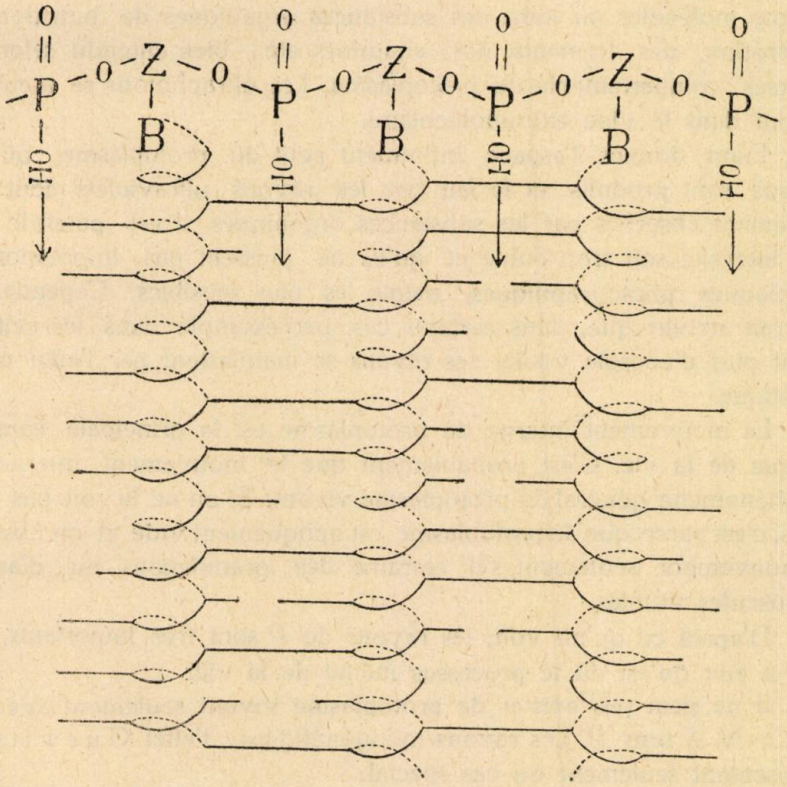
Gurwitsch[2]) donne 1900-2300μ, Büschar[3]) 1800-2500, Stempell[4]) 2600 μ etc.

Nos conceptions sur les radiations émises par les organismes.

Elles sont en rapport, comme je viens de le montrer, avec nos théories sur la configuration moléculaire des matières albumineuses et sur la structure du protoplasme.

La molécule des matières albumineuses[5]) est fibrillaire et constituée d'une spirale centrale d'atomes à la quelle sont attachées plusieurs chaînes d'atomes latérales.

Le protoplasme est constitué d'après notre théorie de la broderie des fibrilles de matières albumineuses, comme on le voit sur la figure schématique ci-jointe.



Le phénomène de la vie.
Z sucre, *B* bases puriniques, *P* phosphore.
Les distance en *A* correspondent approximativement.

Fig. 3.

Il peut exister plusieurs chaînes d'acide nucléinique parallèles ou transversales.

Les atomes de *P* de l'acide nuclénique par réduction et oxydation successives dégagent des ultraphotons, qui bombardent les atomes de la spirale centrale et des chaînes latérales en les mouvant dans un sens opposé aux atomes de *P*. Ce mouvement provoque le déplacement de tout le protoplasme et cause ainsi le mouvement interne du protoplasme. Un ultraphoton d'une longueur d'onde de 2000Å a une énergie de 98.10^{-13} ergs, et quelques centaines pourraient déplacer un microbe.

Comme nous l'avons montré, dans notre étude citée plus haut, autour des atomes et des molécules se trouve un espace vide extramoléculaire de *2-3 A*, puis vient de l'eau, qui est plus ou moins distante, selon que les groupes d'atomes sont lipophyles ou hydrophyles. Dans l'eau se trouvent, sous forme de solution des matières minérales, comme molécules ou ions, des substances organiques de nutrition ou d'excrétion, des ferments, des vitamines etc., bien entendu selon les diverses compartements du protoplasme. Les ultraphotons se meuvent surtout dans le vide extramoléculaire.

Etant donnés l'espace infiniment petit du protoplasme, où ces rayons sont produits et le fait que les rayons ultraviolets sont très facilement absorbés par les substances organiques, il est possible que leur intensité soit trop faible et qu'ils ne puissent pas impressionner les plaques photographiques, même les plus sensibles. Cependant il pourrait arriver que, dans certains cas, par exemple dans les cellules ayant plus d'énergie vitale, ces rayons se manifestent par l'effet mitogénétique.

Le mouvement interne du protoplasme est la principale caractéristique de la vie. C'est probablement que le mouvement interne est un phénomène général du protoplasme vivant. Si on ne le voit pas toujours, c'est parce que le protoplasme est optiquement vide et on observe le mouvement seulement s'il entraîne des granulations ou d'autres corpuscules visibles.

D'après ce qu'on voit, les rayons de *P* sont très importants, car c'est à eux qu'est dû le processus même de la vie.

Il ne peut pas exister de protoplasme vivant seulement avec *C*, *H*, *O*, *N*, *S* sans *P*. Les rayons mitogénétiques, l'effet Gurwitsch représentent seulement un cas spécial.

Jadis la science donnait au *P* une attention plus grande qu'aujourd'hui. Au commencement du siècle passé on disait: „pas de phosphore, pas de pensée." Il est probable que dans l'avenir le *P* sera réhabilité et peut être qu'on le nommera „Biosphore".

Pour la médecine aussi l'étude des rayons du *P* peut avoir une

grande importance. Le fait que les rayons ultraviolets sont utilisés dans le traitement de beaucoup de maladies s'explique par leur pouvoir de pénétration dans l'organisme, augmentant l'énergie vitale du protoplasme en lui donnant un mouvement plus rapide. Leur emploi peut être d'une utilité optima puis leur bonne influence diminue, et ils deviennent parfois nocifs, ou même mortels.

Les rayons ultraviolets émis par le *P* peuvent difficilement arriver à une intensité si grande qu'ils deviennent nocifs, comme ceux donnés par divers appareils.

Puis les rayons émis par le *P* ont des longueurs d'onde semblables à ceux donnés par le protoplasme, tandis que ceux donnés par les appareils peuvent contenir des rayons de longueur d'onde nocive.

Ces rayons peuvent être obtenus plus facilement et à peu de frais; on a besoin seulement d'un vase de quartz, d'une certaine quantité de phosphite et d'eau oxygénée.

Peut être pourrait-on traiter avec plus de succès certaines maladies, comme par exemple le cancer, en utilisant les rayons émis par le *P*.

La connaissance de ces faits peut avoir de l'importance pour l'agriculture aussi. Il serait recommandable d'être plus attentif, quand on utilise les engrais de phosphore et de procéder avec grande économie.

Les engrais de *P* hâtent la maturité des plantes à cause de l'augmentation de l'énergie vitale.

Peut être serait-il indiqué d'améliorer les plantes agricoles en ce qui concerne le contenue en nucléoprotéides.

Lorsque ces faits seront clarifiés, un champ de recherches intéressant – surtout pour la Biologie et la Médecine – s'ouvrira.

Faculté d'Agronomie de
l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 31 Décembre 1947)

Travaux cités

1) Ces expériences ont été exécutées dans l'année 1943. M.me Natalie Melnic Netedu, – alors Assistante au Laboratoire de Chimie agricole, m'a aidé dans l'arrangement des expériences pour les photographies.

2) Vasiliu H. – *Ueber die molekulare Konfiguration der Eiweissstoffe.* Bulletin de la Faculté des Sciences agricoles de l'Université de Jassy. Comunicările Laboratorului de Chimie agricolă. Vol. III, 1940.

3) Gurwitsch A. – *Die mitogenetische Strahlung.* Springer, Berlin, 1932.
4) Spempell – *Die unsichtbare Strahlung der Lebewesen.* Fischer, Jena. 1932.
5) O. Rahn – *Invisible Radiation of Organismes.* Borntraeger, Berlin. 1935.
6) Lundegardh – *Die quantitative Spektralanalyse.* Jena, 1939. Pg. 12.
7) Gurwitsch – L. c. 67
8) Büscher – Wirkende Strahlen Stuttgart. 1941. Pg. 57.
9) Stempell – L. c. Pg. 26.
10) Outre les travaux cités nous mentionnons encore :
H. Vasiliu – Asupra configurației moleculare a materiilor alb. Comunicările Laboratorului de Chimie agricolă. Vol. I. Nr. 3, 1936.
H. Vasiliu. – Chimie agricolă. Vol. I. 1937. Pg. 23.

SYSTÈME HARMONIQUE DES ELEMENTS

par

C. G. BEDREAG

Quand la Chimie passa du stade *empirique* de l'époque des Arabes (640 - 1200), des Alchimistes (→ 1500), des Iatrochimistes (→ 1700), des Phlogististes (→ 1750), au stade évolué, scientifique, de la *Chimie expérimentale*, par suite des recherches du Physicien anglais Lord Cavendish 1766, du pharmacien suédois Scheele 1771, du chapelain Priestley 1771, et surtout du génial Physicien et Chimiste Lavoisier 1773, qui isolèrent et étudièrent, entre autres, le *H, O*, Eléments fondamentaux des fonctions acides et des bases ; puis *Cl, N*, Eléments des principaux sels (avec *S, P*), un commencement de Systématisation chimique fut alors possible ; et par la collaboration des chimistes français Lavoisier, Berthollet, Guyton de Morveau, Fourcroy s'élabora en 1787 la *Nomenclature* des acides, bases, sels et autres classes de combinaisons ; Nomenclature restée en vigueur - dans ses grandes lignes - jusqu'aujourd'hui.

Avec le XIX siècle, et surtout après la méthode Davy (1807-08) pour la séparation par électrolyse des métaux alcalins et alcalino-terreux, ainsi qu'après la découverte des halogènes *I, Br*, du *Se, Li, Cd* de nouveaux essais de Systématisation purent être entrepris ; par Thénard en 1813, quand il donna dans la première édition de son Cours de Chimie la Classification des Eléments en métalloïdes et métaux ; par Döbereiner en 1829 avec son groupement des Eléments par triades ; par le Physicien Ampère, qui discute en 1816 la Systématisation de son temps ; par le Chimiste Dumas, qui donna en 1840 une classification des métaux selon la température de décomposition de l'eau ; classification restée en vigueur dans l'école française jusqu'en 1900 (Troost) = 60 ans.

Dans la seconde moitié du XIX siècle, en 1862 Chancourtois remarque une répétition régulière = *périodicité* des propriétés des Alcalins, Alc. - terreux, des Halogènes, des Chalcogènes *S, Se, Te* ; et

en 1864 Newlands fixe cette périodicité à une Octave de 7 Eléments pour les premiers Eléments légers.

Un grand retentissement eut la Systématique du Chimiste et Physicien Mendelejef (1869-71), qui confirma d'abord la notion de *périodicité* du degré de valence des Eléments par rapport à leurs poids atomiques croissants ; et il fixe à 8 le degré de périodicité ; le 8-e rang étant réservé pour le groupe des triades du *Fe*, du *Pd*, du *Pt* ; 3 Eléments pour une seule place ; ce que l'expérience n'a pas vérifié dans la suite.

Mais l'apport principal, durable et définitif de Mendelejef fut d'avoir précisé pour les Eléments de la Chimie Anorganique la notion des *Familles homologues*, d'après la notion d'homologie constatée alors par Kekule pour la Chimie Organique.

Ainsi, par l'arrangement des Eléments d'après leur poids atomique croissant et en *tenant compte des propriétés d'homologie*, Mendelejef put prévoir des Eléments qui manquaient alors dans la troisième rangée de périodicité ; c'étaient l'Eca-Bore, Eca-Al, Eca-Si ; qui furent en effet découverts entre 1875-85 comme le *Sc, Ga, Ce* ; et marquèrent à ces dates *l'apogée* du Système périodique de Mendelejef et de son tableau à 8 colonnes, chargées des Hauptgruppen et des Nebengruppen.

A la même époque et en parallèle, le Chimiste Lothar-Meyer de Breslau (1868-70), le Physicien Rydberg de Lund 1888, le grand Physico-Chimiste Julius Thomsen de Copenhague 1839-94, en examinant la suite des propriétés physiques du volume atomique, des points de fusion, d'ébullition, ... constatèrent qu'une seconde période 18 Eléments est indiquée par ces propriétés à partir des Eléments à poids atomique moyen ; périodicité inscrite en effet dans les tableaux Werner-Pfeiffer de 1902, et vérifiée plus tard -1926-, après la découverte de la constitution électronique précise de tout les Eléments.

Car à l'époque mème de 1875-1885, quand on découvrait les *Ga*, *Sc*, *Ge*, qui confirmaient avec éclat les prévisions homologiques de Mendelejef, on découvrait en parallèle 7 terres rares, *Yb*, *Sm*, *Ho*, *Tu*, *Gd*, *Pr*, *Dy*, qui ne trouvaient point leur juste place dans les Tableaux Mendelejef, confinés arbitrairement au nombre restreint de 8 colonnes ; et quand on découvrit entre 1894-98 les 6 gaz rares, on dut leur assigner une colonne nouvelle, spéciale, la colonne d'ordre *0*.

Le tableau des Eléments à 8 colonnes devait être nécessairement remplacé par des tableaux à 18 colonnes selon Lothar-Meyer, Jul. Thomsen, Werner-Pfeiffer.

Une crise était donc survenue pour le problème de la Systématique des Eléments au commencement du siècle actuel XX-e ; crise nettement dénoncée par Hollemann dans son Handbuch der Anorg. Chemie de 1900.

Pourtant, la crise a duré longtemps, avant d'avoir pris fin, par suite de la vogue du Système de Mendelejef de 1885 : par suite du manque de nouvelles expériences se reportant directement à ce problème ; expériences qui ne survinrent qu'en 1913 avec Moseley.

En effet, après les recherches mémorables du jeune Physicien Moseley (1913-1914), de l'Ecole Rutherford de Manchester, sur le nombre atomique *Z*, qui devait remplacer les poids atomiques de Mendelejef, recherches qui ouvraient la voie aux Physiciens de s'occuper de ce problème nouveau pour leur Discipline ; après les recherches sur les séries spectrales de Bohr (1913) et de son Ecole de Copenhague (1918-1927), de Pauli 1925, de l'Ecole Sommerfeld de München (1918-1927), une nouvelle Systématique s'élabore petit à petit, passant par les stades intermédiares de Système Physique (1924), Système électronique (1927), Systématique naturelle des Eléments (1933) ; pour prendre enfin la forme définitive et fondamentale sous l'aspect du „*Système harmonique des Eléments*" que nous donnons dans le Tableau qui suit.

Nous nous occupons en effet du problème de la Systématique des Eléments, en rapport successif avec les faits nouveaux de l'expérience, depuis 1916 quand nous avons déterminé la place naturelle des terres rares comme une colonne nouvelle, spéciale, différente des autres colonnes et familles homologiques habituelles ; ce qui a constitué notre premier stade dans ce problème.

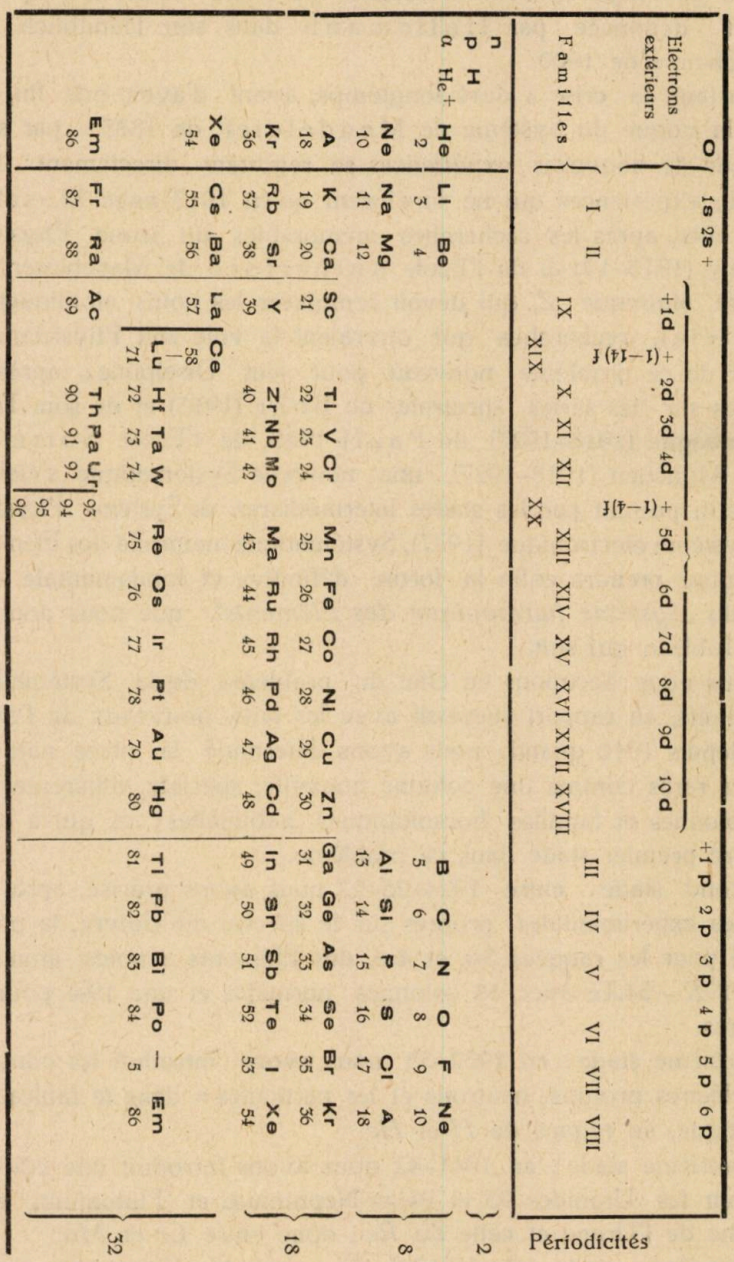
Second stade : entre 1924-25-27 nous avons précisé, après des recherches expérimentales propres sur le spectre du Cuivre, la périodicité 18 pour les rangées 3-e et 4-e, des Eléments a poids atomique moyen, 19*K* - 54*Xe* avec 18 colonnes normales et une 19-e pour les terres rares.

Troisième stade : en 1932-35 nous avons introduit les constituants nucléaires protons, neutrons et les particules α dans le tableau de Systématique, en regard de *H* et *He*.

Quatrième stade : en 1941-42 nous avons introduit une 20-e colonne pour les Uranides 93 et 94 = Neptunium et Plutonium, entre la colonne de l'Urane et celle du *Re* ; donc entre *Cr* et *Mn*.

Cinquième stade-actuel (1946-47) ; après la découverte expérimentale des nouveaux Uranides 95,96 - l'Américium et le Curium de Seaborg - Berkeley, nous avons établi que la nouvelle colonne

20-e des 4 Uranides 93-96 à électrons *f*, répète la colonne des terres



rares et imprime à l'ensemble de la Systématique un caractère expérimental clos, fondamental, harmonique et définitif.

Nous allons examiner de plus près ces multiples aspects de la Systématique des Éléments dans les paragraphes suivants :

Séparation successive des Éléments chimiques (aspect expérim.),

Les Étapes successives de la Systématique (interprétation),

La notion scientifique de l'harmonie = HARMONICES MUNDI,

L'Harmonie dans la Systématique ou SYSTÈME HARMONIQUE DES ÉLÉMENTS,

Philosophiae naturalis Principium experimentale (aspect fondam., définitif),

Rectification de certaines malentendus se reportant à la Systématique.

I. SEPARATION SUCCESSIVE DES ELEMENTS CHIMIQUES

A. **Les Etapes de la Chimie empirique** (—> 1750); 17 Éléments.

Les Anciens (—► 640) ont connu 9 Éléments :

1, 2. *Au, Ag* à l'état natif; depuis le néolithique
3, 4. *Cu, Sn* depuis l'époque du bronze
5, 6. *C, Fe* „ „ „ fer
7, 8, 9. *S, Pb, Hg* dans la période historique.

Les Arabes (640-1200) ont connu bien des combinaisons et substances chimiques; Geber cite vers 750 les vitriols = Sulfates, les Aluns, le Natron, Al-kali, Borax, Salpètre, acide nitrique, l'eau régale; l'Orpiment, Réalgar, Calamine; *HgO;* sels du *Co, Mn* dans les vitres; *mais aucun Elément nouveau.*

Les Alchimistes (—> 1550); ont découvert 3 Élém.

10. 1250 *As* Albert Magnus de Bollstaedt, Évêque de Ratisbonne.
11. 1450 *Sb* Basile Valentinus, Bénédictain d'Erfurth et de Cologne.
12. „ *Bi* „ „ et J. Agricola 1520.

Les Iatrochimistes (— > 1700); ont découvert 2 Élém.

13. 1560 *Zn* Paracelsus, Pharmacien de Genève.
14. 1668 *P* Brand „ „ Hamburg.

Les Phlogististes (—► 1750); ont découvert 3 Élém.

15. 1735 *Co* Brandt - Suédois.
16. 1744 *Pt* Wood; et Watson en 1754.
17. 1751 *Ni* Cronstedt - Suédois; en tout 17 Éléments.

B. **La Chimie Expérimentale** (1766 - 1800); 15 Élém. nouveaux.

18.	1766	*H*	Lord Cavendish.
19.	1771	*HF*	Scheele - Pharmacien Suédois.
20.	1771	*N*	D. Rutherford; 1772 Scheele.
21.	1774	*Cl*	Scheele.
22.	„	*O*	Priestley-Capelan; 1776 Lavoisier.
23.	„	*Mn*	Scheele; et Gahn - Suède, 1774.
24.	1781	*W*	Scheele; Elhuyar - Espagne
25.	1782	*Mo*	Hyalmar - Suède.
26.	„	*Te*	Klaproth - Berlin; dans les minerais d'or de Transylvanie.
27.	1787	*Zr*	Klaproth - dans les terres de Suède.
28.	1789	*U*	„
29.	1795	*Ti*	„
30.	1794	*Y*	Gadolin, dans les terres suédoises.
31,32.	1797	*Cr,Be*	Vauquelin à Paris; total 32 Élém. isolés.

C. **XIX Siècle-jusqu'à Mendelejef** 1869; on découvre 32 Élém. nouveaux:

33.	1801	*Nb*	Hatchett; et Ekeborg - Suède.
34.	1802	*Ta*	Ekeborg.
35.	1803	*Ce*	Klaproth; dans les terres.
36,37.	1803	*Rh,Pd*	Wollaston - Londres.
38,39.	1804	*Os,Ir*	Tennant - „
40,41.	1807	*Na,K*	Davy - Royal Institution; par Électrolyse.
42,43.	1808	*Mg,Ca*	„
44,45	1808	*Sr,Ba*	„
46.	1808	*B*	Gay-Lussac et Thénard; par Na.
47.	1811	*I*	Courtois; et Gay-Lussac 1813.
48.	1817	*Li*	Gmelin - Allemagne; Élève de Berzelius.
49.	„	*Cd*	Strohmayer.
50.	„	*Se*	Berzelius - Élève de Gahn.
51.	1882	*Si*	„
52.	1828	*Th*	„ dans les sables Monazitiques.
53.	1826	*Br*	Balard - Paris.
54.	1827	*Al*	Wöhler - Allemagne; Élève de Berzelius.
	1829		*Döbereiner et ses triades;* **54 Élém. connus;**
55,56.	1839	*La,Di*	Mosander - Suède; Élève de Berzelius.
57,58.	1843	*Er,Tb*	„
59.	1845	*Ru*	Claus à Dorpat et à Kasan.

60,61. 1860/1 *Cs,Rb* Kirchhoff - Heidelberg; par le spectre.
62. 1861 *Tl* Crookes - Londres „ „ „
63. 1863 *In* Richter, d. minerais Zn; „ „ „
64. 1867 *Va* Roscoe.
1869/1871 Mendelejef; 64 Éléments connus.

D. **Après Mendelejef juspu'à 1898**; 24 Élém. nouveaux.

65. 1875 *Ga* Lecoq de Boisbaudran à Cognac - France; d. les minerais de Zn.
66. 1878 *Xb* Marignac - Genève.
67. 1879 *Sm* Baudran.
68,69. 1879 *Ho,Tu* Cleve - Suéde.
70. 1879 *Sc* Nilson - Suède.
71. 1880 *Gd* Marignac
72. 1885 *Pr* Auer v. Welsbach - Vienne.
73. 1885 *Ge* Winkler
74. 1886 *Dy* Baudran
„ *F* Moissan, par Électrolyse.
75. 1896 *Eu* Demarçay.
76. 1895 *A* Ramsay et Lord Rayleigh; par densité de l'Azote.
77,78. 1897 *Kr,Xe* Ramsay par fractionnement de l'air liquide.
79,80. 1898 *Ne,He* „ „ „

E. **Radioactivité**; *XIX Siècle jusqu'à 1946.*

81. 1898 *Po* Marie Curie, à l'École de Physique, Ville de Paris. „ „ „ „ „ „
82. 1899 *Ac* Debierne „ „ „ „
83. 1900 *Ra* Pierre et Marie Curie „ „
84. 1900 *Em* E. Rutherford - Canada; Dorn Halle.
85. 1907 *Lu=Cp* Urbain-Paris et Auer v. Welsbach.
86. 1918 *Pa* Otto Hahn, Berlin-Dahlem.
87. 1922 *Hf* Hevesy, Coster à Copenhague.
88. 1925 *Re* Noddak.
89,90. 1941 *Np,Pu* McMillan et Abelson à Berkeley; par Synthèse.
91,92. 1945 *Am,Cm* Seaborg à Berkeley.

Donc		Éléments =	Métaux +	Métalloïdes +	Gaz rares
A. Les Anciens ont connu		9 =	7 +	2	
La Chimie empirique	→ 1750	17 =	11 +	6	

B. La Chimie Expérimentale	→	1800	32	=	20	+	12		
C. „ „ „ XIX Siècle	→	1829	54	=	37	+	17		
„ „ „ „ „	→	1869	64	=	47	+	17		
D. „ „ „ „ „	→	1898	80	=	58	+	17	+	5
E. Radioactivité, XX-e Siècle	→	1946	92	=	68	+	18	+	6
Éléments présumés			4	=	3	+	1		—
Éléments connus + présumés; Total			96	=	71	+	19	+	6.

Les Éléments présumés correspondent aux Nombres atomiques 43, 61, 85, 87 [1]).

II. L'APPORT SYSTÉMATIQUE DES GRANDES ÉTAPES

Nous allons relever ce qui est resté définitif pour la Systématique actuelle, en partant des grandes Étapes esquissées antérieurement.

1787. La Nomenclature de Lavoisier est, dans ses grandes lignes, en usage aujourd'hui.

1813. *Les Métalloïdes.* La classification de Thénard en Métaux et Métalloïdes, est désuète aujourd'hui; elle peut rester dans les Cours préparatoires, en réminiscence de la tradition historique et pour les facilités expérimentales des commençants.

Nous esquissons ici la place des Métalloïdes dans la Systématique actuelle; ce sont des Éléments à électrons **p**; mais pas tous les Élém. **p**.

		1p	2p	3p	4p	5p						
2 s	+	B	C	N	O	F	=	5		Elém. M-des		
10d	+		Si	P	S	Cl	=	4		„		
„	+			As	Se	Br	=	3		„		
„	+			Sb	Te	I	=	3		„		
„	+			Bi	Po	85	=	2	+	1 présumé	+	H
				Total				17	+	1	+	1 = 19.

Le reste des Eléments à électrons **p** sont des *Métaux amphotères.*

1829. *Les Triades.* Parmi les triades entrevues par Döbereiner sur les 54 Eléments connus de son temps, sont restées viables 2 triades métalliques: les Alcalins Li Na, K; les Alcalino-terres Ca, Sr, Ba; puis 3 triades métalloïdiques: les Halogènes Cl, Br, I; et les Chalcogènes S, Se, Te; As, Sb, Bi. Comlétées aujourd'hui en 5 familles homologues à 6, resp. 5 Eléments.

1) Ces Éléments ont été obtenus n quantité mesurable dans les produits de désintégration de l'Urane 235 et du Plutonium 239. (Mai 1948).

1840. *Les Métaux.* La classification des métaux selon Dumas et Thénard n'a plus de sens aujourd'hui quand on connaît leur structure électronique précise ; pour les cours préparatoires, la classification suivante est avantageuse ; elle se trouve dans le grand Traité de Van Arkel et représente un compromis entre les propriétés purement chimiques-bases, acides, amphotères - et leur structure électronique.

1. Les Alcalins, *bases les plus fortes* 1—v, v = valence.
2. Les Alc. terreux, *bases fortes* 2—v.
3. Les *basiques 3—v ;* Sc, La, Y, Ac.
4. Les *Terres rares basiques* 3, 4—v.
5. Les Terres *basiques 4—v ;* Ti, Zr, Hf, Th.
6. Les Terres *acides* 5—v ; V, Nb, Ta, Pa, au maximum des valences.
7. Les Métaux *acides* 6—v ; Cr, Mc, We, U „ „ „ „
8. Les *Uranides acides* 6—v ; 93, 94, 95, 96, et 4—v ; 3—v
9. Les Métaux *acides* 7—v ; Mn, - , Re.
10. Les Métaux *usuels basiques ;* Fe, Co, Ni.
11. Les „ *nobles basiques ;* Ru, Rh, Pd.
12. „ *nobles amphotères ;* Os, Ir, Pt.
13. „ *nobles basiques ;* Cu, Ag, Au.
14. „ *fusibles basiques ;* Zn, Cd, Hg.
15. *Terres amphotères* 3—v ; Al, Ga, In, Tl.
16. Métaux *amphotères* 4—v ; Ge, Sn, Pb.

1869. Les *Familles homologues.* Parmi les 64 Eléments connus du temps de Mendelejef on pouvait grouper déjà 12 familles homologues complètes : 5 familles parmi les Hauptgruppen ; ce sont les 5 triades de Döbereiner citées plus haut ; plus 7 familles métalliques parmi les Nebengruppen, les N-os 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14 du tableau ci-dessus des Métaux.

5 familles étaient incomplètes et contenaient les Eléments *prévus Sc, Ga, Ge,* découverts du temps même de Mendelejef ; plus *Hf Re* découverts plus tard. Ce sont les familles 15, 16, du tableau précédant, parmi les Hauptgruppen ; les N-os 3, 5, 9 parmi les Nebengruppen.

Au total 17 familles homologues ; les suivantes jusqu'à 20 seront les Gaz rares, les Terres rares, les Uranides.

1898. Les *Gaz rares.* Quand les 5 gaz rares ont été isolés et identifiés, on leur a assigné une colonne spéciale d'ordre 0, selon leur caractère chimique inerte et leur capacité nulle de combinaison. Ils constituent la 18-e famille homologue.

1914. Les *Nombres atomiques Z* remplacent les poids atomiques comme repère pour la Systématique ; les Physiciens s'y mêlent.

1916. Les *Terres rares*. Nous avons établi une colonne spéciale pour la famille homologue des terres rares ; ce sera la 19-e colonne à électrons *f*.

1922. Les *Electrons spectraux*. Par une interprétation judicieuse des spectres de doublets, triplets des Alcalins et Alc. - terreux, ainsi que du spectre de l'*Al*, Niels Bohr a pu déterminer la qualité quantique **s, p** des électrons spectraux de ces Eléments ; les spectres complexes interprétés par Sommerfeld et Hund (1923-1925) ont pu déterminer les électrons **d** pour d'autres Eléments.

1925. Le *Principe de Pauli* sur le nombre d'électrons qui peuvent occuper les niveaux quantiques **s, p, d, f,** α fixe le nombre des Elements à : 2**s**, 6**p**, 10**d**, 14**f** ; qui se sont trouvés exactement vérifiés par l'expérience.

La systématique des Eléments pouvait dès lors s'acheminer vers un état définitif.

1926-1928. Les 19 *Colonnes*. C'est dans ce sens, et après des recherches expérimentales sur le spectre complexe du cuivre, que nous avons fixé dans les tableaux de Systématique les 18 colonnes normales 2**s** + 6**p** + 10**d** plus la 19-e des terres rares.

1933. Les *Constituants nucléaires*. Par extrapolation, nous avons pu inscrire au commencement du tableau de Systématique les Constituants nucléaires, protons **p** et neutrons **n**, qui dérivent du H^+ ; ainsi que les particules $\alpha = He^{++}$.

1942-1946. *Les Uranides*. La 20-e colonne que nous avons attribuée en 1942 aux Uranides 93,94 = Neptunium et Plutonium, a pu recevoir de la façon la plus normale les Uranides suivants 95, 96 de Seaborg 1945 = Americium et Curium.

En même temps, cette répétition de la colonne 20-e à électrons f_5 a été pour nous le point de départ pour l'interprétation actuelle du *Système harmonique des Eléments*.

III. LA NOTION SCIENTIFIQUE DE L'HARMONIE [1]
ou „Harmonices Mundi"

La Systématique des Eléments prend depuis 1930 la place de premier Chapitre fondamental dans les Traités systématiques de Chimie Anorganique : H. Rémy, Hambourg 1930-1942, Van Arkel

1) Pour garder une intégrité à la présente Note, nous résumons ici un chapitre „Harmonices Mundi" d'une Note antérieure parue dans le Bull. Sc. Ac. Roum. XXX, 1947, p. 1. ; Note d'un caractère physique, plus restreint.

Hollande 1939; depuis 1922 déjà, elle est analysée et interprétée dans le chapitre „Atombau" des traités de Physique théorique et expérimentale; ainsi que dans les traités de Chimie Physique ou théorique. Trois domaines de la science de la nature = „*Natural Philosophy*" selon la conception anglaise; et dont les domaines théoriques prêtent à cette Systématique un caractère mathématique, arithmétique, simple, définitif et harmonique.

En effet, c'est à plusieurs reprises que divers domaines de la Science offrent aux chercheurs un *aspect harmonique*, quand on leur a découvert la *solution finale, définitive*. Ainsi, les Harmonies du son; l'Harmonie céleste; l'Harmonie spectrale; les lois élémentaires des combinaisons chimiques; l'Harmonie en Analyse Mathématique.

Les intervalles des arpèges musicaux $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2$; les autres intervalles de la gamme harmonique $\frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{6}{5}, \frac{15}{8}$; les vibrations des harmoniques = $2, 3, 4, 5, \ldots \times$ vibrations du son fondamental; le principe des quanta $m.\,v.\,a = n.\frac{h}{2\pi}$ ($m.\,v.\,a$ = mouvement de la quantité de mouvement, h = constante des quanta);

les séries spectrales (λ, R = grandeur et constante spectrales)

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{{n_1}^2} - \frac{1}{{n_2}^2}\right) \qquad n_1, n_2 = 1, 2, 3, 4, \ldots;$$

les lois fondamentales de Gay-Lussac et Dalton, des combinaisons en proportions simples, ou multiples, $1:2:3:4:5$; partout des fonctions de la suite des nombres entiers.

En plus, les fonctions harmoniques, intégrales de l'équation de Laplace, ce sont des fonctions conjuguées de $(x \pm iy)$, orthogonales.

Le terme harmonie, harmonique équivaut à des notions simples, concrètes, naturelles; et à des expressions aussi simples, arithmétiques, symétriques, conjuguées analytiques.

IV. CARACTÈRES HARMONIQUES DE LA SYSTÉMATIQUE DES ELEMENTS

1. **Les niveaux d'Energie.** Pour une trajectoire électronique d'ordre quantique n on a, selon Bohr, 1913-1914

(1) $$E(n) = \frac{\text{const}}{n^2} = \text{inverse } n^{-2}; \text{ donc } E_1 > E_2 > E_3 > E_4 .$$

Pour les trajectoires elliptiques de Sommerfeld 1916, $E(n, k)$ avec $k \leq n$, on a

$$E(n, k) = \frac{\text{const}}{n^2} + \frac{\text{const}'}{n^4}\left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4}\right) ; \quad \text{c'est-à-dire}$$

à $n = \text{const}$, variation $E(k)$ inverse de k ; donc

(2) $$E(n,1) > E(n,2) > E(n,3) > E(n,4)$$

avec $k = 1, 2, 3, 4,$

$= \mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{d}, \mathbf{f},$ notat. spectrales

où $l = 0, 1, 2, 3 ; \; l = k - 1$

et pour n et k variables à la fois, on aura pour les k,

avec $n = 1, 2, 3, 4,$

$n = 1$;	$n = 2$;	$n = 3$;	$n = 4$
$k = 1$	$k = 1, 2$	$k = 1, 2, 3,$	$k = 1, 2, 3, 4$
ou $k = \mathbf{s}$	$= \mathbf{s}, \mathbf{p}$	$= \mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{d},$	$= \mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{d}, \mathbf{f},$

les niveaux énergétiques $E(k,n)$ établis plus haut (1), (2) prennent la forme

(1′) $k = \text{const}, \; n = \text{var. } 2, 3, 4 \qquad E_{s_2} > E_{s_3} > E_{s_4}$

(2′) $n = \text{const}, \; k = \text{var. } \mathbf{s}\ \mathbf{p}, \mathbf{d}, \mathbf{f}, \quad E_{s_2} > E_{p_2} ; \mid E_{s_3} > E_{p_3} > E_{d_3} ; \mid$

$$E_{s_4} > E_{p_4} < E_{d_4} > E_{f_4}.$$

2. **Principe de Pauli**. Un niveau électronique donneé n, k, ou n, l ne peut être occupé par deux électrons ayant les 4 nombres quantiques n, l, σ, m, identiques où $\sigma = \pm {}^1/_2 =$ moment de spining de l'électron ; $m =$ moment dans un champ magnétique $l > m > -l$; on a ainsi

2 électrons sur une trajectoire
$\mathbf{s}$; $\sigma = \pm {}^1/_2$; $m = 0$

6 électrons sur une trajectoire
$\mathbf{p}$; $\sigma = \pm {}^1/_2$; $m = 1, 0, -1$

10 électons sur une trajectoire
$\mathbf{d}$; $\sigma = \pm {}^1/_2$; $m = 2, 1, 0, -1, -2$

14 électrons sur une trajectoire
$\mathbf{f}$; $\sigma = \pm {}^1/_2$; $m = 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3.$

Appliqué à la Systématique des Eléments, ce Principe fait cor-

respondre à chaque électron des différentes trajectoires **s, p, d, f**, un Elément différent ; donc on aura

(a)
$$\begin{cases} 2 \text{ Elém. à Energie } E_s, \text{ ou } 2 \text{ Elém, } \mathbf{s} = 2\,\mathbf{s} \\ 6 \text{ " " " } E_p, \text{ " } 6 \text{ " } \mathbf{p} = 6\,\mathbf{p} \\ 10 \text{ " " " } E_d, \text{ " } 10 \text{ " } \mathbf{d} = 10\,\mathbf{d} \\ \quad \text{ou } N(l) = 2.(2l+1) \\ 14 \text{ Elém. à Energie } E_f, \text{ ou } 14 \text{ Elém, } \mathbf{f} = 14\,\mathbf{f}. \end{cases}$$

Alors le nombre des Eléments dont les derniers électrons suivent tous les niveaux $E(n, k)$ possibles pour $n = 1, 2, 3, 4$ et $k \leq n$ sera pour

(b)
$$\begin{cases} n=1 \quad k=1 \quad N(n) = 2s = 2 \text{ Elém.} \\ n=2 \quad k=1,2 \quad 2s+6p = 8 \text{ "} \\ n=3 \quad k=1,2,3 \quad 2s+6p+10d = 18 \text{ "} \\ n=4 \quad k=1,2,3,4 \quad 2s+6p+10d+14f = 32 \text{ "} \\ \quad \text{ou } N(n) = 2.n^2. \end{cases}$$

Les 2 séries de nombres $N(l) = 2, 6, 10, 14$
$N(n) = 2, 8, 18, 32$ correspondent à 2 relations simples, *les lois de Pauli* :

a) $N(l) = 2.(2l+1)$ Eléments qui peuvent occuper un niveau $E(l) = E(k)$,

b) $N(n) = 2.n^2$ Eléments qui peuvent occuper un niveau intégral $E(n)$.

Le facteur 2 des expressions ci-dessus provient du fait que le moment rotatoire = spining de l'électron spectral peut prendre 2 positions différentes sur la trajectoire : directe ou anti ; si l'on prend alors la moitié des nombres $N(l)$ ou $N(n)$ donc

$$\begin{pmatrix} 2l+1 \\ n^2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1, 3, 5, 7 \text{ suite des nombres impairs} \\ 1, 4, 9, 16 \text{ suite des carrés des premiers nombres} \end{matrix}$$

et aussi

$(1+3+5+7)$ ou somme des nombres impairs consécutifs
$1 \quad 4 \mid 9 \mid 16 \mid$ = carrés des premiers nombres entiers $1^2 - 4^2$.

3. **Théorème de Pythagoras.** Les deux expressions (a), (b) des lois de Pauli sons les conséquences d'un seul théorème, *le théorème Pythagoricien de l'Arithmétique et premier théorème de la théorie des Nombres :*

„la somme des nombres impairs consécutifs est = les carrés des premiers nombres entiers",

C'est la loi fondamentale de la Systématique naturelle des Eléments : c'est une loi simple, Pythagoricienne, harmonique, qui imprime le caractère harmonique à cette Systématique et la fait évoluer en un *Système harmonique des éléments.*

4. **Succession naturelle des niveaux d'Energie.** Pour $n = 1$ on a les 2 premiers Eléments aux Nombres atomiques 1 et 2, et à structure électronique *1s, 2s.* S'il n'y a pas de rangée qui les répète, *H* et *He* ont des rapports avec les constituants nucléaires protons **p** et neutrons **n**, ainsi qu'avec les partiques α, selon le schéma ci-après :

Nombres atomiques *Z*	Eléctr. spectraux
	0 0 1 2
0	*n*
1	$p = H^+$ *H*
2	$\alpha = He^{++}$ He^+ . *He*

Ensuite on a 2 Elém. *s* + 6 Elém. *p*

pour $n = 2$	*3 4*	*5 6 7 8 9 10*		période 8
	Li Be	*B C N O F Ne* = 8 Elém.		
	11 12	*13 14 15 16 17 18*		
„ $n = 4$	*Na Mg*	*Al Si P S Cl A* = 8 „		

ce qui est normal jusqu'ici ; et l'on voit ainsi apparaître les 2 premières suites à 8 Eléments, et la périodicité 8.

Pour aller plus loin, on devrait continuer à inscrire le reste des Eléments à $n = 3$, dont 10 Elém. *d*, les *19, 20, 21,..* = *K, Ca, Sc,..*

Mais le spectre de *K, Ca* montre des électrons **s** ; les réactions analytiques rangent le *K* et *Ca* parmi les familles homologues des Alcalins et Alc. - terreux ; déjà pour $n = 3$ la suite idéale **s, p, d** est interrompue par les Elém. *19 K* et *20 Ca*, qui apparaissent comme des Elém. **s.**

Ici apparaît un premier paradoxe de la Systématique des Eléments, qui a le plus contrarié : sa diffusion prompte et correcte ; nous allons élucider ici ce paradoxe-apparent, car il est assez étrange de constater comment un fait établi de façon précise par Bohr en 1923 ne puisse s'encadrer d'une façon définitive - après 20 ans - dans les meilleurs traités de spécialité.

5. **Un paradoxe apparent de la Syst. des Elém ; Störende Wirkung.** Nous avons donné plus haut les relations (1), (2) entre les niveaux d'Energie

$$E_{s_3} > E_{s_4}$$
$$E_{s_3} > E_{p_3} > E_{d_3} ; \quad E_{s_4} > E_{p_4} > E_{d_4} > E_{f_4}$$

mais nous n'avons indiqué aucune relation entre E_{d_3} et E_{s_4} ; pour le cas d'un seul électron spectral, ou pour des niveaux du même paramètre k on a

$$E_{s_1} > E_{s_2} \text{ ainsi que } E_{p_2} > E_{p_3} ; \; E_{d_3} > E_{d_4} ;$$

mais dans le cas de plusieurs électrons, dont les trajectoires se pénètrent et s'embrouillent, on se trouve devant un problème des n corps de l'Astronomie et des actions perturbatrices – *störende Wirkungen* – du Système du monde ; pour le résourdre d'une façon concrète, on doit faire appel aux réalités ; qui sont ici les données spectrales ; et qui montrent pour 19 K et 20 Ca des électrons spectraux **s** et des niveaux d'Energie ou Termes

$$E_{s_4} > E_{d_3} > E_{p_4} \text{ pour K, Ca dans la 3-e rangée d'Elém.}$$
$$E_{s_5} > E_{d_4} > E_{p_5} \text{ „ Rb, Sr „ „ 4-e „ „}$$

nous aurons donc les suites

$E_{s_4} >$		$E_{d_3} >$		E_{p_4}		
19	20 ; 21 22	30 ; 31	32	36		
K	Ca Sc Ti	Zn	Ga Ge	Kr = 18	Elém.	}
37	38 ; 39 40	48 ; 49	50	54		} périodicité 18
Rb	Sr Y Zr	Cd	In Sn	Xe = 18	„	}

ainsi apparaissent les 3-e et 4-e rangées avec 18 Eléments et la périodicité 18.

Pour les rangées suivantes, 5-e et 6-e, on constate

$$E_{s_6} > E_{d_5} > E_{f_4} > E_{d_5} > E_{p_6}$$

53 56 ; 57 ; 58Ce
Cs Ba La 59Pr
60Nd
:
71 ; 72 . . . 80 ; 81 . . . 86
Lu Hf Hg Tl Em

de même

$$E_{s_7} > E_{d_6} > E_{f_5} > E_{d_6}$$

87 88 ; 89 90 91 92 ; 93 Np
94 Pu
95 Am
96 Cm

On constate ainsi 3 inversions entre les niveaux d'Energie E_s, E_d ; E_f 1) avec les K → Sc et leurs homologues ; 2) pour les terres rares ; 3) pour les Uranides. Elles sont dues aux perturbations produites par l'entre-pénétration des trajectoires électroniques ; elles sont réelles, et par *leur répétition* elles contribuent au caractère général de *périodicité et d'harmonie* de la Systématique des Eléments.

6. **Ionisation spectrale et Ionisation électrolytique.** Nous donnons dans le tableau ci-après, pour le groupe des Elém. de la 3-e rangée, les degrés de multiplicité spectrale d'un côté, les degrés de valence d'un autre côté, pour examiner où la marche est la plus régulière, la plus harmonieuse.

T A B L E A U

	2s	2s+										
Electrons spectraux	—	1d	2d	3d	4d	5d	6d	7d	8d	9d	10d	
	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	
							—4d	—3d	—2d	—1d		jusqu'à 10d
Multiplicité du Spectre complexe	3	4	5	6	7	8	7	6	5	4	3	
	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	
			1	2	3	4	3	2	1			
			Mult. croissante →				← Mult. décroissante					
Degrés de Valence acide						7						Réactions acides
					6	6						
				5	—	—						
			4	4	4	4	4	4	4			
Ionisation électrolytique		3	3	3	3	3	3	3	3			Réactions basiques
	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	
		Terres basiques				Métaux Acides			Usuels			

Ces deux phénomènes sont conséquences, l'un de l'ionisation spectrale, l'autre de l'ionisation électrolytique ; on remarque facilement la régularité de variation de la multiplicité spectrale et la symétrie de cette variation par rapport au maximum 8 de la multiplicité du Mn ; par contre, si l'on remarque une certaine régularité dans la variation

ascendante du maximum de valence de 2 — 7 = Ca — Mn, la variation descendante n'est pas régulière, ni symétrique.

Les avantages sont pour la régularité spectrale, qui est fondamentale, précise, symétrique et harmonique.

Au point de vue analytique, les valences supérieures à 4, surtout 5, 6, 7, montrent des réactions acides prononcées ; les valences inférieures 2, 3 manifestent des réactions basiques utilisées dans l'Analyse chimique ; mais nous allons voir tout de suite que ces réactions analytiques ne conduisent pas à une différentiation de familles homologues bien nettes.

7. **Second paradoxe de la Syst. des Elém. ; Réactions de la Chimie Analytique.** Si nous notons par 1 — 8 les opérations successives de la Chimie Analytique classique, (Am = ici Ammonium NH_4).

1. précipité par H Cl : Ag, Hg, Pb ; Si ,
2. „ „ H_2S ; ins. Am_2S : Hg, Pb, Bi ; Cu, Cd ; Ru, Rh, Pd ; Os ,
3. précipité par H_2S ; sol. Am_2S : Au, Pt, Ir ; Ge, Sn ; As, Sb ; Mo, W ; Se, Te ,
4. précipité par Am_2S ; Sulfures Zn, Mn ; Fe, Co, Ni ; Ga, In, Tl ; Ur, V,
5. précipité par Am_2S ; Hydrates Cr, Al ; Be ; Sc, Y, La ; Ti, Zr, Th ; Nb, Ta ; terres rares,
6. précipité par CO_3Am_3,
7. „ „ Phosphate,
8. Alcalins solubles,

et que nous placions ces nombres à la place des Eléments respectifs dans le tableau de la Systématique harmonique page 320.

Alc. A — t

8 5
8 7
8 6 5 — 5 4 5 — 4 4 4 4 2 4 — 5 1
8 6 5 — 5 5 3 — — 2 2 2 1 2 — 4 3 3 3
8 6 5 — — — — — — — — — — — 4 3 3 3
/5 — 5 5 3 — 2 2 3 3 3 2 — 4 2 2
6 5 — 5 4 4

Nous constatons des familles analytiques complètes : les Alcalins, les teres 3—v, les terres rares, les terres 4—v ; puis les triades du Fe, Co, Ni ;

Ru, Rh, Pd; des familles analytiques incomplètes, les Alc.-terreux Ca, Sr, Ba; les terres amphotères Ga, In, Tl. Tous les autres montrent des divergences notables; Al séparé de ses homologues naturels, qui sont le groupe du Ga; Ag séparé de ses homologues naturels Cu, Au; et sans que ceux-ci paraissent rattachés à des groupes voisins; sauf peut-être Au, rattaché au Pt, Ir.

La notion d'homologie est ici sans portée; car la Chimie Analytique cherche les réactifs qui séparent, qui différencient les Eléments et évite ceux qui les approchent; c'est tout le contraire pour une Systématique générale, qui accentue sur les propriétés communes, qui approchent les Eléments, de façon à avoir le moins possibles de classes différentes, de familles vraiment homologues. C'est là le but de la Systématique harmonique.

V. PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIUM EXPERIMENTALE

Cet énoncé, où nous attribuons au terme *Principe* le sens d'un fait naturel, fondamental, cet énoncé donc implique une relation soutenue entre l'*Expérience* continue, son interprétation adéquate et un domaine plus vaste, le domaine de la *Philosophie Naturelle*, selon l'Ecole Anglaise.

Nous allons analyser si ces conditions sont remplies par le *Système Harmonique*, tel que nous l'avons défini dans les pages précédentes.

Or, nous nous sommes appuyé toujours sur les données de l'expérience, depuis la séparation des Eléments de leurs combinaisons naturelles, jusqu'à la connaissance de leur structure électronique et à leurs propriétés spectrales, électrolytiques, analytiques.

La domaine que nous avons embrassé est celui de la Physique Expérimentale et Théorique, de la Chimie Physique et théorique, donc assez étendu; pourtant nous l'avons étendu jusqu'à l'Analyse Mathématique par le Théorème Pythagoricien simple, arithmétique, qui est à la base de notre Systématique.

Il nous reste à justifier le caractère de Principe fondamental que nous lui attribuons. Pour cela, le Système Harmonique doit remplir un supplément de conditions:

Indiquer des *prévisions* expérimentales ou théoriques,

Rectifier des données courantes, des anomalies, des erreurs,

Indiquer des *précisions* pour de nouvelles recherches,

Faciliter l'étude scientifique.

Nous allons ainsi donner comme prévision la limite des synthèses nucléaires, par suite de la limite de stabilité; comme facilités d'étude une Systématique harmonique des familles homologues pour les traités

de Chimie Anorganique et une Annexe architecturale de cette Systématique.

Le Chapitre final sera réservé pour des rectifications et précisions de recherches.

1. *Limite de la stabilité nucléaire.* Puisque le Th et U, éléments naturels à structure électronique 2**d** et 4**d**, avaient dépassé la colonne des terres rares située après le La à 1 seul électron d, on pouvait présumer qu'une seconde colonne à électrons f_5 analogue aux terres rares, ne se répèterait plus ; et alors nous avons calculé – depuis 1926 – si la configuration électronique des Eléments n'avait une limite : nous avons trouvé qu'une nouvelle série d'électrons **s** ne pouvait plus avoir de stabilité, et indiquâmes une limite des Eléments vers les numéros 96 – 98.

Maintenant que la seconde colonne **f** est apparue avec les Uranides 93–96 situés après l'Ur 235 qui est à noyau désintégrable, on a cherché quelles peuvent être les conditions de stabilité des nouveaux Eléments. Bohr et Feenberg ont donné en 1939 une expression de la stabilité

$$y = 42{,}6\,\frac{A}{Z^2} \geqslant 1\ ;\quad A, Z \text{ masse et Nombre atomique}$$

qui donne pour $^{239}_{93}\mathrm{Np}$; $^{237}_{93}\mathrm{Np}$; $^{239}_{94}\mathrm{Pu}$; $^{241}_{95}\mathrm{Am}$; $^{242}_{96}\mathrm{Cm}$

stabilité $y = 1{,}177 \quad 1{,}167 \quad 1{,}155 \quad 1{,}137 \quad 1{,}119$;

la stabilité nucléaire décroît avec les Nombres atomiques croissants vers la limite 1.000.

De nouvelles synthèses nucléaires qui pourrait être essayées par captation de particules $^4_2\alpha$, de deutérons $^2_1\mathrm{D}$, de protons $^1_1\mathrm{p}$, ou émissions spontanées $^0_{-1}\beta$ produiraient une diminution du coefficient de stabilité

$$\frac{dy}{y} = \frac{dA}{A} - 2 \cdot \frac{dZ}{Z}\ ;\quad \text{avec } y = 1{,}1\ ;\ A = 243\ ;\ Z = 96$$

on a pour $^4_2\alpha$; $^2_1\mathrm{D}$; $^1_1\mathrm{p}$; $^0_{-1}\beta$

$$dy = -0{,}023 \quad -0{,}012 \quad -0{,}016 \quad -0{,}020$$

après 4–6 accroissements $dZ = +1$, le coefficient de stabilité tombe à $y = 1$; la limite de stabilité sera atteinte avec d'éventuels Eléments jusqu'à 100 [1]), avant que le niveau électronique f_5 soit rempli de ses 14 électrons, avant l'Elément respectif 106.

1) On a obtenu par synthèse l'Elément 97=Berkelium. (Mai, 1948).

Pour des raisons de stabilité nucléaire, le Système harmonique des Eléments est un *Système clos, limité*.

2. *Systématique rationnelle des Traités de Chimie Anorganique.* Les derniers Traités de cette branche que nous connaissons, Van Arkel 1939, H. Rémy 1942, Hollemann 1943 adoptent une Systématique très rapprochée de celle que nous allons indiquer, conforme au Système harmonique ; c'est-à-dire :

Une *Introduction générale* avec les Chapitres :

Chap. premier, fondamental, Système harmonique des Eléments

Chap. II, Hydrogène et Séries spectrales

Chap. III, Deutérium ; et constituants nucléaires, protons, neutrons

Chap. IV, He = 2s ; particules α ; spectres complexes

Chap. V, Les gaz rares, inertes, à constitution électronique stable 6p.

En suite, pour une *première Partie*, 2 voies sont possibles ;

a) On considère les gaz rares comme des 6p ; alors on suivra avec les Halogènes 5p; les Chalcogènes 4p ; les 3p ; le Carbone 2p; B—Al=1p; puis les Alcalins 1s ; les Alc. terreux 2s. C'est presque la voie suivie par Hollemann 1943.

b. On considère les gaz rares à structure fermée Os ; et l'on traite les 1s = Alcalins ; 2s = Alc. terreux ; 1p = B— Al ; 2p = C ; 3p = N ; 4p = Chalcogènes ; 5p=Halogènes. C'est presque la voie adoptée par Rémy - Hambourg.

En somme, ce sont les anciennes Hauptgruppen, qui acquièrent ainsi une signification rationnelle, définitive ; ce sont les Eléments **s** et **p**.

La *seconde partie* traitera les anciennes Nebengruppen, dans un ordre précis des familles **d** et **f**, qui sont tous des métaux, et dont l'ordre rationnel a été indiqué ci-dessus ; c'est-à-dire les familles du Sc = 1**d** ; Terres rares = 1 — 14 **f** ; Ti = 2**d** ; V = 3**d** ; Cr = U = 4**d** ; les Uranides = 1 — 4**f** ; Mn = 5**d** ; puis les trois triades à (6 — 8) **d** = Fe, Co, Ni ; Ru, Rh, Pd ; Os, Ir, Pt selon l'ancienne méthode ; et Cu — Au = 9**d** ; Zn — Hg = 10**d**.

Enfin les phénomènes radioactifs et la désintégration nucléaire ; c'est presque l'ordre suivi par Remy.

Ce sont l'ordre et la méthode qui facilitent le plus une exposition claire et l'étude rationnelle d'un domaine qui doit décrire des milliers de combinaisons et faits les plus divers et disparates, à première vue.

VI. RECTIFICATION DE CERTAINS MALENTENDUS ; PRECISIONS

Nous allons relever ici la :

a. Rectification des Tableaux à 18 colonnes ; contradictions ;

b. Discussion finale des anciens tableaux à 8 colonnes ;
c. Certaines anomalies ;
d. Erreurs.
e. Précisions ; Potentiel électrochimique.

a. Quoique le tableau de Bohr 1923 sur la structure électronique des Eléments ait pris sa forme définitive en 1925, après le Principe de Pauli, et que la périodicité 18 y apparaisse de la façon la plus précise, évidente ; et alors les tableaux schématiques qui sont une expression sommaire des faits devaient nécessairement être arrangés avec 18 colonnes, nous constatons que par suite d'une tradition mal entendue, de l'inertie et d'une confusion que nous allons élucider dans le paragraphe suivant, ces schémas sont restés sans raison plausible et sans discernement aux anciens tableaux serrés à 8 colonnes, et à ses artifices inutiles.

Pour des raisons qui ont été exprimées à leur temps, nous avons été conduit vers 1922 à défaire l'overlaaping — superposition — des Nebengruppen et des Hauptgruppen des tableaux à 8 colonnes, et à établir des tableaux à 18 colonnes normales ; plus une 19-e pour les terres rares.

De tels tableaux à 18 colonnes ont été introduits assez tard dans les bons traités de Physique expérimentale ou théorique, Joos 1932-39, Fürth de Prague 1939, Grimsehl-Tomaschek 1942 ; ainsi que dans les traités de Chimie physique ou expérimentale : Nernst, Werner, Rémy. Mais tous ces traités font une *confusion* quant à la place des terres rares, qu'ils placent en marge des tableaux ; comme si ces Eléments seraient privés d'une constitution normale, et donc exclus en dehors des tableaux normaux.

Or, la constitution des terres rares est *réelle* et normale avec leurs électrons f ; ils sont discutés dans les textes de la façon la plus juste ; et si, dans les schémas sommaires ou tableaux d'ensemble, les terres rares ne sont pas inscrites à leur juste place, c'est par *malentendu* et *contradiction* entre schémas et texte.

Ces malentendus et de telles contradictions sont exclues dans nos tableaux harmoniques, qui attribuent aux terres rares, et dernièrement aux uranides, leurs places dans les colonnes spéciales, les 19-e et 20-e.

b. Les anciens tableaux à 8 colonnes figurent dans tous les traités de Chimie ; et de Physique par ci par là ; s'ils y figurent à titre historique et à côté de tableaux à 18 colonnes, actuellement à 20 colonnes, c'est tout juste, normal et judicieux ; la vogue des tableaux initiaux de Mendelejef a été franche et la plus utile à son temps ;

mais s'ils figurent seuls, c'est-à-dire comme représentant l'état actuel des connaissances, *c'est une erreur*; ils n'y correspondent plus.

Nous allons donc insister ici pour une dernière fois sur la contribution, propre de Mendelejef dans ce problème si important.

L'idée d'une Systématique des Eléments est parue soudain et avec force entre 1860-70, après la découverte rapide des Eléments Cs 1860, Rb 1861, Tl 1861, In 1863; tous par la méthode de l'Analyse spectrale introduite par Kirchhoff et Bunzen de Heidelberg en 1860; le premier Physicien et Mathématicien; le second Chimiste expérimental. Mendelejef était à Heidelberg juste à cette époque-là.

L'idée fut exprimée d'une façon claire par le Chimiste Italien Spallanzani dans un congrès de chimie auquel assistait Mendelejef. En même temps, le Français Chancourtois annonçait en 1862 la notion de *périodicité* des propriétés, que l'Anglais Newlands fixait en 1864 à l'Octave de 7 Eléments, et Mendelejef en 1869 à 8.

Mais nous avons déjà remarqué dans l'Introduction de ce Mémoire que l'idée propre et féconde de Mendelejef fut celle des *familles homologues*, qui reste valable pour toujours; par laquelle il fut conduit en 1871 à la *prévision* de Sc, Ga, Ge, qui établirent sa gloire, ainsi que son prestige. Après l'apogée de son Système initial – en 1886 – Mendelejef changea de spécialité; il prit la Direction du Bureau des poids et mesures, une place de Physicien; ainsi que la Direction de certaines entreprises pétrolières; il ne s'occupa plus de Systématique; et en 1886 même, quand une foule de nouveaux Eléments des terres rares étaient découverts, et ne trouvaient une place juste dans les tableaux déjà restreins à 8 colonnes, Mendelejef laissa aux autres de se tirer d'affaire, par toute sorte d'artifices; il laissa la place libre au tableau de J. Thomsen de 1893, qui était plus élastique et où le nombre des colonnes pouvait être varié selon les besoins de l'expérience; et où une seconde périodicité de 17-18 Eléments apparaissait de la façon la plus nette.

En 1900, donc du vivant de Mendelejef, dans son Handb. d. Anorg. Chemie Hollemann pouvait inscrire la remarque suivante, qui est tout-à-fait caractéristique pour son époque:

„Das periodische System der Elemente ist eine der *wichtig-*
„*ster Entdeckungen* auf anorganischem Gebiete; es wird seine Bedeu-
„tung *stets behalten;* doch zeigt sich allmählich immer deutlicher, dass
„es in seiner gegenwärtigen *Form* die Beziehungen der Elemente unter-
„einander in nicht mehr als *erster und roher Annäherung* darstellt".

C'est-à-dire, découverte des plus importantes, qui va durer tou-

jours ; mais non pas dans la forme de 1900 ; c'est-à-dire pas dans le cadre restreint des colonnes au nombre fatidique de 8.

D'ailleurs, après 1914 les recherches du problème de Systématique des Eléments passèrent au camp des Physiciens, avec une méthode, et des moyens nouveaux d'investigation, qui ont porté cet important problème jusqu'au stade actuel du Système harmonique.

c. *Anomalies.* Il y en a beaucoup dans les ouvrages courants de Chimie ; nous allons signaler une seule, qui est la plus caractéristique ; c'est la place incertaine des 2 familles du Ga, In, Tl, et des Sc, Y, La par rapport à l'Al.

De façon normale Sc, Y, La, sont des terres 3—v (v = valence) basiques, rapprochées des terres rares basiques et des Eléments 4—v basiques Ti, Zr, Hf ; que la nature même les a rassemblés dans les minerais de Suède, et dans les sables Monazitiques du Brésil ; leur structure électronique est à base d'électrons **d.**

De l'autre côté, Al, Ga, In, Tl, sont des métaux amphotères ; ils forment des aluns, et répondent à une structure électronique nettement **p** ; une famille homologue nettement caractérisée.

Il y a pourtant une seule discordance, quant aux réactions de l'analyse chimique : Al est précipité comme hydrate, classe 5, avec les terres basiques Sc, Y, La ; tandisque les Ga, In, Ti sont précipités comme sulfures, classe 4. D'où anomalie ; on rencontre dans un bel ouvrage l'anomalie de voir inscrits les Sc, Y, La, à électrons **d** dans le groupe de l'Al à électrons **p** ; et les Ga, In, Tl, à électrons **p**, inscrits dans le groupe des éléments **d** et des terres rares. Ce qui est une erreur ; car la *structure électronique* est fondamentale ; et les données de la Chimie analytique ne sont pas décisives à une seule réaction près.

De même pour d'autres anomalies, qui disparaissent d'elles-mêmes, si l'on suit l'interprétation du Système harmonique.

d. *Erreurs.* C'est à contre-coeur que nous devons signaler ici quelques erreurs, qui dues à de simples inadvertances peuvent se perpétuer à l'insu de leurs points d'origine.

Ainsi, dans l'admirable Traité de Physique chimique „Chemical Physics" 1939, Slater, Professeur de Physique à l'Inst. Polyt. de Massachussets et ancien Elève du Prof. N. Bohr à Copenhague, en 1923, donc au temps où Bohr établissait la structure électronique des Eléments, Slater donne pour la Systématique des Eléments un tableau Bohr-Thomsen ; mais avec une erreur d'impression-page 345 - dans les 2 dernières colonnes ; or, ce tableau a été pris à la lettre, avec son erreur, par le Chimiste Seaborg et par le spectroscopiste Meggers, comme il suit

Slater 1939			Seaborg 1946 Meggers 1947		
Cs	55	—	87		
Ba	56	—	Ra 88		
La	57	—	Ac 89	— Ac	89
Ce	58	—	Th 90	— Th	90
Pr	59	—	Pa 91	— Pa	91
Nd	60	—	U 92	— U	92
—	61	—		— Np	93
Sm	62	—		— Pu	94
Eu	63	—		— Am	95
Gd	64	—		— Cm	96

Tableau Thomsen-Bohr

Cs 55	—		87
Ba 56	—		Ra 88
La 57	—		Ac 89
Ce 58, 59, 60, 71 Lu	—		
72 Hf	—		Th 90
73 Ta	—		Pa 91
74 W	—		U 92
			93 94 95 96
			Np Pu Am Cm
75 Re			
76 Os			

c'est-à-dire les correspondances normales et homologues Hf — Th, W — U; au lieu de Pr — Pa, Nd — U, ce qui est une erreur.

Pour Seaborg, qui a découvert les Uranides 95, 96, et qui a été déclaré premier Chimiste de l'Amérique pour l'année 1946, cette erreur a eu une issue heureuse; car du parallélisme indiqué plus haut est issue la nomenclature des Eléments 95 = Americium correspond à l'Europium 63; 96 = Curium correspond au Gadolinium 64. La nomenclature est heureuse; la correspondance n'est pas exacte, car les Uranides aux degrés d'oxydation 4, 6 ne sont pas homologues des terres rares, aux degrés d'oxydation 3, 4; les deux groupes d'Eléments des terres rares et celui des Uranides ont les électrons intérieurs f_4 et f_5; mais les électrons intérieurs sont 1 **d** d'un côté, 4 **d** de l'autre.

Pour le Physicien Meggers, spectroscopiste consommé, ce n'est plus la même chose. Meggers n'est pas dans l'Enseignement officiel; pourtant il a suggéré et aidé à la confection d'un *tableau artistique* représentant une Systématique des Eléments à 8 colonnes, pleine d'erreurs; car outre les erreurs cumulées par les anciens tableaux embrouillés à 8 colonnes, on y voit inscrite l'erreur relatée plus haut, provenant d'une faute d'impression initiale.

Le tableau artistique Meggers reproduit par le *Journal of applied Physics*, va diffuser ainsi une rédaction erronée d'un problème aujourd'hui classique et précis.

e. *Modification des Tableaux Thomsen-Bohr.* Saisi par l'erreur relatée plus haut et cherchant à la corriger, nous nous sommes décidé, en qualité d'ancien Elève de l'Ecole de Copenhague, de modifier les Tableaux Thomsen-Bohr, qui concordent avec notre Systématique, et de leur donner une forme simplifiée, plus commode et qui puisse éviter de futures erreurs ou confusions. Nous allons ainsi :

y supprimer leur diagonales, qui conduisent aux confusions ;

introduire les coudes pour les colonnes f des terres rares et des Uranides. Nous trouvons ainsi la forme du tableau ci-après, où nous représentons les Eléments par leur simple nombre atomique : et où les accolades et les coudes des terres rares et des Uranides indiquent quelques groupes caractéristiques, d'Eléments qui ne peuvent pas être séparés, et constituent des jalons d'orientation lors de la confection des tableaux par dessin ou par imprimerie.

Nous ne cachons pas, qu'après avoir enregistré ces modifications, nous nous sommes aperçu comment, et à notre insu, en faisant ceci, nous avons agi „pro domo". Car, si l'on tourne le graphique ainsi obtenu, que l'on renverse la feuille et que l'on regarde par transparence, on tombe exactement sur le Tableau harmonique page 320. C'est-à-dire qu'il n'y a pas aujourd'hui 2 voies pour représenter rationnellement la Systématique des Eléments ; ou que s'ils se présentent de tels cas, ils doivent à la fin coïncider.

Tableau Thomsen-Bohr-modifié

périodes	. . 2 . .	8	. . . 18 . .		— 32	
	n — 0					
	p — 1					
	α — 2					
2 s	3	11	19	37	55	87
	4	12	20	38	56	88
			21	39	57	89
1 — 14 f					58 59 . . 71	
			22	40	72	90
			23	41	73	91
			24	42	74	92
1 — 4 f						93 94 95 96
10 d			25	43	75	
			26	44	76	
			27	45	77	
			28	46	78	
			29	47	79	
			30	48	80	
	5	13	31	49	81	
	6	14	32	50	82	
6 p	7	15	33	51	83	
	8	16	34	52	84	
	9	17	35	53	85	
	10	18	36	54	86	

f. *Précisions.* En examinant de près quelques-unes des anomalies que présentent la plupart des traités de Chimie, on constate qu'elles proviennent le plus souvent de la discordance que nous avons constatée entre les propriétés d'homologie provenant de la structure électronique précise et les données de l'analyse chimique courante ; or celles-ci sont assez aléatoires, ayant un but limité ; et variables avec trop de conditions particulières : concentration, température, état du milieu : neutre, acide, basique ; les chimistes purs sont habitués avec elles et sont ainsi enclins à leur attribuer une généralité qu'elles n'ont pas ; et de là, les anomalies.

Une étude systématique du potentiel électrochimique, fonction des mêmes variables : concentration, température, milieu, pourrait au moins expliquer ce désaccord et lui limiter la portée.

Conclusions. Le Système harmonique des Eléments, avec ses 20 colonnes ou familles homologues et ses périodicités 8, 18, 32 $(2s+6p++10d)+(4-14)f$ répond aux conditions nécessaires et aux raisons suffisantes des théorèmes de la Géométrie et de l'Analyse.

Condition nécessaire. Par sa base expérimentale, il facilite et dirige les recherches ; par l'ordre et sa méthode il rend l'exposition claire, l'étude rationnelle.

Raisons suffisantes. Ses points d'appui sont la structure électronique précise, expérimentale ;

son champ d'investigation,- les Eléments naturels et les quelques Uranides synthétiques,- est *clos* actuellement ; *limité* par la stabilité nucléaire qui touche à sa fin normale ;

régi par le théorème concret, fondamental et harmonique de Pythagoras, le Système harmonique a le caractère d'un principe fondamental, concret et harmonique ;

sa représentation graphique est *univoque* = unique ; une seconde représentation de la Systématique doit se réduire à la forme harmonique, comme c'est le cas des tableaux Thomsen-Bohr ; sinon ce seraient des présentations incomplètes ; caduques ou irrationnelles ; confuses ou erronnées.

comme problème classique, un chapitre lui est consacré dans tous les degrés de l'Enseignement ;

son domaine d'extension est la Physique expérimentale et théorique ; la Chimie expérimentale, Chimie physique ou théorique ; par le théorème de Pythagoras et par le principe quantique des trajectoires électroniques, son domaine s'étend jusqu'à l'Analyse et Mécanique ; c'est donc le domaine de la *Philosophie Naturelle* de l'Ecole Anglaise, selon Newton, Stokes, les Thomson, Tait.

Par la généralité de ces caractères, nous pouvons conclure, à juste titre, et considérer le *Système harmonique* des *Eléments* comme un *Principe fondamental de la Philosophie Naturelle*, ou

„PHILOSOPHIAE NATURALIS PRINCIPIUM EXPERIMENTALE"

Quod erat inveniendum. [1])

Références

1. *Ann. Sc. Univ. Jassy 1916–1943* X, 1916, 145; XIII, 1924, 62 et 313; XIV, 1925, 47; XXVI, 1940, 509; XXVIII, 1942, 139, et 143, et 251.
2. *C. R. Ac. Sc. Paris 1924–1942* 179, 1924, 766; 180, 1925, 653; 182, 1926, 1209 et 1333; 197, 1933, 838; 200, 1935, 1197; 215, 1942, 537.
3. *Bull. Sc. Ac. Roum. 1925–1947* IX, 1925, 158; X, 1926, 95 et 98; XVI, 1933, 27; XVII, 1935, 7; XXV, 1942, 407 et 410; XXX, 1947, 1.
4. *Bulet. Fac. St. Cti 1927–1939* I, 1927, 14; II, 1928, 44; III, 1929, 337; VI, 1932, 197; VIII, 1934, 160; X, 1936, 345; XIII, 1939.
5. *Rev. St. „Adamachi" Physikalische Ber.* XXVIII, 1942, XXXI, 1945, 1943, 841, 844, 873.
6. *C. R. Ac. Sc. Buc. 1942–46* VI, 1942, 46, 49, 59; VII, 1943, 29 et 36; VIII, 1946, 29, 31.
7. *Naturwissenschaften 1943* 31, 1943, 490.
8. *Bull. Ec. Polyt. Jassy 1948. 1948*

(Reçu le 31 Décembre 1947)

Faculté des Sciences de l'Université de Jassy

1) Selon une formule d'Euler.

53/54

LA RADIOACTIVITÉ DES EAUX MINÉRALES THERMALES DE MANGALIA

par

ALEX. CIŞMAN et CONST. RUSCIOR

Résumé.

1. On a mesuré le pouvoir radioactif de l'eau minérale sulfureuse de Mangalia, par la méthode du barbotage en circuit fermé, en déterminant la perte de charge d'un électroscope, muni d'une chambre à ionisation
2. L'intensité du courant de décharge a été déduite de la variation du potentiel et de la capacité électrostatique de l'appareil.
3. Le pouvoir radioactif des cinq sources étudiées est compris entre 0.39 et 1 27 mμC. au litre.

Introduction. Au point de vue de la radioactivité, les eaux minérales de Roumanie ont fait l'objet de plusieurs études.[1]) Il parait que leur pouvoir radioactif ne dépasse pas 12,9 mμC. au litre (sources minérales de *Sîn Giorgiu*) et se situe, en général, entre 0,5 et 1,5 mμ Curie au litre, avec de très rares exceptions.

Considérations générales. Tout autour de Mangalia il y a de nombreuses sources minérales, sulfureuses et thermales. Leur température est comprise entre 20^0 et 22^0 Centigr. La température moyenne de la région étant de 10.5^0C, il résulte qu'elles sortent d'une profondeur d'eau moins 300 mètres.

Les couches superficielles sont d'origine sarmathique. Elles s'inclinent du coté de la mer. Les sondages ont montré qu'il faut descendre à quelques centaines de mètres, pour trouver des couches plus anciennes.

Un faille tectonique traverse la région. Elle est de temps en temps le siège de tremblements de terre très violents, dont l'un a même détruit la ville de Cavarna.

---

1) Voir: Drag. Hurmuzescu et N. Patriciu. - Ann. Sc. Univ. Jassy T. V., pag. 159, 1908.
M. Giurgea - Bull. Acad. Roum. 1914-15, No. 2, pag. 54.
V. Bianu. - Bull. Acad. Roum. 1924, No. 3-4, pag. 17.
G. Atanasiu. - Anuar Inst. Geologic, XII pag. 1, 1927.

L'esquisse ci-jointe montre la situation des sources principales sur le terrain. Les établissements des bains thermaux, connus du temps des romains, se trouvent au bord du lac de Mangalia, au point marqué *a* sur la carte.

L'eau arrive par une grotte naturelle, assez étroite, dont on ne connaît pas le trajet. À côté, une autre source jaillit du rocher, toujours au bord du lac. C'est à cette source que nous avons puisé l'eau, pour nos mesures.

Le point marqué e montre l'endroit où, en creusant à la dynamite, on a trouvé, à quelque 10 mètres de profondeur, un canal naturel, sorte de grotte se dirigeant du Nord au Sud, avec une petite rivière souterraine, dont l'eau sert aux besoins d'une usine locale. *(Fulorul Dobrogean)*. Elle a un débit assez important, car une pompe à moteur, qui débite plus de 20 m. c. par heure, ne parvient pas à l'épuiser.

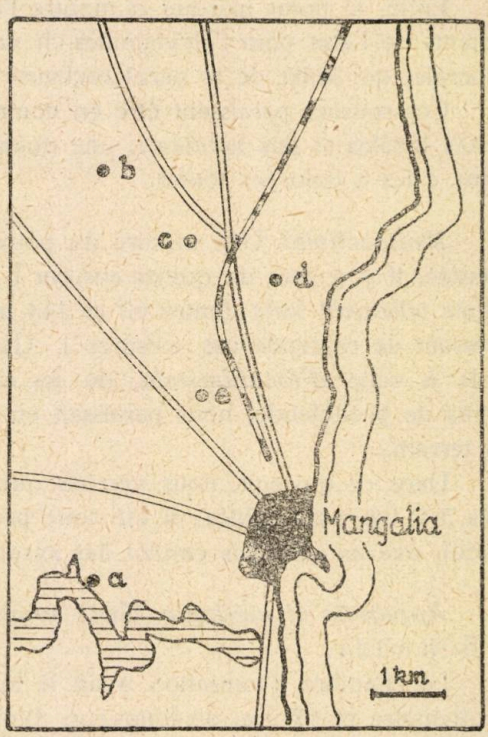


Fig. 1.

C'est une eau très riche en hydrogène sulfuré, qui dépose une assez grande quantité de soufre et de sulfure de fer. La paroi rocheuse de la grotte est d'ailleurs fortement impregnée de soufre et d'oxide de fer brun foncé. [1])

Au point *b (Obanul mare)*, l'eau jaillit de la terre tout autour d'un étang, situé au fond d'une dépression. C'est toujours une eau sulfureuse, qui disparaît ensuite par un canal naturel souterrain, sorte de trop plein de l'étang

La même chose se passe, mais à une moindre échelle, au point

1) Une importante anomalie magnétique, connue depuis assez longtemps est marquée sur toutes les cartes marines de la côte.

marqué *c*, d'où une pompe à moteur aspire l'eau d'irrigation pour un terrain potager. Le débit y est aussi assez important.

Enfin, le point marqué *d* montre l'endroit où, à côté des établissements de l'état pour l'élevage des chevaux, se trouve une autre source minérale, qui jaillit de la paroi rocheuse et se déverse dans la mer.

Ces sources paraissent être en communication, car, au dire des autorités locales et des habitants, une quantité de fluoresceïne, versée au point *c* les a colorées toutes.

Radioactivité. Une mesure du pouvoir radioactif de ces eaux, exécutée, il y a près de quinze ans, par T. Donescu a donné des résultats tellement forts (entre 60 et 144 mμC.) qu'il nous a semblé intéressant de reprende ces mesures [2]). Une telle radioactivité, comparable à celle *d'Ioachimstahl*, où les eaux jaillissent à côté des gisements de pechblende, nous paraissait en effet injustifiable, vu la nature du terrain.

Dans ce qui suit, nous verrons que les valeurs vraies sont à peu près 300 fois plus faibles ; il est donc probable qu'il y a eu erreur de calcul, due au mauvais emploi des systèmes d'unités.

Appareils et méthode. Nous avons employé l'appareil classique de Schmidt.

La chambre d'ionisation avait la forme d'un cylindre de 5,7 cm. de diamètre et 17 cm. de longueur, (volume 418 cm^3., surface intérieure 353,5 cm^2), auquel était adapté, d'une manière étanche, un électroscope à feuille d'or, isolé à la diélectrine. Cet isolant, mélange de soufre et de paraffine, donne d'excellents résultats. Il est insensible à l'humidité, et l'électroscope, une fois chargé à 300 volts, ne perd sa charge qu'après trois on quatre jours.

La feuille de l'électroscope se trouve dans le champ d'un microscope, grossissant 50 fois, dont l'oculaire est muni d'un micromètre.

La graduation en volts, effectuée à l'aide d'un voltmètre de précision, est strictement linéaire, entre 200 et 300 Volts. *Elle correspond à 0,38 Volts par division* et on peut apprécier facilement le quart d'une division.

La capacité de l'appareil a été déterminée à l'aide des battements de deux hétérodynes, dont l'une stabilisée au quartz sur 1000 Kilocycles par seconde. On substitue la capacité à mesurer par un étalon variable, deprécision.

---

2) Ces valeurs sont citées dans une brochure publiée par l'administration des bains.

La capacité électrostatique de notre appareil, ainsi déterminée, était de 15,125 cm.

Cet appareil était d'ailleurs le même dont nous nous sommes servi pour mesurer la radioactivité du limon therapeutique de quelques lacs [1]).

L'émanation radioactive était extraite par barbotage d'air, en circuit fermé.

Avant chaque mesure on détermine la fuite spontanée de l'électroscope, pendant un temps donnée.

Puisque l'émanation se repartit dans tout le volume de l'appareil, et qu'une partie seulement agit dans la chambre d'ionisation, il faut toujours introduire un facteur correctif et multiplier la perte de potentiel mesurée, avec le rapport de volume total de l'appareil au volume de la chambre d'ionisation.

Pour toutes nos mesures ce facteur de correction était égal à 6,8.

Résultats des mesures.

a. *Eau potable des établissements thermaux*, prise le 24 Juillet à 11h.30, mesurée à 12h.05.

Quantité : 1 litre.

Fuite spontanée de l'électroscope . . . . . 4 div.
Perte de potentiel pendant la mesure . . . 7 div.

Différence . . . . . 3 div.

Ce résultat, rapporté au volume total,
représente . . . . . 20,4 div.

Durée de l'observation . . . . . 600 secondes.

Une divisions de l'électromètre correspond à 0,38 Volts, donc à 0,00127 U. E. S. - C. G. S. Par suite la perte de potentiel de l'électromètre est

$$\Delta V = 20{,}4 \times 0{,}00127 = 0{,}0259 \text{ U. E. S.}$$

L'intensité du courant d'ionisation est donc

$$I_c = 15{,}125 \cdot \frac{0{,}0259}{600} = 0{,}000653 \text{ U. E. S.}$$

Ce résultat dépend des dimensions de la chambre d'ionisation. Si tous les rayons émis étaient complètement utilisés, le courant qu'on

1) A. Cişman. - Ann. Sc. Univ. Jassy - T. XX. fasc. 1-4, pag. 190 - 196, 1934.

obtiendrait avec la même quantité d'émanation serait, d'après Duanne [1])

$$I_\infty = \frac{I_c}{1 - K\frac{s}{v}}$$

où v désigne le volume de la chambre en cm³., s la surface des parois en cm.² et K un coefficient constant, dont la valeur est 0,52.

On en déduit que le courant de saturation — limite I_∞, que pourrait fournir la même quantité d'émanation, si tous les rayons émis étaient utilisés, serait, puisque pour notre appareil on a

$$1 - K\frac{s}{v} = 0\,57\,,$$

$$I_\infty = \frac{0{,}000653}{0{,}57} = 1{,}14.10^{-3}\ \text{U. E. S.}$$

Or, puisque pour un Curie d'émanation le courant de saturation est de 2,76. 10^6 U. E. S., le pouvoir radioactif de l'eau examinée est $R = \frac{1{,}14}{2{,}76}10^{-9}$, donc

$$R = 0{,}41\ \text{m}\mu\text{C. au litre.}$$

Deuxième mesure, faite le 28 Juillet au même endroit.

Prise d'eau à 16h.20.

Mesure à 16h.50.

Fuite spontanée de l'électroscope . . . . . 2 div.
Perte de potentiel pendant la mesure . . . 4,7 div.

Différence 2,7

Le résultat, rappporté au volume total,
représente . . . . . 18,3 div.

Durée de l'observation . . . . . 600 sec.

$\Delta V =$ . . . . . 0,0232 U. E. S.
$I_c =$ . . . . . 0,000585 U. E S,
$I_\infty =$ . . . . . 1,03 . 10^{-3} U.E S.

Il résulte

$$R = 0{,}37\ \text{m}\mu\text{C au litre.}$$

La moyenne de ces deux mesures est donc

1) Duanne, C. R. 1905 ; Mme Curie, *Traité de Radioactivité T. 2*, page 364 - 1910.

R = 0,39 mμC. au litre.

b. *Source alimentant l'étang* (Obanul mare), prise à 11 h., mesurée à 14h.30, le 31 Juillet.

Fuite spontanée . . . . . 2 div.
Perte de potentiel pendant la mesure . . . . 6,8 div.

Différence . . . . . 4,8 div.

qui, rapportée au volume total, donne... 32,6 div.

Durée de l'observation . . . . . 600 sec.

$\Delta V =$ . . . . . 0,0414 U. E. S.
$I_c =$ . . . . . 0,001043 U. E. S.
$I_\infty =$ . . . . . 1,82 . 10^{-3} U. E. S.

Pouvoir radioactif calculé :

R = 0,63 mμC. au litre.

c. *Source alimentant les irrigations* mesurée le 2 Août.

Prise d'eau à midi.
Mesure à midi 20.
Quantité : 1 litre.

Fuite spontanée . . . . . 1,3 div.
Perte de potentiel pendant la mesure . . . 7,7 div.

Différence . . . . . 6,4 div.

Le résultat, rapporté au volume total,
représente . . . . . 43,5 div.

Temps d'observation . . . . . 600 sec.

$\Delta V =$ . . . . . 0,0552 U. E. S.
$I_c =$ . . . . . 0,001391 U. E. S.
$I_\infty =$ . . . . . 2,44 . 10^{-3} U. E. S.

On calcule le pouvoir radioactif :

R = 0,88 mμC. au litre.

d. *Source à côté du rancho de l'état*, mesurée le 26 Juillet.

Prise d'eau à 19 h.
Mesure à 19 h. 20.
Quantité : 1 litre.

Fuite spontanée . . . . . 3 div.
Perte de potentiel pendant la mesure . . . 7,2 div.

Différence . . . . . 4,2 div.

Le résultat, rapporté au volume total,
représente . . . . . 28,6 div.

Temps d'observation . . . . . 600 sec.

$\Delta V =$ . . . . . 0,0363 U. E. S.
$I_c =$ . . . . . 0,000915 U. E. S.
$I_\infty =$ . . . . . $1{,}60 \cdot 10^{-3}$ U. E. S.

Radioactivité calculée :

$R = 0{,}58$ mμC au litre.

Deuxième mesure, même source, faite le 29 Juillet.

Prise d'eau à 17 h.
Mesure à 17 h.20.
Quantité : 1 litre.

Fuite spontanée . . . . . 1 div.
Perte de potentiel pendant la mesure . . . 5,5 div.

Différence . . . 4,5 div.

Le résultat, rapporté au volume total,
donne . . . . . 30,6 div.

Temps d'observation . . . . . 600 sec.

$\Delta V =$ . . . . . 0,0389 U.E S.
$I_c =$ . . . . . 0,000980 U.E.S.
$I_\infty =$ . . . . . $1{,}72 \cdot 10^{-3}$ U.E.S.

Radioactivité calculée :

$R = 0{,}62$ mμC. au litre.

La moyenne des deux mesurés est donc

R = 0,66 mμC. au litre.

e. *Eau de la galerie souterraine de l'usine (Fuiorul Dobrogean)*, prise après un pompage prolongé, le 7 Août.

Prise d'eau à midi 20.

Mesure à midi 40.
Quantité : 1 litre.

Perte spontanée . . . . . 2,5 div.
Perte pendant la mesure . . . . . 11,5 div.
Différence . . . 9,0 div.

Ceci, rapporté au volume total, représente . . 61,2 div.

Durée d'observation . . . . . 600 sec.

ΔV = ... 0,0777 U. E. S.
I_c = ... 0,001958 U. E. S.
I_∞ = ... $3,43 . 10^{-3}$ U. E. S.

Radioactivité calculée :

$R = 1,24$ mμC. au litre

Deuxième mesure, au même endroit, faite le 9 Août, dans les mêmes conditions.

Prise d'eau à midi 30.
Mesure à midi 50.
Quantité : 1 litre.

Perte spontaneé . . . . . 2 div.
Perte pendant la mesure . . . . . 11,5 div.
Différence . . . 9,5 div.

Rapportée au volume total, cette différence représente . . . . . 64,6 div.

ΔV = ... 0,0820 U. E. S.
I_c = ... 0,002066 U. E. S.
I_∞ = ... $3,62 . 10^{-3}$ U. E. S.

Radioactivité calculée :

$R = 1,31$ mμC. au litre.

La moyenne des deux mesures nous donne comme pouvoir radioactif

R = 1,27 mμC. au litre.

C'est la plus grande des radioactivités que nous avons pu observer aux sources de Mangalia.

A MM. le Maire et Maire-adjoint de Mangalia, nous exprimons encore une fois nos meilleurs remerciements pour l'aide et la bienveillance qu'ils nous ont montrées.

Ces mesures ont été exécutées dans le cadre de l'Institut National de Recherches Techniques.

Ecole Polytechnique
de Jassy
Laboratoire de Physique générale

(Reçu le 27 Août 1948)

NUOVI INDIRIZZI NEL CAMPO DELL'ANALISI CHIMICA DEI SILICATI *)

di

GASTONE VECCHI

Riassunto. – Vengono presi in esame i vari metodi studiati negli ultimi anni dai ricercatori per perfezionare lo svolgimento dell'analisi dei silicati. Dopo aver confrontato i metodi classici coi sistemi recentemente introdotti, viene tracciato un nuovo schema di procedimento da seguire nell'analisi in base anche ad esperienza diretta dell'Autore.

I. *Introduzione.*

Gli sviluppi sempre crescenti assunti in Italia e all'estero dalle industrie che fanno capo ai silicati, prima fra tutte l'industria ceramica e lo studio sempre più approfondito che si svolge in moltissimi laboratori del mondo intorno alla costituzione chimico-fisica, alle proprietà pratiche e alla composizione chimica dei silicati naturali, hanno suggerito il tema del presente lavoro (e degli altri che seguiranno) iniziato allo scopo di raggruppare insieme i vari metodi proposti per l'analisi dei silicati confrontando i metodi classici con nuovi procedimenti, cosicchè chi si accinge ad analisi di questo genere abbia un quadro illustrativo sufficientemente chiaro di quanto è stato fatto in tal campo. Infatti fino ad oggi i diversi procedimenti e accorgimenti introdotti per perfezionare le analisi succitate e i nuovi ritrovati chimici studiati sono stati comunicati di volta in volta su di un gran numero di riviste ed è quindi difficile che ogni chimico possa avere sott'occhio tutti gli articoli o anche solo gli estratti relativi.

II. *I metodi classici di analisi dei silicati.*

Si può affermare con quasi certezza, almeno in base alle informazioni che si sono potute attingere in tal senso, che la maggior parte dei laboratori di analisi e di controllo del nostro paese (salvo casi

particolari di studi personali di qualche ricercatore) usa ancor oggi i metodi classici di analisi dei silicati dettati dal Treadwell[1]). Sugli stessi principi indicati dall'illustre chimico è in sostanza basato il procedimento di analisi commerciale stabilito dal Villavecchia[2]).

Anche una scarsa pratica nel campo specifico della ceramica fa subito intendere come i metodi suaccennati, a parte il fatto che rappresentano il frutto di studi eseguiti molti anni addietro e perciò non sono più al corrente dei nuovi reattivi introdotti per i vari cationi, nonchè dei nuovi procedimenti suggeriti dai ricercatori, richiedono inoltre operazioni lunghe e delicate per essere condotte a termine, mentre invece oggi si cerca in tutti i modi di accelerare le ricerche analitiche. Tali metodi sono basati essenzialmente, come è noto, sulla fusione della sostanza con carbonato sodico o carbonato sodico-potassico e successivo scioglimento della massa fusa con acido cloridrico da cui si separa automaticamente la silice. Nel filtrato si eseguono successivamente le precipitazioni dell'*Al*, *Ca*, *Mg* e la determinazioni colorimetriche del *Fe* e del *Ti*.

Negli ultimi dieci anni, specialmente all'estero, dove le ricerche sistematiche nel campo dei silicati sono assai progredite (soprattutto in America e l'U. R. S. S.), sono stati eseguiti molti studi per sveltire le analisi chimiche senza che ne scapiti la precisione delle stesse, con particolare riguardo all'impiego di nuovi reattivi specifici per i vari cationi.

Non possiamo evidentemente citare qui tutti i lavori svolti in tal senso, anche perchè l'intendimento del presente studio è quello di rendere note le esperienze più significative, onde dedurre, se possibile, dall'esame di esse, i metodi migliori che servano a rendere più rapide, agevoli e precise le analisi dei silicati.

III. *L'analisi completa dei silicati.*

Da quanto ci risulta, fino ad oggi l'unico lavoro che abbia portato una sostanziale modifica ai metodi già citati e a quello di fusione con minio indicato dal Treadwell[3]), è quello di Vilensky[4]) pubblicato nel 1935. Tale metodo, consigliato in seguito anche dall'Istituto di Chimica Industriale di Bologna[5]), fu studiato in origine per l'analisi della sabbia per vetro d'ottica poichè in tale industria sono necessarie frequenti e rapide analisi di saggio sulla materia prima.

Il metodo, basato sulla disgregazione con HNO_3 e HF, richiede un quarto del tempo occorrente col metodo al carbonato sodico, soprattutto perchè si vengono ad evitare l'evaporazione della sostanza a secchezza fino a scacciare l'acidità, dopo la disgregazione e la fil-

trazione della silice. Il procedimento serve bene per qualsiasi tipo di silicato, e offre l'indiscusso vantaggio di usare lo stesso campione per tutte le determinazioni fino al Magnesio e inoltre di eliminare il pericolo di perdite di silice dovute a cause meccaniche.

Sul campione si esegue la perdita per calcinazione sul cui residuo si procede alla disgregazione con gli acidi nitrico e fluoridrico. Ultimata questa, la perdita in peso indica la silice; il residuo si fonde con bisolfato potassico eseguendo poi sulla soluzione, successivamente ottenuta, le varie determinazioni per *Al*, *Fe*, *Ti*, *Ca*, *Mg*.

Per quanto riguarda la determinazione dei cationi suddetti diremo particolarmente per ognuno di essi.

IV. *Determinazione della silice.*

Il dosaggio della silice non presenta di per sè stesso delle eccessive difficoltà, sia che si esegua la fusione con carbonato sodico, sia che si tratti il campione con gli acidi. Entrambi i metodi sono sufficientemente precisi, anzi col secondo metodo si evitano le eventuali perdite di SiO_2 dovute a cause meccaniche, possibili col metodo al carbonato, dato che il residuo è, in genere, relativamente voluminoso.

Inoltre va segnalato il fatto che può accadere, a volte, di dover notare la comparsa di piccole quantità di silice durante l'evaporazione della soluzione prima e anche dopo la precipitazione di *Al*, *Fe*, e *Ti*, quando si è fatta una non buona disgregazione con carbonato sodico. Questo inconveniente si supera usando il metodo di Vilensky poichè la silice viene eliminata come tetrafluoruro di silicio.

Voglio inoltre segnalare all'attenzione del lettore che nei casi in cui siano necessari frequenti e rapidi dosaggi della silice senza tener conto degli altri elementi, come può accadere nelle industrie del vetro e dei reffrattari, è assai comodo il metodo di determinazione colorimetrica suggerito da Koreman e Kozhukhin[6]), il quale consiste nella fusione del campione con una quantità dieci volte superiore di Na_2CO_3, soluzione della massa fusa con acqua e trattamento successivo con soluzione di molibdato ammonico e acido cloridrico. In tal modo la silice si trasforma in acido silico-molibdico il quale per riduzione dà una colorazione azzurra, confrontabile con una soluzione, campione preparata allo stesso modo.

V. *Determinazione di Al, Fe, Ti.*

La precipitazione di questi tre elementi in una porzione della soluzione proveniente della separazione della silice, avviene contempo-

raneamente mediante NH_3 in presenza di NH_4Cl. *I* metodi classici usavano come indicatore l'arancio di metile. Tuttavia da molti è stato riscontrato come l'esatto punto finale della reazione abbia una notevole influenza sul risultato della pesata, quindi si sono sperimentati altri indicatori, fra i quali il più adatto sembra essere il bromocresolo, come attesta Koenig [7]).

Una volta determinati per altre vie *Fe* e *Ti*, per differenza si può ottenere la percentuale dell'*Al*. Tuttavia con i reattivi organici introdotti nella pratica durante gli ultimi anni per la precipitazione degli ioni metallici, si può oggi contare su dei metodi rapidi e precisi per questi tre cationi.

Citiamo in ispecie il Cupferron che è stato usato da Zvenigorodskaya e Chernikhov [8]) per la precipitazione dell'alluminio in soluzione basica dopo aver eliminato *Ta*, *Zr*, *Ti* e *Fe* con lo stesso reattivo in soluzione acida. L'impiego di tale reattivo nelle soluzioni dei silicati in cui sono presenti anche *Ca*, *Mg* e alcali, e il controllo dei suoi eventuali vantaggi sul metodo all'ammoniaca (che basandosi sulla differenza fra la percentuale totale e la quantità di *Fe* e *Ti* non può che dare dei risultati approssimati) sono in corso di studio da parte dell'autore.

Altro reattivo organico impiegato con successo per il dosaggio dell'alluminio è l'ossichinolina, il cui impiego già suggerito da molto tempo per il *Mg* ed anche successivamente per l'*Al*, è stato di molto accelerato da Illiminskaya [9]) nel campo dei cementi. Il metodo è applicabile anche per i silicati insolubili e può essere collegato con quello suggerito successivamente da L. Kampf [10]) il quale impiegò l'8-idrossichinolina per determinare volumentricamente il *Fe* e l'*Al* nel cemento. Anche tale procedimento va studiato prima di consigliarne con certezza l'impiego nell'analisi dei silicati insolubili.

Per il dosaggio del ferro dobbiamo dire che la determinazione colorimetrica mediante solfocianuro di potassio è oramai stata abbandonata dalla pratica di laboratorio. Il Passarini nel suo citato articolo [5]), suggeriva il metodo Zimmermann come consigliabile per dosare il ferro nei silicati ed io stesso ho notizia come questo metodo fosse applicato già da tempo nelle analisi dei laboratori di industria (ad es. presso lo stabilimento della Soc. An. Materiali reafrattari di Livorno, che oggi non è ancora stato riattivato); tuttavia ho potuto constatare come molti autori hanno segnalato l'influenza che hanno altri cationi, specie il *Ti*, sulla riduzione del cloruro ferrico mediante il cloruro stannoso. Sarebbe quindi opportuno ricorrere all'analisi iodometrica suggerita dal Muzurov [11]) usando il *CuJ* come catalizzatore. Re-

centemente è stato suggerito da Scott [12]) un nuovo metodo di dosaggio colorimetrico del ferro mediante salicilato di sodio. Anche per tale procedimento l'Autore sta studiando le possibilità di impiego nell'analisi dei silicati.

Per il Titanio credo che ancor oggi pochi metodi risultino così precisi e comodi come la determinazione colorimetrica mediante $H_2 O_2$. Tuttavia poichè tale tipo di analisi è sempre relativamente soggettivo quando non si hanno a disposizione degli spettrofotometri, altri metodi possono assai bene servire allo scopo evitando la necessità di una costosa attrezzatura.

Ad es. fino dal 1914 Thornton [13]) aveva suggerito un metodo di separazione del *Ti* da *Al*, *Fe* e Acido fosforico mediante il Cupferron che si può cercare di impiegare nell'analisi dei silicati. Negli ultimi anni sono stati suggeriti due metodi assai interessanti: quello al bicromato sodico [14]) con indicatore carminio d'indaco e quello al permanganato [15]). Tanto l'uno quanto l'altro sono facilmente applicabili alle soluzioni che si ottengono nelle analisi dei silicati e quindi possono vantaggiosamente trovar impiego, data anche la loro rapidità, al posto dei dosaggi colorimetrici.

VI. *Determinazione del Ca.*

Fino ad oggi nessun metodo è stato suggerito, che offra la garanzia di precisione che si riscontra nel metodo all'ossalato indicato dal Treadwell, perciò è ancora il più consigliable.

VII. *Determinazione del Mg.*

Il dosaggio di questo elemento è assai delicato poichè può dare facilmente dei risultati erronei, data la gran quantità di sali estranei che si sono andati accumulando durante lo svolgimento dell'analisi. Specialmente i sali ammonici sono dannosi ed ognun sa come siano facili allora le perdite e le alterazioni di sostanza durante l'arroventamento necessario ad eliminarli.

Già da molto tempo sono stati suggeriti perciò i reattivi organici fra cui l'ossichinolina e i suoi derivati. Ad es. l'8-idrossichinolina è entrata nell'uso pratico per la determinazione del *Mg* da molti anni. Recentemente Miller e Mc Lennan [16]) hanno perfezionato il metodo dell'8-ossichinolina con speciale riguardo alle rocce carbonate e silicate. Bisogna tuttavia osservare che tale metodo, ottimo per analisi industriali, non è consigliabile per analisi di alta precisione data la difficoltà di portare il precipitato a peso costante a 110^0.

In questo campo perciò molto resta ancora da fare per rendere più agevole l'indagine analitica.

VIII. *Determinazione degli alcali.*

Questo è ancor oggi il punto più delicato e difficile dell'analisi dei silicati perchè se è vero che il metodo di Lawrence Smith è il più preciso e sicuro, è altrettanto vero che esso esige una lunghezza e una meticolosità di operazioni tali che in pochi laboratori si possono ottenere, specie nel caso di laboratori industriali, tanto che, in genere, si usa dare gli alcali per differenza. Il Passarini[5]) aveva tuttavia fatto notare come fosse necessario, per dare un dato preciso degli alcali, aver determinato tutte le sostanze che potessero essere eventualmente comprese nella differenza a 100, come CO''_2, S', SO''_4, Cl' ecc. Risulta chiaro come il dosaggio di tutti questi ioni porti con sè un considerevole aumento di tempo nella durata delle operazioni di analisi, senza contare che la percentuale indicherebbe sempre il totale in alcali senza precisarne la natura. Inoltre fornendo un dato per differenza non ci si può mai accertare se e quali errori si sono eventualmente fatti durante le determinazioni degli altri cationi, come invece avviene quando si hanno sott'occhio i dati di ogni componente, ottenuti direttamente.

In questo campo quindi il lavoro dei ricercatori è stato vastissimo. Moltissimi anzi si sono trovati a correre contemporaneamente su vie parallele, alcuni invece hanno ripreso e modificato il metodo Smith, quando già altri aveva suggerito metodi diversi, sempre per lo sforzo di mantenersi fedeli ad un sistema che aveva dato risultati migliori di qualunque altro. Ci limitiamo qui ad indicare i punti salienti dello sviluppo di tali lavori.

Read[17]) aveva notato come il metodo Smith desse dei dati realmente attendibili solo se la temperatura di fusione (specie per i materiali ad alto tenore di allumina) era di 1200° e la parte superiore del crogiuolo era ben raffreddata per evitare volatilizzazione, perciò, constatato che per realizzare tali condizioni sono necessarie speciali attrezzature, aveva suggerito la disgregazione con miscela di HF, HNO_3, e H_2SO_4 eliminando poi il Mg con 8-idrosichinolina. Tale sistema era stato sfruttato e infatti esiste una ricca letteratura sull'argomento [18]). Il metodo serve bene per tutti i tipi di silicati e soltanto per i prodotti ad alto tenore di allumina si ottengono valori leggermente inferiori al reale.

Modificazioni sostanziali furono poi apportate con successo al

metodo di Lawrence Smith da Athy e Taylor[19]) mentre nuovi suggerimenti e critiche venivano illustrate da Büttner[20]).

E' dopo il 1936 che si comincia ad esperimentare la disgregazione con acido perclorico. Fondamentali in tal senso sono gli studi di Koenig[21]), di Willard[22]) e di Marvin[23]).

Tale tipo di procedimento si fonda essenzialmente sul trattamento della sostanza con miscela di HF e $HClO_4$, tanto che la silice viene eliminata per volatilizzazione e i vari cationi vengono trasformati in perclorati. Lavorando sulla soluzione a piccolo volume si possono determinare il sodio come sale triplo di Zinco e Uranile, o di Magnesio e Uranile e il potassio come cobaltinitrito. Per esperienza personale posso affermare che i due metodi di Koenig per Na_2O e K_2O (studiati in origine per i feldspati, ma sfruttabili anche per qualsiasi tipo di silicato) sono altamente consigliabili sia per la semplicità che per la relativa economia di reattivi necessari; ove a questo si aggiunga che per eseguire entrambe le determinazioni occorrono al massimo una decina di ore, risulta chiaro come i sistemi in questione siano di gran lunga da preferire al metodo Smith.

Altro studio assai interessante è la modificazione apportata dal Cornes[24]) al metodo del Berzelius, avvalendosi delle considerazioni di Cantoni[25]) e di Koenig[26]); il Cornes infatti evita di trasformare i solfati in cloruri con $BaCl_2$ e di precipitare Al, Fe e Ca con ammoniaca e carbonato ammonico, elevando la temperatura di disgregazione fino a 900° in modo da trasformare i solfati in ossidi insolubili. Sul filtrato della disgregazione si determina in due porzioni il Na come acetato di Mg e Uranile e il K come cobaltinitrito. Nella titolazione successiva del K volumetricamente, anzichè usare permanganato viene impiegato il solfato di cerio. Questo metodo tuttavia, per quanto preciso, è sempre assai più lungo dei due metodi del Koenig illustrati prima.

IX. *Risultati del presente studio.*

Da quanto sopra esposto risulta come l'analisi completa dei silicati, in uso ancor oggi nei laboratori industriali e di ricerche, possa essere modificata con grande vantaggio della semplicità e della rapidità delle operazioni analitiche.

Come procedimento per la disgregazione si può adottare quello dell'HNO_3 — HF dettato dal Vilensky, determinando la silice per perdita di peso. Successivamente si procede come segue:

a) in una porzione della soluzione precipitare l'alluminio con os-

sichinolina secondo il metodo di Illiminskaya [9]) oppure con ammoniaca usando come indicatore il bromocresolo;

b) in una seconda porzione determinare iodometricamente il Ferro secondo Muzurov [11]);

c) in una terza porzione determinare per via volumetrica il Titanio mediante il metodo al bicromato di sodio [14]);

d) sul filtrato della precipitazione dell'Alluminio eseguire la precipitazione del Calcio secondo il metodo solito dell'ossalato, titolando poi l'ossalato di calcio con soluzione $N/10$ di $KMnO_4$;

e) sul filtrato della precedente operazione precipitare il Magnesio con 8-ossichinolina secondo il metodo di Miller e McLennan [16]).

Su un'altra porzione di sostanza si può eseguire la determinazione diretta degli alcali secondo il metodo suggerito dal Koenig [21]) oppure con quello di Cornes [24]).

Ove le precedenti osservazioni possano suscitare un certo interesse fra i chimici daremo eventualmente da queste stesse pagine una descrizione particolareggiata dei procedimenti da seguire sfruttando questi nuovi metodi di analisi dei silicati.

Ci riserviamo frattanto di dare in seguito comunicazione sulle ricerche sperimentali in corso e di cui si è fatto cenno nel presente lavoro.

Laboratorio Scientifico-tecnologico dell'Istituto Governativo d'Arte per la Ceramica, Faenza

(Reçu le 9 Mai 1948)

Bibliografia

*) Per la compilazione del presente lavoro sono state consultate circa dieci riviste italiane ed estere, specializzate nel campo della ceramica e in quello della chimica analitica. Fra le riviste consultate sono i „Ceramic Abstracts" che, pubblicati dall'American Ceramic Society negli Stati Uniti, raccolgono i dati attraverso un centinaio di giornali e riviste scientifiche di tutto il mondo.

1) F. P. Treadwell - *Trattato di Chimica Analitica*, vol II
2) G. V. Villavecchia - *Trattato di Chimica Analitica Applicata*, vol. I.
3) loc. cit (1).
4) M. B. Vilensky - *Rapid Method of Analysis of Glass Sand*, Jour. Amer. Ceram. Soc, 19 (3) 91-92 (1935).
5) U. Passarini - *Analisi chimica degli idrosilicati di alluminio*, Boll. Scient. Facoltà Chim. Ind., Bologna, n. 1-2, 55-57, (1940).
6) Zavodskaya Lab, 9, 43-45, (1940).
7) Chemist-Analyst, 30, (1) 15, (1941).
8) Zavodskaya Lab., 9, (10), 1089-90, (1940).
9) ibid., 9, (3), 300-304, (1940).

10) Ind. Eng. Chem., Anal. Ed., 13, (2), 72-73, (1941).
11) Uchenye Zapiski Kazan. Gosudarst. Univ , 100 (libro l), 3-30, (1940).
12) Analyst. 66, (781), 142, (1941).
13) Z. Anorg. Allgem. Chem., 87, 375, (1914).
14) M. S. Novakoskjj e D. B. Tsionskaya, Zavodskaya Lab., 9, 103-104, (1940).
15) W. Daubne, Ber. Dtsch. Ker. Ges., 23, (3), 107-110, (1941).
16) Jour. Chem. Soc., maggio 1940, 656-759.
17) E. B. Read, - The Determination of Alkalis in Silicates with Special Reference to High-Alumina Refractories, Jour. Amer. Ceram. Soc. 18, (11) 341-346, (1936).
18) a) J. J. Berzelius - *Decomposition of Silicates by Hidrofluoric Acid for Alkali Determination*, Pogg. Ann., 1, 169, (1824).
b) J. W. Melor - *Determination of Alkalis in Silicates* da „Quantitative Inorganic Analysis", pp. 225-47.
c) W. F. Hillebrand e G. E. F. Lundell - *Determination of Alkalis in Silicates*, da „Applied Inorganic Analysis", pp. 787-95.
d) A. H. Low - *Determination of Alkalis by Hidrofluoric Acid Method*, Chem News, 67, 185, (1893).
e) H. V. Krishnaya - *Determination of Alkalis by Hidrofluoric Acid Method*, ibid., 107, 100, (1913).
19) Chemist-Analyst, 29, (4). 76-77, 80, (1940).
20) Keram Rundschau, pg. 101, (1939).
21) E. W. Koenig: a) *Direct Determination of Sodium Oxide in Feldspar*, Jour. Amer. Ceram. Soc. 22, (1), 24-31, (1939).
b) *The Semidirect Determination of K_2O in Feldspar*, ibid., 22. (5), 164-168, (1939).
22) Ind. Eng. Chem., Anal. Ed., 14, (3), 234-35, (1942).
23) ibid., 17, (9), 554-556, (1945).
24) J. J. S. Cornes, *A Simplified Determination of the Alkalis in Silicates*, Analyst, 69, (221), 237-241, (1944).
25) Z. Anal. Chem , 67, 33, (1925).
26) Ind. Eng. Chem., Anal. Ed., 7, 314, (1935).

LES MINERAIS SIDÉRURGIQUES EN ROUMANIE

par

V. IANOVICI

Considérations générales

Dans le secteur minier métallifère la connaissance approfondie des richesses du sous-sol de notre pays est encore loin de la réalité.

Bien que l'exploitation minière dans ces parties de l'Europe soit connue depuis fort longtemps, comme c'est le cas du secteur des monts Apuseni (occidentaux) avec des exploitations qui remontent à l'occupation romaine de la Dacie, ce qui nous permet de nous appeler à juste titre un pays de tradition minière, nous ne pouvons cependant pas affirmer, d'après les prospections exécutées jusqu'à présent, que nous sommes un pays riche en gisements métallifères.

Outre la richesse en minerais orifères qui maintiendra longtemps encore la Roumanie parmi les pays producteurs d'or, nous avons des minerais métallifères très variés comme contenu, répandus en liaison avec les formations éruptives des montagnes de notre pays. Toutefois ces formations, dans la mesure où nous les connaissons aujourd'hui, ne permettent que rarement une exploitation rentable, surtout pour ce qui e st des minerais utilisés en sidérurgie.

En tout cas, nous ne pouvons pas affirmer aujourd'hui que nous avons des gisements de minerais de fer qui puissent couvrir pour une longue durée les nécessités de la sidérurgie indigène. Ce fait connu, il devient d'autant plus nécessaire de faire des efforts pour la connaissance aussi exacte que possible de la situation réelle afin que, d'une part, si nous avons des possibilités d'augmentation de la production de minerais de fer, nous mettions fin à l'effort économique réalisé pour nous assurer aujourd'hui ce minerai par importation, et que d'autre part, si ces possibilités d'augmentation de la production par découvertes de nouvelles réserves ne sont pas réalisables, nous menions une politique de ménagement des réserves existantes pour as-

surer la production dans les années d'impossibilité d'importation ou de besoins éventuels accrus dans le secteur sidérurgique pendant un intervalle limité.

L'industrie minière extractive procure au secteur industriel sidérurgique deux sortes de minerais comme matières premières :

Minerais de fer et minerais métallifères non ferreux pour ferro-alliages.

Nous analyserons à tour de rôle la situation dans notre pays des formations de minerais de ces catégories.

A. *Minerais de fer.*

Les minerais de fer utilisés en sidérurgie sont par ordre de préférence : la Magnétite ($Fe_3 O_4$), l'Hématite ($Fe_2 O_3$), la Limonite ($n\ Fe_2O_3 . m\ H_2O$), la Sidérose ($CO_3 Fe$) et la Pyrite ($Fe\ S_2$).

En Roumanie, du point de vue minier, deux régions sont intéressantes aujourd'hui : le Banat et la région de Poiana Ruscă.

Dans le Banat la présence des minéralisations est en liaison avec les roches magmatiques du type des Banatites dont la saillie suit deux lignes presque parallèles dirigées N-S : la première à l'est, Delineşti, Rudăria, Baia Nouă, Svinița, et la deuxième à l'ouest, Bocşa Montana Ocna de Fier, Lupac, Dognecia, Oravița, Sasca Montana, Moldova Nouă. En dehors de ces sens d'orientation de la minéralisation dans le Banat on trouve encore des minerais de fer exploitables à l'est de la première ligne dans la région Armeniş-Feneş et à l'ouest de la deuxième ligne à Liubcova.

Le minerai exploitable dans les minéralisations du Banat est la magnétite qui se trouve sous forme de lentilles au contact des banatites avec les calcaires jurassiques. Les roches banatiques pénètrent les schistes cristallins et les calcaires mezzozoïques de la région et la minéralisation est le produit de l'action métasomatique des émanations pneumatolithiques liées à cette intrusion. Outre la magnétite, par le même phénomène se sont également produites des minéralisations de moindre importance avec l'hématite, la pyrotine, la pyrite et la calcopyrite (on y trouve aussi des minéralisations oro-argentifères).

Parmi les formations de minerais de fer, dans le Banat, les gisements suivants se trouvent en exploitation : les gisements de Ocna de Fier, Bocşa Montana, Dognecia et Feneş se trouvent sous forme d'entonnoir ou de lentilles et sont formées de magnétite pour la plus grande part, hématite et minerai sulfureux. A Ocna de Fier, le plus important gisement du passé (l'exploitation a commencé dès 1700 et a produit environ 6.300.000 tonnes) est aujourd'hui en

voie d'épuisement, ayant encore des réserves visibles d'environ 150.000 tonnes et des réserves probables d'environ 500.000 tonnes. L'exploitation se fait par travaux souterrains, en profondeur, et la qualité du minerai se présente avec un contenu en fer de plus en plus faible et avec augmentation du pourcentage de souffre. La production annuelle probable est d'environ 25.000 tonnes, étant donné que l'extraction se fait de masses irrégulières et que le choix du minerai, pour maintenir un contenu moyen de 35 % *Fe*, est assez difficile.

Les minerais sidérurgiques – magnétite et hématite – d'Ocna de Fier ont un contenu chimique pour principaux éléments :

	Magnétite	Hématite
Fe	35,10 %	31,00 %
Mn	0,84	0,83
CaO	15,80	12,00
Al_2O_3	1,32	0,30
SiO_2	16,70	16,90
S	1,43	0,20.

Les gisements de Bocşa Montana et Dognecia ne sont pas aujourd'hui exploités.

Un autre gisement en exploitation dans le Banat se trouve à Feneş ; c'est la Société Reşiţa qui l'exploite. Le minerai est toujours de la magnétite et la production annuelle est d'environ cinq mille tonnes avec une réserve visible d'environ 50.000 tonnes et une probable d'environ 100.000 tonnes.

Le total des réserves connues de minerais de fer du Banat peut être chiffré à environ 800.000 tonnes. Dans la region de Poiana Ruscă on trouve les plus importants gisements de fer de Roumanie aujourd'hui connus. Cette zone de minéralisation peut être divisée du point de vue minéralogique en deux : la partie nord-ouest où la minerai exploité est la limonite, l'hématite et la sidérose et la partie sud-est à minéralisation magnétitique.

Il est probable que nous avons une formation unitaire de la minéralisation dans la région de Poiana Ruscă avec une formation épizonale dans la zone nordique et une autre mezzozonale dans la zone sudique.

L'exploitation des minerais sidérurgiques dans la zone nord-est est faite par deux sociétés : Les Entreprises Metallurgiques de l'Etat (I.M.S.) et Titan-Nadrag-Calan (T.N.C.). Les exploitations principales se

trouvent aux mines de Ghelar et Alun pour I.M.S. et Teliuc, Pădurea Oraşului et Ruda pour T.N.C.

Les gisements de cette région sont exploités par travaux à la journée; ils ont une réserve visible d'environ 3.250.000 tonnes et une probable d'environ 10 000.000 de tonnes.

Les minerais exploités, sidérite et limonite, ont pour éléments principaux un contenu chimique qui varie entre les limites suivantes:

	Sidérite	Limonite
Fe	34,4—42,6	43,5 – 62,3
Mn	2,2— 3,35	2,2—4,1
SiO_2	3,2—13,5	1 —20,6
MgO	1,4— 7,4	1 — 3,9
CaO	0,7— 8,6	0,9 – 2,2
S	0,05— 1,66	0,07—0,82

et ils ont un contenu minéralogique d'environ 75% de sidérose et 25% de limonite. Pour l'utilisation en sidérurgie le minerai est grillé et à cette occasion le carbonate de fer passe dans les oxides de fer.

La production de minerai de fer des exploitations de la zone nord-est de la région de Poiana Ruscă peut atteindre environ 150.000 tonnes par an et pourrait être augmentée par de nouvelles ouvertures de mines. Dans la zone sud-ouest de la région de Poiana Ruscă est en exploitation le gisement de Băuţari avec une réserve visible d'environ 10.000 tonnes et une probable d'environ 300.000 tonnes. Le minerai est formé de magnétite avec un contenu de 63,65% *Fe* à l'état de poussière et nécessitant une agglomération préalable à l'utilisation sidérurgique.

L'exploitation est faite par travaux souterrains par l'Administration Commerciale de Prospections, Explorations et Exploitations Minières (ACEX) avec une production annuelle d'environ 4.000 tonnes.

Dans la zone sud-ouest de la région de Poiana Ruscă ACEX fait des travaux intenses de prospections et explorations pour l'identification et l'appréciation des réserves de minerais de fer.

La région de Lueta (département d'Odorhei), où la société Vlăhiţa exploite le minerai de fer, est moins importante par les travaux miniers existant de nos jours. La réserve totale appréciée pour ce gisement est d'environ 1.000 000 de tonnes. La production actuelle peut s'élever à environ 6.000 tonnes par an, une augmentation de la production nécessitant des travaux importants d'exploitation.

Nous connaissons de même avec des travaux d'ouvertures les

gisements de la région de Bara Olt d'Herculian, Vărghiş et Doboşeni (départ. d'Odorhei) qui ont respectivement une réserve visible de 100.000 tonnes avec une réserve probable de 200.000 tonnes à Herculian et 100.000 t. à Doboşeni. Les travaux sont exécutés par I.M.S. et ils pourraient fournir une production minima de 6000 t. par an. Le minerai, avec plus de 30% *Fe*, est formé d'un mélange de limonite et d'hématite siliceuse constituant une formation sédimentaire intercalée entre brèches et conglomérat.

Dans la région de Covasna, Belani et Zagon (départements de Trei Scaune et Ciuc) on trouve des minéralisations à sférosidérite en bancs que l'on identifie sur une longueur d'environ 50 km. Le minerai contient environ 30% *Fe*, 12% SiO_2 et 15% CO_3Ca. On doit par les travaux d'exploration identifier les réserves de cette région.

Dans la région de Sălcina, Rimetea, Colţeşti (dépt. de Turda) dans les Monts du Trascău on trouve des couches de limonite avec un contenu maximum de 60% *Fe* au contact des calcaires et des schistes cristallins ; en profondeur la minéralisation manifeste la présence de sidérite plus pauvre en fer que la limonite. La réserve probable des formations de cette région peut être évaluée à environ 800.000 t.

Dans le Nord-Ouest de la Transylvanie on connait par la littérature des formations de minerais de fer-oxydes et carbonates-qui doivent être explorées dans la région des monts du Codru, du Zarand, du Bihor, à Văscău, Moneasa et Baiţa ; de même dans le nord de la Transylvanie dans la région des Monts de l'Ouaş, du Gutin, de la Rodna et du Maramureş, et au sud de la Transylvanie, dans la région des Monts de Sebeş (dépt. de Hunedoara et de Sibiu) et de Poiana Mărului, Zărneşti (dépt. de Braşov).

Nous pouvons donc, d'après des données connues jusqu'à présent, évaluer la réserve visible des minerais de fer à environ 3.500.000 t. et celle probable à au moins 13.000 000 t.

Dans les 10 dernières années la production de minerai de fer en Roumanie a variée comme suit :

1938	139.185 t.	1943	244.357 t.
1939	143.078 t.	1944	230.601 t.
1940	150.596 t.	1945	137.447 t.
1941	166.177 t.	1946	102.358 t.
1942	213.045 t.	1947	130.466 t.

et pour 1948 on prévoit une production de 210 000 t.

Parmi les formations de minerais sidérurgiques utilisées pour

l'obtention du ferro-alliages nous nous occuperons des minerais de manganèse, de chrome et de molybdène.

B. *Minerais de manganaise.*

La plus importante région, aujourd'hui connue en Roumanie, riche en minerai de manganèse, se trouve dans la région des Monts de Bistrița au sud-est de la Bucovine et au nord-ouest de la Moldavie.

Le minerai primaire, constitué de carbonate et silicates de manganèse, se trouve comme formation sédimentaire intercalé dans les schistes cristallins phyllithiques on quartziques à Iacobeni, Cârlibaba, Vatra Dornei, Sarul Dornei et Broșteni. La roche qui comprend le minerai de manganèse est un quartzite noir avec rhodocrosite et rhodomite. Dans les zones supérieures du gisement (chapeau de fer) on trouve des oxydes de manganèse, en particulier du psilomélane, qui forment le minerai exploitable.

Les gisements de minerai se présentent sous des formes irrégulières du point de vue tectonique par suite des puissantes secousses subies par les schistes cristallins inclusifs, avec des épaisseurs variant de quelques centimètres à des dizaines de mètres. C'est dans les zones d'accumulation des oxydes que se trouvent les exploitations actuelles de cette région.

Le minerai de manganèse exploité dans la région de Iacobeni-Sarul Dornei a un contenu moyen de 32 à 34% *Mn*. Les réserves visibles sont évaluées à environ 150.000 t. et celles probables peuvent être évaluées, en rapport avec les travaux de prospection exécutés jusqu'à présent dans cette région, à 650.000 t. maximum.

La production annuelle a varié entre 16.000 et 33.000 t., permettant de couvrir la consommation interne et, certaines anneés, d'exporter des quantités appréciables.

A défaut d'une installation de préparation mécanique on vise à l'extraction du minerai le plus riche, afin qu'il puisse être commercialisé avec profit, grâce à sa concentration naturelle. Cette situation rend difficile une exploitation rationnelle du point de vue minier. Il existait jadis à Iacobeni une installation de concentration mécanique qui a été démontée par les Autrichiens avant la première guerre mondiale et enlevée de la région ; on obtenait alors des concentrés avec 65 à 70% MnO_2, et, ce qui est plus intéressant, on exploitait rationnellement le gisement en introduisant également dans le processus de concentration mécanique le minerai plus pauvre en oxydes de manganèse. L'installation d'une station de concentration mécanique s'impose donc dans la

région de Iacobeni-Vatra Dornei, pour y réintroduire une exploitation rationnelle, tout en ménageant les réserves de minerai de manganèse.

L'analyse du minerai de manganèse de Iacobeni donne les indications suivantes de contenu:

SiO_2	10,92%	(Analyse faite à l'Institut Géologique de Roumanie. „Etudes techniques et économiques", série B, no. 10).
Fe_2O_3	14,06	
Al_2O_3	2,70	
MnO_2	49,40	
MnO	8,43	
CaO	2,04	
MgO	1,10	
P_2O^5	0 59	
S	0,02	
H_2O^{-105}	5,79	
H_2O^{+105}	5,69	
	100,74	
Mn	37,75%	

Pour la fabrication des ferroalliages avec manganèse nous aurions besoin, pour la capacité maxima de 450.000 t. de nos aciéeries, d'environ 15.000 t. de minerai avec un contenu moyen de 33% *Mn* pour fabriquer par an environ 5.000 t. de ferro-manganèse à 55% *Mn*. Pour l'industrie sidérurgique un ferromanganèse à 70–80% *Mn* serait plus intéressant, mais avec le minerai indigène, qui a une concentration relativement faible on ne peut pas réaliser par préparation au four électrique un ferromanganèse plus concentré que 50–55% *Mn*. Une telle installation électrique se trouve dans notre pays à Târnăveni, où on emploie le gaz métan pour obtenir l'énergie électrique meilleur marché et qui est capable de produire la quantité de ferro-manganèse nécessaire à la sidérurgie roumaine. De ce point de vue une concentration mécanique du minerai indigène s'impose donc, permettant la fabrication d'un ferro-manganèse de qualité supérieure destiné à l'industrie sidérurgique.

La deuxième région du pays, riche en minerai de manganèse, aujourd'hui en exploitation, est celle des Monts Semenic à Delineşti-Ohabiţa dans le Banat. Le minerai est aussi du silicate de manganèse avec une riche zone d'oxydation d'où on exploite la pyrolusite et le psilomélane. La production annuelle est de 8.000 à 15.000 t., selon les besoins de la sidérurgie du Banat.

Le minerai a un contenu variable:

Mn . . . . 26 à 32 %
Fe 14-12
$Si\,O_2$ . . . 24-18.

A remarquer le contenu important de $Si\,O_2$ qui provoque des difficultés dans le processus de transformation sidérurgique ainsi qu'une consommation accrue de coke.

On obtient cependant une fonte manganésifère avec environ 30 % Mn qui peut au besoin remplacer le ferromanganèse des fours électriques.

Les réserves totales de minerai de manganèse de cette région peuvent être évaluées à 1.200.000 t.

Toujours dans le Banat on connait des affleuvements de minerai de manganèse à Moldova Nouă, Apadia, Târnova et Sasca Montana.

Dans les Monts du Codru à Moneasa et Văşcău il existe une région qui a des perspectives d'avenir pour l'exploitation du minerai de manganèse. Le minerai est formé de zones riches en manganèse alternant avec des zones riches en fer, intercalées dans la zone d'altération des calcaires dolomitiques d'époque triasique. Le minerai de manganèse est constitué de manganite, psilomélane et pyrolusite, et le minerai de fer d'hématite et de limonite. Le gisement a des formes lenticulaires et n'est pas complètement exploré à cause des difficultés techniques, la région étant à peine accessible et dépourvue d'eau.

Le gisement principal a été exploité dans le passé, mais de façon non économique, car on extrayait seulement le minerai riche et de qualité. Une particularité est à signaler pour le minerai de Moneasa qui est dépourvu de S et de Ph, éléments génants dans le processus sidérurgique.

Du point de vue qualitatif le minerai de manganèse de cette région est le meilleur d'entre tous ceux connus dans le pays, ayant une composition variable dans les limites suivantes :

MnO_2 . . . . . 42-76 %
Fe_3O_4 . . . . . 12-27 %
SiO_2 . . . . . 0,7-4 %
$CaOMgO$ . . . 1,5-5,5%.

La réserve totale de minerai de cette région, d'après les données que nous possedons jusqu'aujourd'hui, peut être évaluée à 500.000 t.

On connait dans les Monts du Zarand à Buceava-Godineşti une région également intéressante possédant du minerai de manganèse avec

un contenu d'environ 40 % *Mn*, 8-10 % *Fe* et 6-7 % *Si* O_2, la réserve totale étant évaluée à environ 500.000 t.

Nous citerons une autre région avec des minerais de manganèse dans les Monts du Lăpuş à Maşca-Răzoare-Duruşa, où on a exploité avant la première guerre mondiale du minerai de manganèse avec un contenu variable de:

Mn	24—30 %
Fe	22—10 %
Si O_2	15—16 %
Ph	0,80— 1 %.

L'exploitation a été reprise au temps de l'occupation de l'Ardeal du Nord (1940—1944). Le minerai primaire est formé de carbonate et silicate de manganèse, et dans la zone d'oxydation on trouve du psilomélane et de la pyrolusite. La réserve visible peut être évaluée à 600.000-700.000 t. et celle probable à environ 1.500.000 t.

Les réserves totales aujourd'hui connues pour le minerai de manganèse du pays peuvent être évalueés à environ 4.500.000 t. mais il est sûr que ce chiffre est beaucoup trop petit par rapport aux réserves réelles.

Outre les réserves d'oxydes de manganèse dont nous avons parlé plus haut, les réserves de silicates et de carbonates de manganèse sont certainement beaucoup plus importantes. Cette situation va poser à l'avenir le problème de la préparation du ferromanganèse à partir de ces minerais: rhodonites et rhodocrosites. Mais dès maintenant les réserves d'oxydes de manganèse vont assurer pour quelques dizaines d'années le nécessaire à la sidérurgie roumaine, le problème qui se pose aujourd'hui à ce secteur de l'activité minière étant celui de la concentration mécanique des minerais existants.

Jusqu'à présent chez nous on utilise les minerais de manganèse pour la fabrication des fontes manganésifères, mais dans un proche avenir il faut arriver à la fabrication du ferromanganèse par l'installation de fours électriques juste à proximité du lieu de production du minerai en utilisant l'énergie hydroélectrique, la seule qui puisse supporter un coût de préparation rentable.

Bien que nous ayons un surplus de minerais de manganèse par rapport aux besoins de la sidérurgie indigène, je vois qu'il n'est pas lieu de permettre encore l'exportation de ce minerai, afin que, notre capacité de production sidérurgique augmentant, nous puissions avoir au moins ce minerai assuré. Il faut aussi poser le problème de l'utilisation des minerais oxydés pauvres en *Mn* et même des minerais

siliceux ou carbonatés pour les quels on connait aujourd'hui des procédés d'extraction du manganèse assez rentables si on utilise de l'énergie électrique bon marché. Sachant que la consommation de manganèse à la tonne d'acier est d'environ 5,5 kg., pour la capacité maxima de 450.000 t. de nos aciéeries il faudrait environ 3150 t. de ferromanganèse à 75-80% *Mn* ou environ 84.000 t. de minerai à 32% *Mn*.

C. *Minerais de chrome.*

La seule région de Roumanie où l'on connaisse des minerais de chrome se trouve au sud du Banat sur la rive du Danube entre la rivière Iuți à l'ouest et Ogradena à l'est. Le minerai du type du chromite ($Cr_2O_3 Fe O$ avec $Mg O$ et Al_2O_3) est un produit de ségrégation magmatique en liaison avec la zone de serpentines qui dans le Banat se développe sur trois directions : Tișovița-Eibenthal-Baia Nouă, Plavișevița-Lomuri-Dubova et Ogradena-Goleț iu se prolongeant vers le sud à travers la Yougoslavie (Morava, Drina, Vardar, Vrbas) jusqu'en Thessalie avec une ramification vers l'est qui va jusqu'à Istamboul. La minéralisation de la serpentine chez nous, autant qu'on sache aujourd'hui, est plus pauvre en chromite que le minerai de Yougoslavie ou de Grèce qui va jusqu'à un contenu moyen compris entre 42-58% Cr_2O_3.

Les roches principales de la région sont les gabroïdes et les serpentines qui sous l'action d'un métamorphisme mezzozonal ont donné naissance à des formations de magnétites, talcs ou asbeste. Les chromites, produit de ségrégation magmatique, accompagnées aussi d'imprégnations de magnétite, se trouvent sous forme lenticulaire de dimensions très variables.

Dans cette région de la zone est, on a exploité pour la première fois le minerai de chrome pendant la première guerre mondiale, puis sporadiquement jusqu'à nos jours, car le contenu en Cr_2O_3 est relativement réduit (18-22%).

La réserve de minerai de chrome en Roumanie, évaluée sans travaux d'exploration (D. R o m a n), s'élève à environ 2.000.000 de t.

Dès 1945, par des prospections géologiques et géophysiques, on a cherché à découvrir de nouvelles lentilles de chromites dans les zones est et centre de la région et à établir la liaison avec la zone ouest d'Eibenthal, identifiant ainsi environ 20.000 t. de réserves sûres à Văcăria et Lomuri avec l'établissement d'une zone de liaison intermédiaire avec possibilités d'exploitation assez encourageantes.

Le minerai exploité ces derniers temps présente un contenu moyen d'échantillon minier (I) par rapport à l'analyse d'un échantillon sélectionné (II) :

	I.	II.
Cr_2O_3	17,83 %	38,41 %
Al_2O_3	13,55	22,70
Fe_2O_3	0,45	20,80
FeO	9,56	
SiO_2	15,21	4,96
MgO	34,32	9,85
CuO	0,12	0,28
MnO	0,14	0,10
H_2O+110	9,12	2.80
	100,30	99,90

(I) Analyse exécutée par le prof. V. Ianovici.

(II) Analyse exécutée à l'Inst. Géologique de Roumanie. „Etudes techniques et économiques". Série B, n° 10.

Le minerai brut avec un contenu semblable à l'échantillon moyen, soumis à une préparation mécanique (dans l'étude du prof. Ing Gh. Vanci) conduit aux données analytiques suivantes :

Cr_2O_3	38,20 %
Fe_2O_3	0,61
Al_2O_3	30,32
FeO	17,91
MgO	10,22
NiO	0,11
CuO	0,10
SiO_2	0,93
H_2O+110	1,63
	100,03

Analyse exécutée par l'Inst. Géologique de Roumanie (1948).

On peut donc déduire que le minerai du sud du Banat, bien qu'il ait un contenu faible en Cr_2O_3 pourrait être exploité pour les besoins sidérurgiques de ferrochrome (la consommation annuelle de minerai ennobli par préparation mécanique étant d'environ 2.500 t.) ainsi que pour la fabrication des tonnants artificiels à base de bichromate de sodium ou de potassium ou à la fabrication des matériaux réfractaires (la consommation annuelle pour les besoins de notre industrie chimique et céramique s'élevant à environ 1200 t.).

D. *Minerais de molybdène.*

En Roumanie on connait la présence du minerai de molybdénite (MoS_2) dans le dépt. de Bihor à Băiţa dans le gisement de contact

de calcaires d'époque triasique avec les roches de type banatitique. La métallisation du gisement de contact se fait avec de la galène argentifère, qui contient dans des nids de dimensions variables la molybdénite et la bismuthine formées par le processus de sublimation.

La galène argentifère a formé l'objet de certaines exploitations plus anciennes et dans les dernières années on a repris les travaux d'exploitation pour la molybdénite et la bismuthine, le minerai ayant un contenu qui a varié entre 0,3 - 1,2% MoS_2.

La zone de minéralisation ayant subi des dislocations, la nature et la forme du gisement rendent difficile une évaluation des réserves ; on peut cependant évaluer la réserve visible à environ 7000-8000 t. de minerai, la minéralisation pouvant être suivie aussi par un horizon de profondeur sous le thalweg de la vallée du Criş Negru. L'exploitation a continué jusqu'à la fin de la dernière guerre mondiale, le minerai brut étant concentré par préparation mécanique et par flottement pour obtenir des concentrés à 75 - 85% MoS_2 qui a servi pour la préparation du ferromanganèse.

En dehors du gisement de Băiţa on a fait des prospections et on a trouvé des minéralisations avec molybdénite dans la région du sud des monts Métallifères sur la rive droite du Mureş à Cerbia-Zam et Săvîrşin dans la zone de contact entre granodiorites et mélafires. Les minéralisations sont caractérisées par des filons dépourvus de continuité ou même réticulaires avec un contenu moyen de MoS_2 de 0,15 à 0,24% ce qui dénote un manque de rentabilité par rapport aux méthodes de séparation employées aujourd'hui.

E. *Conclusions.*

En résumé, les réserves connues de minerais sidérurgiques en Roumanie sont les suivantes :

Minerais de fer	16.500.000 t.
„ „ manganèse	4.500.000 t.
„ „ chrome . .	2.000.000 t.
„ „ molybdène	8.000 t.

Certainement que ces appréciations sont loin de la réalité, mais nous ne pouvons pas nous compter parmi les pays riches en minerais de fer. Par rapport à la réserve mondiale connue de minerais de fer, évaluée à environ 100 milliards de tonnes, nos réserves représentent à peine 0,016 %. Même les appréciations plus optimistes qui chiffrent ces réserves à 25-30 millions t. ne nous ouvrent pas de perspective plus favorable.

Il est nécessaire d'entreprendre une campagne intense de pros-

pections géophysiques et de travaux d'exploration minière, là où existent des indications encourageantes, pour connaître les réserves aussi réelles que possible de minerais de fer afin de savoir la politique à suivre dans ce secteur d'activité économique, tout en développant l'exploitation des gisements existants afin de réduire l'effort économique aujourd'hui réalisé pour l'importation de minerai de fer.

Du point de vue qualitatif, nos minerais de fer se classent parmi les minerais moyens et pauvres ayant un contenu variant entre 30-55 % *Fe* ou même sous 30 % *Fe*.

De même nous devrons penser à l'introduction dans l'industrie sidérurgique des procédés de transformation des minerais pauvres en oxydes, par ex. le procédé Krupp-Renn, de même que la transformation de pyrites brûlées – (scories) déchets des fabriques d'acide sulfurique – par le procédé Sturzelberg en employant à cet effet le gaz métan et de la poussière de charbon. Les réserves de pyrites de notre pays peuvent être évaluées à un minimum de 10.000.000 t., pouvant assurer pour longtemps le fonctionnement des unités de fours type Sturzelberg, avec une consommation d'environ 50.000 t. par an (projet de la soc. Sonafer).

En ce qui concerne les minerais de manganèse, chrome et molybdène, bien que ce soient des minerais moyens comme contenu utile, nous pouvons affirmer qu'ils existent en quantité suffisante pour la consommation interne sidérurgique et celle de l'industrie chimique. Il est nécessaire de réaliser une concentration mécanique des minerais de qualité, tant pour les ferroalliages que pour l'industrie chimique.

Faculté de Chimie Industrielle
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 15 Juin 1948)

Bibliographie

1) V. C. Butzuréanu. – *Le Massif cristallin de Broşteni*, Ann. Ac. Roum t. 38.
2) T. P. Gheţulescu et I. Gavăţ, – *Etudes sur les gisements métallifères*, Inst. Géol. de Roumanie, „*Etudes techniques et économiques*", vol. 15.
3) H. Quiring, – *Die Manganerzvorkommen in den krystallinen Schiefern der bukowinischen Waldkarpathen*, Arch. für Lagerstätten Forschung, 1922.
4) K. V. Papp, – *Die in ungarischen Staatsgebiete vorhandenen Eisenerzvorräte. The iron ore res. of the world*, XI Intern. Geol. Congr. Stockholm.
5) M. Savul, – *Les schistes cristallines et les gisements de manganèse de la région de Şarul Dornei*, Ann Inst. Géol. de Roum. vol. XII.

LES ORIENTATIONS DES PLANS DE BÖHM DANS LES CRISTAUX DE QUARTZ

par

MIRCEA SAVUL

On a constaté depuis longtemps, à l'aide du microscope, que dans les roches à quartz, qui ont été soummises aux actions tectoniques, les cristaux de quartz, présentent des striations parallèles. Ces stries ont été décrites en 1883 par A. Böhm [1]) à l'occasion d'une étude faite sur un gneis à albite de la région de Wechsel.

D'après Böhm, ces stries représentent des rangées d'inclusions liquides et gazeuses.

Les minéralogues, qui se sont occupés plus tard de ces stries, parmi lesquels F. Becke, les ont appelés „les stries de Böhm" (Böhmische Streifung) (Sander) [2]).

En ce qui concerne le nature des stries de Böhm, il existe plusieurs hypothèses. Ainsi ces stries représentent:

1. Des inclusions liquides et gazeuses (Böhm).
2. Les traces des macles mécaniques (Judd, Milch).
3. Des lamelles de translation (Mügge, Sander, Fischer).

Aujourd'hui, la plupart des minéralogues considèrent que ces stries représentent des lamelles de translation.

Le but de notre travail, est de déterminer l'orientation cristallographique de ces lamelles, problème qui a déjà préoccupé beaucoup de minéralogues avant nous.

Ainsi O. Mügge [3]), en 1893, dans une étude relative à ce sujet, mentionne que Lossen et puis Rosenbusch ont considéré que les stries de Böhm sont orientées parallèlement aux faces $(10\bar{1}1)$, $(01\bar{1}1)$, $(10\bar{1}0)$ et (0001), quoique d'après lui, ces stries aient des directions un peu déviées par rapport aux faces indiquées. Ces stries sont parallèles à la direction $Np\,(\alpha)$ ou un peu déviées, l'angle entre les stries et $Np\,(\alpha)$, variant de 0^0 à 18^0 ; elles représentent donc des faces approchées de la base (0001).

D'autre part, Müggе a constaté que dans les sections microscopiques parallèles à (0001), les stries peuvent apparaître en plusieurs séries, mais d'une faible apparence. Dans ce cas, leurs directions ne sont pas ni parallèles ni perpendiculaires aux côtés de la section hexagonale du cristal de quartz.

Ainsi, les stries de Bőhm ne peuvent pas représenter des lamelles de macles, parce qu'elles ne correspondent pour aucune face cristallographique ; d'ailleurs, les faces aux indices irrationnels sont peu probables pour le cristal de quartz.

Donc, d'après Müggе, les stries représentent plutôt des lamelles de translation, qui parfois sont pliées.

G. Fischer[4], en 1925, en étudiant les stries de Bőhm, sur un riche matériel provenant de la collection de Pétrographie de l'Université de Münich, remarque que les stries apparaissent seulement dans les roches qui ont subi de forts mouvements.

Il constate que les orientations des lamelles sont variables, à savoir qu'elles correspondent à la face hypothétique (0001), ou aux faces de rhomboèdre $(10\bar{1}1)$ et $(01\bar{1}1)$, même des rhomboèdres plus aplatis. De même que Müggе, il admet pour le quartz l'existence des translations sous-parallèles à la base (0001).

La création de la méthode d'analyse pétrologique structurale (Gefüge Analyse) des roches a attiré l'attention sur les stries de Böhm. Comme on le sait, dans cette méthode on mesure statistiquement l'orientation du plan qui correspond à chaque strie, pour un grand nombre de granules de quartz.

A l'occasion de la 11-ème Réunion annuelle de la Société allemande de Minéralogie, tenue à Zürich, (1925), Walter Schmidt[5] a fait une communication sur l'arrangement statistique régulier du quartz dans des schistes cristallins.

Pendant la discussion qui a suivi cette communication, A. Johnsen a expliqué la règle de Trenner (l'axe $ng = \gamma$ du quartz est perpendiculaire au plan de schistosité), en admettant des glissements suivant les lamelles parallèles à la base. Ces lamelles correspondent justement aux stries de Böhm.

F. Becke fut de la même opinion.

Sans doute, les considérations faites par Niggli[6] sur la morphologie des cristaux de quartz, sont elles d'une importance remarquable pour notre problème. Il a montré que les principaux axes de zone pour le cristal de quartz, sont (Fig. 1) :

- [2 1 1 0], qui correspond à l'arrête de prisme – pyramide
  [0 0 0 1], „ „ „ „ „ prisme – prisme

$[\bar{2}\ 1\ 1\ 3]$, qui correspond à l'arrête de pyramide - pyramide.

Ces axes constituent, dans le réseau du quartz, des rangées de la plus grande densité réticulaire. Les distances entre les atomes de silicium, pour le quartz hexagonale, suivant ces directions, sont :

Axes : $[2\bar{1}\bar{1}0]$; $[0001]$; $[\bar{2}113]$

Distances : 1 : 1,1 : 1,49.

Les autres axes de zone, ont des densités de plus en plus petites.

De l'examen morphologique des cristaux de quartz, Niggli a déduit que :

1. Les plus importantes faces du quartz apparaissent sur les zones principales et sur un plus grand nombre possible de zones et 2. les faces principales ont leur pôle le plus éloigné possible des pôles des axes principaux.

La conclusion tirée par Niggli, est que la morphologie externe du cristal de quartz n'est pas déterminée par les rapports des densités des plans réticulaires, mais par ceux des rangées réticulaires. „*Die Zonenbeziehungen sind das primäre, die Flänchenlage ist das secundäre*".

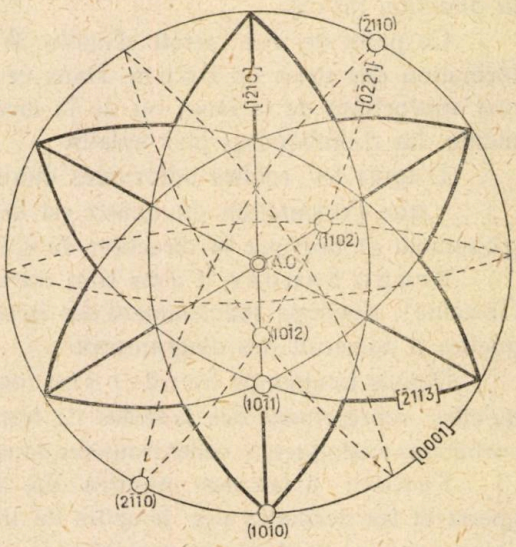


Fig. 1.

D'après les considérations exposées plus haut, le cristal de quartz doit être plus riche en faces approchées du prisme de I-er espèce, et plus pauvre en faces approchées de la base. Les principales faces du quartz, sont :

$\{10\bar{1}0\}$, $\{10\bar{1}\bar{1}\}$ et $\{11\bar{2}1\}$; les deux premières prédominent.

Ces considérations de Niggli, ont été appliquées plus tard par d'autres chercheurs pour expliquer les glissements dans les cristaux de quartz. Nous rappelons les plus importantes de ces applications.

Walter Schmidt [7]) dans le cas du quartz, fait usage des connaissances de la métallographie, d'après les quelles les droites et les plans de la plus grande densité réticulaire s'ordonnent suivant les directions de la déformation. Dans les roches déformées, ces directions

correspondent à la direction du mouvement (Durchbewegung) et au plan de la schistozité. Dans de pareilles roches à quartz, les directions de la plus grande densité réticulaire sont justement celles indiquées par Niggli, à savoir [0001], [$2\bar{1}\bar{1}0$] et [$\bar{2}113$]. Ainsi dans la déformation suivant la règle des roches à quartz, l'axe [0001] se dirige dans la direction du mouvement.

En examinant les types des diagrammes, pour quelques roches à quartz, on constate encore, que dans l'orientation du quartz, il se produit une concurrence entre deux plans réticulaires différents et le résultat final s'établit par les rapports de friction. Dans ce cas on trouve les plans ($10\bar{1}1$) avec la direction de glissement [$2\bar{1}\bar{1}0$] et ($2\bar{1}\bar{1}2$) avec la direction [$2\bar{1}\bar{1}3$].

Ce point de vue serait d'après W. Schmidt applicable à la formation des stries de Böhm. Dans ce cas, les plans ont des positions approchées de la base, ou de la face du rhomboèdre habituel ou même des rhomboèdres plus aplatis.

D'après les roches déformées étudiées par lui, W. Schmidt que l'orientation du quartz est déterminée par un processus de glissement et non par la direction de sollicitation principale.

Bruno Sander [8]) dans sont traité classique „Gefügekunde der Gesteine", s'occupe spécialement des stries de Böhm, au moyen desquelles il construit des diagrammes.

Depuis longtemps Sander s'est occupé de ces stries, et il croit qu'elles représentent des lamelles de translation qui présentent des incurbations analogues à celles trouvées dans le mica, suivant la face (001).

Sander a fait des mesures des angles compris entre l'axe du quartz et les normales aux lamelles de translation. Il a trouvé que les valeurs de ces angles sont variables.

Statistiquement, ces valeurs se groupent en formant des maximums plus ou moins prononcés.

Les valeurs de ces maximums sont :

$$6^0 - 7^0\ ;\ 9^0\ ;\ 13^0\ ;\ 16^0\ ;\ 21^0\ ;\ 29^0 - 30^0.$$

Sander a déterminé par une méthode indirecte les valeurs de ces angles. En considérant les diagrammes des roches déformées, les minimums pour les axes optiques correspondent à la position moyenne des normales de translation ; alors, l'angle compris entre les positions de maximum et de minimum de fréquence des axes optiques, correspondent à une moyenne statistique pour l'angle cherché. Les valeurs trouvées par cette méthode sont 23^0 et 21^0.

D'après Sander, les plans de glissement seraient ($01\bar{1}3$) et ($01\bar{1}2$).

En 1938, Anna Hietanen [9]), en étudiant les quartzites de Finlande, s'occupe aussi des stries de Böhm. Parmi les exemples cités par elle, on trouve un granule de quartz appartenant aux quartuites de Vittinki, où on rencontre deux séries de stries qui forment entre elles un angle de 85°. Cet angle est pareil à celui compris entre les faces de rhomboèdre $(10\bar{1}1) \wedge (\bar{1}101) = 85°,46'$. Par contre, on constate que le plan du pinacoïde basal de quartz forme avec une des séries un angle de 26° et avec l'autre série un angle différent de 82°.

Hietanen détermine, avec la platine universelle de Fédorow, la position de l'axe optique, dans les différents points de chaque granule examiné. Elle a représenté graphiquement les valeurs trouvées, d'une manière analogue à celle employée aux représentations des inclinaisons dans les cartes géologiques.

Elle a constaté que les stries de Böhm présentent une continuité par des portions du cristal où les axes optiques accusent des variations importantes d'orientation. En partant de cette observation, Hietanen déduit que dans les granules de quartz se sont produites des déformations qui ont eu comme résultat un changement dans l'orientation de l'axe optique sans que la position primaire des stries de Böhm soit changée, ce stries gardant donc leur position initiale.

Suivant l'hypothèse de Hietanen, dans les processus de la déformation du quartz, il existe plusieurs stades successifs. La déformation commence par des glissements limités suivant le plan de base (0001), auxquels il s'ajoute aussi des glissements-pliages. Ces déformations plastiques se manifestent par les extinctions onduleuses, qui s'observent au microscope.

Dans un second stade, il se produit les stries de Böhm avec un faible écrasement du réseau cristallin. L'auteur suppose que, vu la structure en spirale du réseau du quartz, il se produit des cavités invisibles dans les stries de Böhm.

Cette déformation conserve encore le caractère plastique.

Quand la déformation continue encore, elle prend un caractère rupturale, il se forme des fractures perpendiculaires aux lamelles de Böhm, accompagnées par des glissements parallèles aux faces de prisme. Dans ce stade, d'après Hietanen, il s'est produit un „tour de front" (turn his front) dans le réseau de quartz, de sorte que les atomes de silicium viennent s'arranger de telle manière que les plans de la plus grande densité réticulaire coïncident aux plans de glissement „*a b*" de la déformation de la roche. En même temps, les droites de la plus grande densité réticulaire [0001], $[2\bar{1}\bar{1}0]$ et $[21\bar{1}3]$ coïncident avec la direction de glissement „*a*" de la déformation de la

roche. Dans cette nouvelle orientation du réseau du quartz, l'axe optique prend une autre direction mais les stries de Böhm conservent leur position initiale, étant visibles comme des raies, constituée, d'après Hietanen, par des inclusion gazeuses et liquides.

Donc, d'après cet auteur, les stries de Böhm, quoiqu'ils apparaissent avec les inclinaisons variées par rapport à l'axe optique, avaient toutefois, au moment de la formation, une autre position, qui correspondait au plan de pinacoïde basale (0001).

Sans essayer de discuter l'hypothèse de Hietanen, il nous semble que la réorientation du réseau du quartz n'est pas suffisamment documentée. Par exemple, il manque les vérifications sur les cristaux avec des stries de Böhm, qui, quoique déformés, conservent encore quelques caractères d'idiomorphisme.

B. *Partie expérimentale.*

Les stries de Böhm apparaissent au microscope comme des lignes qui représentent les intersections des surfaces plus ou moins planes avec la section microscopique. Nous appelons ces surfaces „plans de Böhm".

D'après les mesures faites, on constate que les plans de Böhm ont des inclinaisons variables par rapport à l'axe γ (*ng*). Nous avons essayé de trouver une règle d'après laquelle se produisent les orientations de ces plans.

D'habitude, dans l'analyse pétrologique structurale (Gefüge Analyse) on détermine la position moyenne de l'axe optique, comme étant valable pour tout l'individu de quartz. Mais, à cause des déformations rupturales, chaque granule étant divisé en plusieurs sous-individus, la position de l'axe optique n'a pas la même direction dans les diverses parties du granule. C'est dans la même situation que se trouvent aussi les plans de Böhm

Dans de pareilles conditions la détermination d'une valeur moyenne de l'angle compris entre l'axe optique et la normale au plan de Böhm, devient illusoire, de sorte que les mesures des angles ne peuvent pas servir pour les calculs cristallographiques.

Dans nos recherches nous avons déterminé la position de l'axe optique et de la normale au plan de Böhm pour chaque sous-individu d'un granule. Pour mieux apprécier leur position cristallographique, nous avons choisi les granules qui présentent plusieurs séries de plans de Böhm.

Dans nos déterminations, nous avons utilisé la platine universelle de Fédorow. Nous avons exprimé les données expérimentales en des

valeurs angulaires φ^0 et ϱ^0, qui peuvent servir à la construction des projections stéréographiques pour chaque granule.

Nous reconnaissons que la méthode n'est pas assez précise, car l'appréciation par tâtonnements de la position finale de l'axe optique, ou des plans de Böhm, est très subjective. L'appréciation de l'angle ϱ^0 est beaucoup moins précise que celle de l'angle φ^0. Les erreurs produites par la déviation du rayon réfracté par l'hémisphère supérieur de la platine Fédorow sont négligeables, parce que l'indice de réfraction du verre ($N = 1,554$ et $N = 1,553$) est approché du celui du quartz. En général les erreurs peuvent atteindre quelques degrés.

Nous avons choisi pour notre étude les granules de quartz compris dans des tectonites de fusion (Schmelztectonite), étant donné que dans ces roches l'intensité de la déformation est moindre que dans les schistes cristallins. Nous espérons que dans ces conditions il sera possible de trouver les directions des plans de Böhm dans les premiers stades de la déformation du cristal de quartz.

Nous donnons dans les tableaux I–V une première série de déterminations faites sur des granules allotriomorphes de quartz, provenant d'un granodiorite de Carabalu, Massif de Greci – Dobrogea [10]). Dans une section de cette roche, nous avons déterminé, par la méthode usuelle, les lamelles de Böhm pour 161 granules de quartz. Parmi ces granules, seulement quelques uns possèdent des séries multiples de plans de Böhm.

Ces derniers granules ont été réexaminés, en faisant des mesures pour chaque sous-individu à part *).

Nous avons donné un numéro d'ordre à chaque granule étudié dans le granodiorite de Carabalu. Voici les observations faites sur les granules à plusieurs séries de plans de Böhm.

Granule 67. Dans ce granule nous avons examiné un seul sous-individu, à trois séries de plans de Böhm. Les valeurs des angles trouvés, sont consignés dans le tableau suivant (I).

---

*) *Note.* Dans les tableaux qui suivent, nous avons noté les sous-individus de quartz par les lettres *a, b, c, d, ...*; les plans de Böhm appartenant aux différentes séries, par *T, T', T''*,... Pour indiquer à quel sous-individu appartient chaque série de plans, nous avons ajouté l'indice respectif *Ta, Tb, T'a, T'b*...

S'il existe plusieurs plans vicinaux dans une même série, nous les avons notés alors par des indices à accents successifs *Ta, Ta', Ta''*... En ce qui concerne la séparation en plusieurs séries, pendant l'observation au microscope, nous mentionnons qu'elle est quelquefois subjective. Sur les diagrammes tracés avec les données expérimentales, nous avons constaté qu'une partie des plans considérés par nous comme faisant partie de deux séries différentes, sont en réalité des plans vicinaux.

Granule 127. Dans ce granule nous avons observé seulement deux sous-individus tous les deux ayant l'extinction nette.

Les plans *Ta* et *Tb* présentent seulement quelques stries partiales; les plans *T"a* et *T"b* ont des angles variables.

TABLEAU I

Granodiorite de Carabalu (Greci). Granule 67.

Sous-individu	Position de l'axe optique		Position des normales aux plans de B ö h m.								
			I-ère série			II-ème série			III-ème série		
	φ^0	ρ^0	T	φ^0	ρ^0	T'	φ^0	ρ^0	T"	φ^0	ρ^0
a	94°,50'	88°	Ta	66	87 inf, ↓ 86 sup.	T'a	82	88	T"a	48	79,30'
				246							
			moy	246	89,30'						
						T'a'	82	82			

Les stries *T"a"'* sont situées au bord du granule. Les plans *T"b'* ont des angles qui varient entre deux limites approchées.

Les valeurs angulaires trouvées sont consignées dans le tableau II.

Granule 132. Dans la section de ce granule, n'est visible qu'un seul sous-individu qui contient deux séries de plans de B ö h m. Les valeurs angulaires trouvées sont consignées dans le tableau III.

TABLEAU III

Granodiorite de Carabalu (Greci). Granule 132

Sous-individu	Position de l'axe optique		Position des normales aux plans de B ö h m					
			I-ère série			II-ème série		
	φ^0	ρ^0	T	φ^0	ρ^0	T'	φ^0	ρ^0
a	120°,30'	31°,30'	Ta	142°,20'	57°,12'	T'a	106°	49°
			Ta'	139°,20'	58°			

TABLEAU II.

Granodiorite de Carabalu (Greci) Granule 127.

Sous-individu	Position de l'axe optique		Position des normales aux plans de Böhm										
			I-ère série			II-ème série			III-ème série				
	φ^0	ϱ^0	T	φ^0	ϱ^0	T'	φ^0	ϱ^0	T''	φ^0	ϱ^0		
a	40°,10′	87°,30	Ta	200°	85°,40′	T'a	113°	58°,30′	T''a	variable			
			Ta′	199°	83°				T''a′	292°,30′	51°,30′		
									T''a″	287°,30′	47°,30′		
									T''a‴	264°	49°		
b	41°,55′	87°,36′	Tb	203°,30	86°,30′	T'b	112°	56°,30′	T''b	variable	52°		
			Tb′	201°,5′	83°				T''b′	267°,30′ / 267°, 8′	51°,30′		
									T''b″	289°	49°,30′		
									T''b‴	273°	49°		

Granule 158. Nous avons distingué dans ce granule dix sous-individus (Fig. 2) parmi lesquels seulement six présentent des plans de Böhm. Les sous-individus *f* et *k* constituent des zones de passage vers d'autres sous-individus.

Les valeurs angulaires trouveés sont consignées dans la tableau IV.

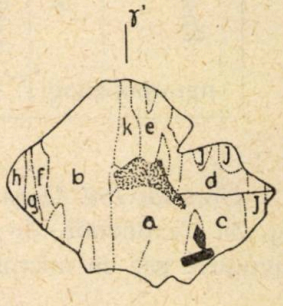


Fig. 2.

T A B L E A U IV

Granodiorite de Carabalu (Greci). Granule 158

Sous-individu	Position de l'axe optique		Position des normales aux plans de B ő h m								
			I-ère série			II-ème série			III-ème série		
	φ^0	ϱ^0	T	φ^0	ϱ^0	T'	φ^0	ϱ^0	T''	φ^0	ϱ^0
a	148°,30′	67°,32′	Ta	346°	87°,30′						
b	148°	65°,53′	Tb	346°,30′	86°	T'b	330°	88°	T''b	141°	88°
			Tb′	345°,30′	84°				T''b′	324°	88°
			Tb″	344°,30′	84°						
			Tb‴	165°,30′	89°						
c	150°,20′	65°,17′									
d	147°,26′	63°, 7′	Td	346°,45′	85°,30′						
e	147°,36′	66°,36′	Te	165°	85°						
f	153°	63°,42′				T'f	151°	89°			
g	156°,30′	64°,18′									
h	150°,21′	63°,30′									
j	150°, 6′	64°,50′	Tj	349°	90°						
k	150°										

Granule 159. Dans ce granule sont visibles six sous-individus (Fig. 3). L'extinction du sous-individu *f* est influencée par la tension provoquée par un microlithe de plagioclase voisin. Entre sous-indivi-

dus *a—d*, il se trouve de stries de transition Ta—*d*. Dans le sous-individu *d* apparaissent quelques stries locales *T'''d'*.

Les valeurs angulaires trouvées sont consignées dans le tableau V.

Granule de quartz provenant d'une tonalite de Carabalu.

Ce granule présente un intérêt, parce qu'il conserve des faces propres au cristal. Le granule se trouve dans une tonalite de Carabalu, qui est aussi une tectonite de fusion, comme la roche précédente [10]). Les valeurs angulaires sont consignées dans le tableau VI.

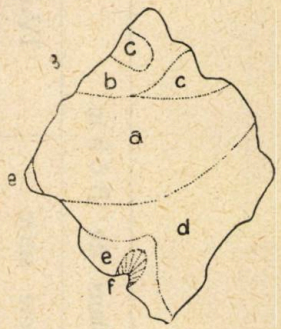


Fig. 3.

TABLEAU VI

Tonalite de Carabalu (Greci). Ech. 14. Granule 106

	φ^0	ϱ^0
Axe optique	164°	48°
Face A	324°	73°,40′
„ B	110°	77°
„ C	9°,30′	87°,20′
„ D	85°	74°,20′
„ F	225°	60°,15′
Plan Ta	141°,30′	65°,30′
„ T'a	140°	64°,30′
„ Tb	146°,30′	67°,40′

Dans les cas précédents nous avons fait des mesures sur les granules allotriomorphes de quartz qui présentent des déformations assez prononcées, de nature plastique ou rupturale. Parce que ces granules n'ont pas leur contour propre, les positions des plans de Böhm ne peuvent être rapportées qu'à l'axe. Pour trouver d'autres directions cristallographiques, nous avons fait des mesures supplémen-

T A B L E A U V

Granodiorite de Carabalu (Greci) Granule 159

Sous-individu	Position de l'axe optique		Position des normales aux plans de B ö h m												
			I-ère serie			II-ème série			III-ème série			IV-ème série			
	φ^0	ϱ^0	T	φ^0	ϱ^0	T'	φ^0	ϱ^0	T''	φ^0	ϱ^0	T'''	φ^0	ϱ^0
a	218°,30′	87	Ta	269°,30′	59°				T''a	215°,24′	80°			
b	218°,36′	83°	Tb	272°	54°				T''b	211°	79°,30′			
c	215°,14′	83°	Tc	275°	56°,30′				T''c	204°,30′	74°			
d	39°,25′	89°	Td	266°	54°,30′	T'd	263°	54°				T'''d	225°,45′	88°,30′
						T'd'	253°	66°,30′				Ta'''-d	222°,30′	80°
						T'd''	258°,30′	65°,30′				T'''d'	241°,30′	82°,30′
e	40°,49′	88°				T'e	261°,30′	61°						
f	224°	89°												

taires sur des granules provenant d'autres roches moins déformées. Dans de pareilles roches, nous avons trouvé des granules qui conservent au moins une partie de leurs faces cristallographiques.

Nous avons essayé d'examiner ainsi des phénocristaux de quartz appartenant aux porphyres quartzifères. Dans les porphyres quartzifères microgranitiques examinés par nous, les phénocristaux de quartz ont leur contour arrondi, de sorte que les faces ont disparu. Dans les porphyres quartzifères granophyriques, au contraire, les phénocristaux de quartz, quoique assez corrodés, conservent encore une partie de leurs faces. Ces derniers cristaux ne présentent pas d'extinctions ondulaires distinctes : toutefois ils ont de nombreuses stries de Böhm.

La détermination de l'angle ϱ^0 est moins précise que celle de l'angle φ^0 parce que, à côté des autres erreurs commises, s'ajoute aussi le fait que les faces du quartz ne sont pas nettes, étant percées par des microlithes d'orthose appartenant aux formations granophyriques. D'autre part, la déformation des cristaux de quartz provoque le déplacement des pôles des faces bipyramidales entre eux, si bien que, dans la projection stéréographique, les pôles ne tombent pas dans leur position idéale.

Dans les tableaux VII, VIII, on trouve les valeurs déterminées pour les angles φ^0 et ϱ^0 dans deux cristaux de quartz appartenant aux porphyres quartzifères granophyriques.

1. *Quartz bipyramidé du porphyre quartzifère de Lozova (Dobrogea).*

Ce porphyre granophyrique possède de nombreuses formations sphérolithiques [11]). Le phénocristal examiné (Fig. 4) présente des

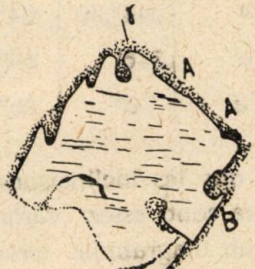


Fig. 4.

T A B L E A U VII

Porphyre quartzifère de Lozova

Quartz bipyramidé

	φ^0	ϱ^0
Axe optique	132°,30′	87°,30′
Face *A*	76°,40′	84°,20′
„ *A′*	80°	84°
„ *B*	180°,30′	89°
Plan *Ta*	112°,30′	78°
„ *Ta′*	108°,20′	73°,30′
„ *Ta″*	107°,10′	71°,20′

parties non corrodées des faces *A* et *B*; à l'intérieur du cristal on observe les plans de Böhm *Ta*, *Ta'* et *Ta''*.

L'extinction onduleuse est peu évidente.

2. *Quartz bipyramidé du porphyre quartzifère de Coşlugea, (Balabancea, Dobrogea du Nord* [11]). *Section 529.*

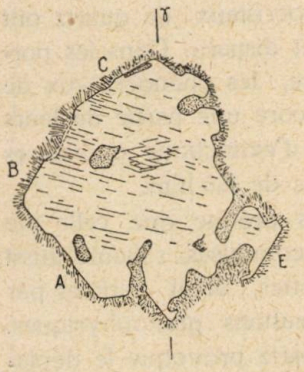


Fig. 5.

A ce cristal (Fig. 5) on observe seulement une faible extinction onduleuse, la différence d'extinction étant approximativement 1^0 à 2^0. La déformation n'est pas rupturale, elle présente seulement un caractère plastique, de sorte qu'il n'y a pas de sous-individus.

C. *Discussions.*

Nous avons calculé les distances polaires ϱ comprises entre l'axe optique et les normales aux plans de Böhm, avec les angles φ^0 et ϱ^0 déterminés au moyen de la platine de Fédorow. Les valeurs de ces angles, pour les granules allotriomorphes de quartz, sont consignées dans le tableau IX.

TABLEAU VIII

Porphyre quartzifère de Coşlugea, (Ech. 529). Quartz bipyramidé

	φ^0	ϱ^0
Axe optique	$2^0,30'$	$61^0,45'$
Face *A*	$306^0,40'$	$83^0,45'$
„ *B*	58^0	$67^0,56'$
„ *C*	210^0	81^0
„ *E*	57^0	71^0
Plan *Ta*	$344^0,30'$	64^0
„ *Ta'*	346^0	$69^0,30'$
„ *T'a*	0^0	$86^0,36'$

De l'examen du tableau IX, on constate que les inclinaisons des plans de Böhm par rapport à l'axe optique sont assez variables, depuis $\varrho = 6^0$ jusqu'à $\varrho = 77^0 55'$. En traçant un diagramme avec les distances polaires et les nombres de fréquence des plans, on constate que la variation de ces angles n'est pas continue; il se produit, au contraire, des agglomérations pour certaines valeurs de ϱ. On distingue trois groupes d'agglomérations (Fig. 6):

TABLEAU IX

Les distances polaires ϱ entre l'axe optique et les normales aux plans de Böhm

Gr. 67		Gr. 127		Gr. 132		Gr. 158		Gr. 159	
T	ϱ	T	ϱ	T	ϱ	T	ϱ	T	ϱ
Ta	28°,49′	Ta	21°,17′	Ta	29°,35′	Ta	30°,17′	Ta	55°,33′
Ta	29°,26′	Ta′	23°,10′	Ta′	29°,24′	Tb	33°,23′	T″a	7°,39′
T′a	12°,49′	T′a	74°, 5′	T′a	19°,45′	Tb′	34°,37′	Tb	56°,36′
T′a′	14°, 7′	T″a	— —			Tb″	34°, 8′	T″b	8°,17′
T″a	47°,16′	T″a′	77°,52′			Tb‴	28°,40′	T c	60°,59′
		T″a″	75°,16′			T′b	26°,11′	T″c	13°,50′
		T″a‴	58°,59′			T″b	23°, 8′	T d	56°,42′
		T b	19°,20′			T″b′	26°,24′	T′d	54°,51′
		Tb′	22°,49′			T d	36°,31′	T′d′	40°,48′
		T′b	72°, 7′			T′f	25°,22′	T′d″	45°,39′
		T″b	— —			T j	31°, 6′	T‴d	6°,48′
		T″b′	58°,18′					T‴d′	23°,37′
		″	58°,21′					T‴a-d	11°,25′
		T″b″	74°,25′					T′e	49°,46′
		T″b‴	63°,30′						

I-er groupe avec des valeurs comprises entre 8 et 36^0
II-ème „ „ „ „ „ „ 53 „ 59^0
III-ème „ „ „ „ „ „ 72 „ 75^0.

En tenant compte des erreurs expérimentales, qui peuvent affecter la valeur de quelques degrés, on peut expliquer l'agglomération des valeurs de l'angle ϱ dans le premier groupe, qui est plus vaste à cause de la présence de plusieurs plans de Böhm, tandis que les agglomérations dans les autres groupes, seraient dues peut être à la présence d'un nombre plus restreint ou unique de plans de Böhm, pour chaque groupe.

Si l'on suppose que les plans déterminés correspondent aux faces de première et de deuxième espèces, alors, d'après les valeurs de ϱ, nous pouvons apprécier les valeurs des indices de notation de ces plans. On constate que des fréquences plus grandes apparaissent pour les plans qui ne constituent pas des faces fréquentes de cristal et des fréquences plus rares ou nulles pour les plans qui constituent des faces fréquentes de cristal. Il résulte donc *un antagonisme entre les orientations de plans de Böhm et celles de faces les plus fréquentes du cristal de quartz.* Ce rapport apparait mieux si l'on porte sur le même diagramme les valeurs de ϱ pour les principales faces de quartz (Fig. 6).

Compte tenu de toutes ces considérations, il résulte que les plans de Böhm ont un nombre assez considérable d'orientations cristallographiques. Pour voir si les plans de Böhm, qui apparaissent sur un même cristal, sont entre eux comme des plans d'une même espèce ou d'espèces différentes, nous avons calculé les angles compris entre les sections principales $AOT \wedge AOT'$, avec les angles φ^0 et ϱ^0, déterminés expérimentalement.

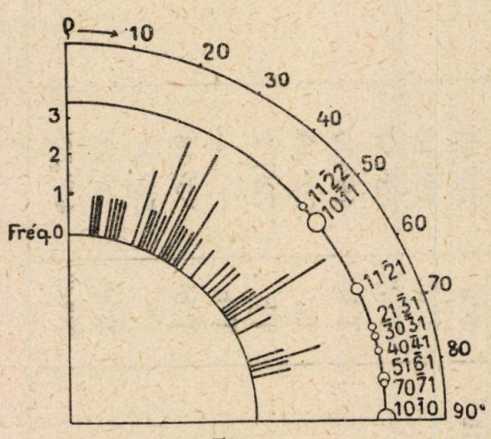


Fig. 6.

Quand les plans sont de même espèce, les angles calculés sont de 60^0 ou 120^0; si les plans sont de I-ère et II-ème espèces les angles seront de 30^0 ou 90^0 et si un des plans est de I-ère ou deuxième espèce et l'autre de III-ème, alors l'angle aura une valeur différente. Nous indiquons dans le ta-

bleau X quelques uns de ces angles calculés et ceux des espèces des plans.

TABLEAU X

Granule	Plans de Böhm	Valeurs	Espèces
67	A0.T'a ∧ A0.T''a	12°,14'	I-III
67	A0.T a ∧ A0.T a	0	I-I
127	A0.T a ∧ A0.T' a	13°,25'	I-III
127	A0.T a ∧ A0.T''a'	53°,58'	I-III(I?)
132	A0.T a ∧ A0.T' a	73°,16'	I-III
158	A0.T b ∧ A0.T b	30°,35'	I-II
158	A0.T b ∧ A0.T'' b	53°,10'	I-III
159	A0.T a ∧ A0.T'' a	77°,28'	I-III
159	A0.T b ∧ A0.T'' b	115°,33'	I-III(I?)
159	A0.T c ∧ A0.T'' c	104°,11'	I-III

Si l'on suppose qu'une partie des plans de Böhm d'un même granule sont de I-ère ou II-ème espèce, alors, d'après les données mentionnées plus haut, le reste serait formé dans la majorité des cas par des plans de III-ème espèce. Comme on le voit, les orientations des plans de Böhm sont assez variées par rapport à l'angle *AOT-AOT'*.

Considérant que la méthode de calcul cristallographique trigonométrique ne donne pas de résultats satisfaisants, en ce qui concerne les orientations des plans de Böhm, nous avons cherché à appliquer une autre méthode basée sur la statistique et la projection stéréographique. Dans ce but, nous avons construit les projections stéréographiques de tous les sous-individus d'un même granule, en employant les valeurs des angles φ^0 et ϱ^0 trouvées expérimentalement. Ensuite, nous avons rabattu les pôles, de manière que l'axe optique de chaque sous-individu se place dans le centre du cercle de projection. On peut supposer que pendant la déformation d'un granule de quartz, il s'est produit un mouvement relatif entre les sous-individus, qui se traduit par un écartement angulaire de leurs axes optiques, auquel s'ajoute un mouvement de rotation autour de leurs axes.

Par le rabattement on rétablit la position initiale des sous-individus du granule seulement en ce qui concerne le mouvement d'écartement axiale des axes optiques, mais non le déplacement dû au mou-

vement de rotation. On reconnaît l'influence de ce dernier mouvement sur le diagramme par les valeurs variées de l'angle φ pour les plans de Böhm d'une même série dans des sous-individus différents. D'ailleurs ces déplacements de rotation ont de petites valeurs de quelques degrés, parce que les pôles *Ta* et *Tb* tombent en des positions voisines.

Sur les diagrammes on peut mesurer directement, au moyen du réseau Wulff les angles $AO.T - AO.T'$.

Dans quelques unes de nos projections stéréographiques rabattues, nous avons constaté que les pôles *T* s'ordonnent sur un grand cercle.

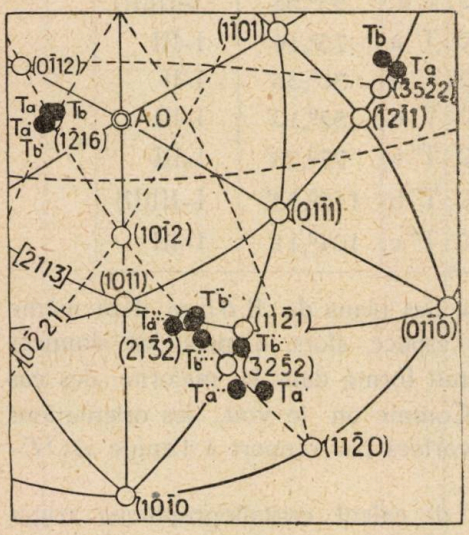


Fig. 7.

Ainsi dans les diagrammes des sous-individus 127 *a* et 127 *b* (Fig. 7), les normales *T*, à l'exception des normales *T'a* et *T'b* s'ordonnent sur un grand cercle éloigné approximativement de 18-20°, par rapport à l'axe (le pôle du cercle a la valeur de l'angle $\varrho = 70\text{-}72^0$).

Comme on le sait, d'après Niggli, dans le cristal de quartz, les faces sont déterminées par de certaines zones principales.

Par analogie, nous supposons que les plans de Böhm s'ordonnent en zones et que le cercle mentionné plus haut représente une pareille zone. Cette zone est toute différente de celles indiquées par Niggli.

Le cercle indiqué par nous se superpose dans la projection stéréographique du cristal de quartz sur le cercle de zone qui contient les faces connues du quartz (2$\bar{1}\bar{1}$0), (10$\bar{1}$2), ($\bar{1}$102) et ($\bar{2}$110). L'axe de zone calculé d'après ces faces est [0$\bar{2}$21], la distance polaire calculée est $\varrho = 72^0 23'$. En superposant la position stéréographique du granule 127 sur celle du cercle de zone [0$\bar{2}$21], on constate que les pôles *T'a* et *T'b* tombent près du pôle ($\bar{3}$5$\bar{2}$2), au voisinage du point d'intersection de cette zone avec une des zones principales de Niggli [$\bar{2}$113].

On voit donc que les zones indiquées par Niggli peuvent avoir aussi un rôle dans la détermination des positions des plans de Böhm.

Pour apprécier les positions des autres pôles des plans de Böhm, nous avons construit une projection générale (Fig. 1) dans laquelle nous avons indiqué aussi les zones de Niggli à côté des zones [0221]. Nous avons essayé de superposer sur cette projection stéréographique les projections des plans de Böhm des granules par nous étudiés. Voici les résultats obtenus :

Granule 132. Les trois pôles *Ta*, *Ta'*, *T'a* tombent sur un cercle de zone [0$\bar{2}$21], à savoir *Ta* et *T'a* à proximité de la face (10$\bar{1}$2) et *T'a* à proximité du pôle (1$\bar{1}$04) (Fig. 8).

Granule 158. Les pôles des plans de Böhm s'agglomèrent en deux groupes (Fig. 9). Les pôles *Ta*, *Tb*, *Tb'*, *Tb''*, *Tb'''*, *Td*, *Te*, *Tf*, tombent sur un cercle [0$\bar{2}$21] à proximité de la face (1$\bar{1}$02) ayant une tendance évidente à s'ordonner au long de cercle. Les autres pôles tombent à proximité du pôle (1$\bar{2}$16) qui se trouve à l'intersection de deux zones [0$\bar{2}$21] ; ils ont tendance à s'ordonner parallèlement à un de ces deux cercles de zone, ayant l'angle $\varrho = 68^0$ au lieu de $72^0 23'$ calculé pour l'axe de zone [0$\bar{2}$21].

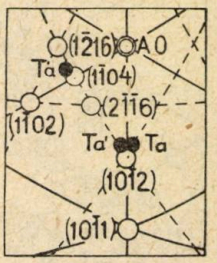


Fig. 8.

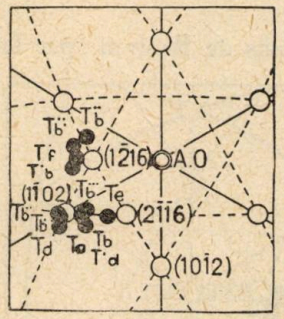


Fig 9.

On constate donc une tendance des pôles des plan vicinaux à se régler suivant de grands cercles.

Granule 67. (Fig. 10). Le plan *Ta''* tombe justement dans le pôle (4$\bar{1}$3$\bar{4}$) à l'intersection de la zone [0$\bar{2}$21] avec une zone [$\bar{2}$113] Le pôle variable *Ta* tombe près du pôle (10$\bar{1}$2), à l'intersection de deux cercles [0221], en présentant des positions intermédiaires entre les deux cercles. Les pôles *Ta* et *T''a* tombent sur un cercle qui peut être superposé à celui de la zone [0$\bar{2}$21].

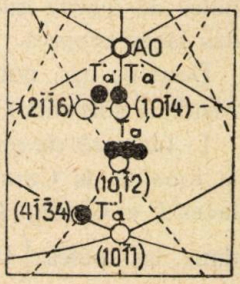


Fig. 10.

Les pôles *T'a* et *T'a'* s'ordonnent parallèlement et à proximité du cercle [$\bar{2}$021]. On constate encore une fois que le développement des plans de Böhm a lieu suivant des zones.

Granule 159. Les pôles des plans de Böhm s'agglomèrent en deux groupes, un groupe plus rapproché de l'axe comprenant *T'' a*, *T'' b*, *T'' c*, *T''' d*, *T''' d'*, *T''' a—d*, l'autre plus

éloigné contenant *Ta, Tb, Tc, T'e, Td, T'd', T'd'', T'd.* (Fig. 11).

Nons constatons dans le dernier groupe que les pôles *Ta, Tc, T'd'* et *T'd''*, s'ordonnent suivant le cercle [0$\bar{2}$21], sur la portion comprise entre (3$\bar{1}$22) et approx. (5$\bar{1}$46). Les pôles *Tc, Tb, Td, T'd* s'ordonnent sur le cercle de la zone principale [1$\bar{1}$23] entre les pôles (3$\bar{1}$1$\bar{2}$) et (10$\bar{1}$1).

Dans le groupe des pôles plus rapprochés de l'axe optique, nous avons constaté que le pôle *T''' d'*, se place dans (21$\bar{1}$6) à l'intersection de deux cercles de zones [0$\bar{2}$21]. Les autres pôles tombent entre ces cercles et la base (0001). On ne peut pas apprécier les espèces de ces plans, vu leur petite distance polaire.

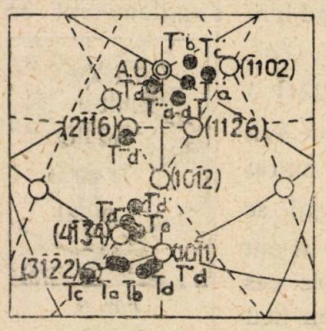


Fig. 11.

Dans l'ensemble on constate que la majorité des pôles s'ordonnent sur les cercles de zone [0$\bar{2}$21] formant des agglomérations de préférence aux intersections des zones. Les plus grandes agglomérations se trouvent à proximité des pôles (10$\bar{1}$2), (3$\bar{1}$22), (12$\bar{1}$6) et (11$\bar{0}$4).

Nous avons déterminé les positions des plans de B ö h m par la superposition des projections des plans *T* sur la projection générale du quartz. Comme il pourrait exister parfois quelque incertitude sur la détermination de la superposition, vu qu'en dehors de l'axe optique il n'existe aucune direction cristallographique identifiable, nous avons complété l'étude sur des granules de quartz qui conservent encore des faces propres.

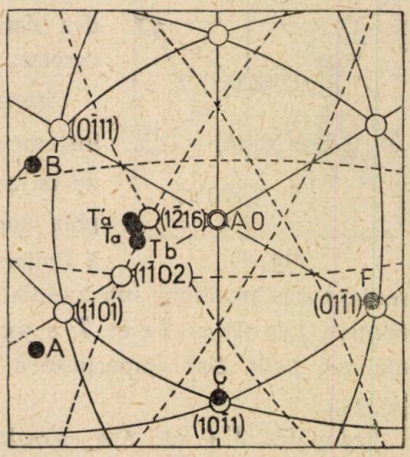


Fig. 12

Dans ce cas, nous avons obtenu les résultats suivants :

1. *Granule de quartz*, provenant de la tonalite de Carabalu (Ech. 106). Les faces *F* et *C* (Fig. 12). du cristal tombe dans les pôles $\{10\bar{1}1\}$; les faces *A* et *B* sont déplacées approximativement de 10^0 par rapport aux pôles $\{10\bar{1}1\}$. Les pôles des plans de B ö h m se trouvent agglomérés à proximité du pôle $\{12\bar{1}6\}$. Si

nous considérons que le déplacement des faces bipyramidales du cristal examiné sont dues à une déformation, alors il doit exister au moins deux sous-individus: l'un avec des faces *F* et *C* et l'autre avec les faces *A* et *B*. Par un nouveau rabattage, la face *A* tombe en $\{10\bar{1}1\}$ et la face *B* en $\{10\bar{1}1\}$, alors les plans de Böhm occupent des places rapprochées, à savoir le pôle *Tb* près de $(1\bar{2}16)$ et *Ta* et *T'a* près de $(01\bar{1}4)$.

2. *Granule de quartz bipyramidale* provenant de porphyre quartzifère de Coşlugea (Balabancea) (Fig. 13). La face bipyramidale *A* tombe à proximité de $(\bar{1}101)$, les faces *B* et *E* à proximité du pôle $(1\bar{1}01)$ et la face *C* un peu plus loin du pôle $(01\bar{1}1)$. Les plans *Ta* et *Ta'* se trouvent sur un cercle de zone $[0\bar{2}21]$ au voisinage du pôle $(1\bar{1}04)$, le plan *Ta'* sur un pareil cercle de zone à proximité du pôle $(11\bar{2}6)$.

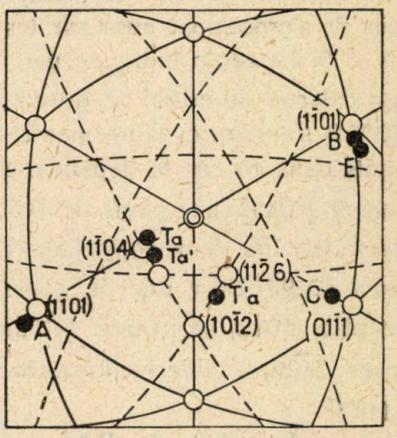


Fig. 13.

On constate donc que la position des plans de Böhm est en étroite dépendance des cercles de zone [0221] et les plans $\{\bar{1}2\bar{1}6\}$ et $\{10\bar{1}4\}$ sont juste ceux trouvés par nous dans les granules allotriomorphes de quartz provenant du granodiorite de Carabalu.

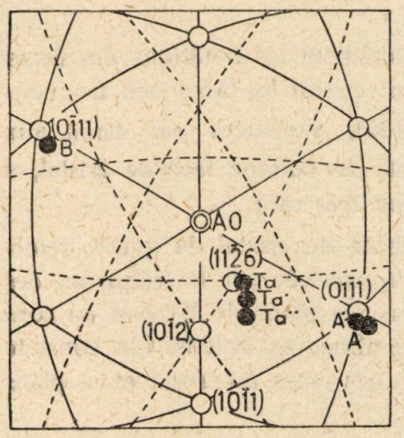


Fig. 14.

3) *Granule de quartz bipyramidale*, pouvenant du porphyre quartzifère de Lozova (Fig. 14) (Ech. 360). Les plans *A* et *A'* tombent près du pôle $(01\bar{1}1)$, la face *B* dans le pôle $(0\bar{1}11)$.

Le pôle du plan *Ta* tombe en $(11\bar{2}6)$, à l'intersection de deux cercles de zone $[0\bar{2}21]$; les plans vicinaux sont déviés de quelques degrés.

Comme on le voit, les déterminations faites sur ces derniers cristaux vérifient les positions des plans de Böhm, attribuées par nous.

Conclusions

1. De nos recherches il résulte que dans les cristaux de quartz qui conservent encore des faces bipyramidales $\{10\bar{1}1\}$, on ne peut pas observer la migration de l'axe optique supposée par Anna Hietanen, étant donné que cet axe garde sa position par rapport aux faces du cristal.

2. Les plans de Böhm ont des orientations différentes. Ils se développent en séries de plans vicinaux qui s'ordonnent avec leurs pôles sur un grand cercle, de préférence le cercle $[02\bar{2}1]$, mais dans d'autres cas ils s'ordonnent aussi sur les cercles de zone indiqués par Niggli.

3. La règle indiquée par Niggli d'après laquelle la morphologie externe du cristal de quartz est dépendante des zones $[\bar{2}113]$, $[1\bar{2}10]$, [0001] s'applique d'une manière analogue pour les plans de Böhm, mais dans ce cas la dépendance tient en général d'une autre zone, à savoir $[02\bar{2}1]$. Les plans de Böhm s'agglomèrent de préférence à l'intersection de deux zones $[02\bar{2}1]$, ou moins souvent à l'intersection d'une zone $[02\bar{2}1]$ avec une de celles indiquées par Niggli. Par exemple le plan $(10\bar{1}2)$ se trouve à l'intersection de deux zones $[02\bar{2}1]$, et le plan $(3\bar{1}\bar{2}2)$ à l'intersection de la zone $[02\bar{2}1]$ avec la zone de Niggli $[\bar{1}\bar{1}23]$

4. Les plans de Böhm déterminés par nous, dans l'ordre de leur fréquence, se trouvent dans la proximité des pôles suivants : $\{10\bar{1}2\}$, $\{\bar{1}2\bar{1}6\}$, $\{3\bar{1}\bar{2}2\}$, $\{10\bar{1}4\}$.

Dans le tableau de Hintze [12]) contenant les notations des faces du cristal de quartz, nous trouvons aussi, parmi les faces peu fréquentes, celles notées $d = (12\bar{1}2)$ et $L = (3\bar{1}\bar{2}2)$, attribuées par nous aux plans de Böhm Le plan $(\bar{1}2\bar{1}6)$ n'existe pas comme face de cristal, et la face $(10\bar{1}4)$ est indiquée comme étant très rare.

5. Tandis que la morphologie externe du cristal de quartz déterminée par les zones de Niggli, est caractérisée par la fréquence des faces de prisme et de rhomboèdres aigus, les plans de Böhm au contraire correspondent à des faces de rhomboèdres aplatis. On constate donc un antagonisme entre l'orientation des faces du cristal et les plans de Böhm.

6. Dans nos recherches il est une partie des plans supposés par les auteurs mentionnés au commencement de ce mémoire, que nous n'avons pas trouvée comme par exemple le plan $\{10\bar{1}1\}$.

L'absence, ou la petite fréquence de ce plan, est due à l'antagonisme indiqué plus haut.

Faculté des Sciences
de l'Université
de Jassy

(Reçu le 1 Mars 1948)

Travaux cités

1. August Böhm – *Ueber die Gesteine des Wechsels* Tschermak Min. u. Petrographische Mitteilungen. 1883, p. 204.
2. Bruno Sander – *Ueber Zusammenhänge zwischen Teilbewegungen und Gefüge in Gesteinen.* Mineralog. u. petrogr. Mitt. XXX, 1911, p. 288. Dans ce travail on note que la dénomination de „Böhmische Streifung" a été proposée par F. Becke d'après le premier observateur.
3. O. Mügge – *Der Quarzporphyr der Bruchhäuser Steine in Westfalen.* N. Jahrbuch f. Mineralogie etc. B B. X. 1896. p. 766 etc.
4. G. Fischer – *Mechanisch bedingte Streifungen an Quarz.* Zentralblatt Min. Geol. Pal. Abt. A. 1925, p. 210–13.
5. Walter Schmidt – *Untersuchungen über die Regelung des Quarzgefüges kristallinen Schiefer.* Centralbl. Min. Geol. Pal. Abt. A. 1925 p. 367–368. Idem, Zeitschrift f. Kristallographie vol. 63 (1926) pag. 166–168.
6. P. Niggli – *Beziehungen zwischen Struktur und ausserer Morphologie am Quarz.* Zeitschr. f. Krist. B 63 (1926), p. 294.
7. Walter Schmidt – *Zur Quarzgefügeregel.* Fortschritte der Min. Krist. u. Petr. B. XI. 1927, p. 334–336.
8. Bruno Sander – *Gefügekunde der Gesteine.* Wien. 1930.
9. Anna Hietanen – *On the Petrology of finnish Quartzites.* Bull. de la Commission Géologique de Finlande No. 122, Helsinki. 1938.
10. Mircea Savul – *Les inclusions fluides comme facteur important dans l'analyse pétrologique structurale „Petrofabric analysis".* Bull. Sect. Scient. Acad. Roum. Tome XXX–4.
11. Mircea Savul – *Le granite de Coşlugea* (Dobrogea). Comtes rendus de l'Institut Géologique de Roumanie, Tome XXI, 1937, p. 132–154, spéc. 152.
12. C. Hintze – *Handbuch der Mineralogie,* Leipzig, 1897. Bd. I. p. 1266 etc.

LA RÉGION CRISTALLINE DU SUD-OUEST DE LA BUCOVINE

par

GEORGES MASTACAN

A partir de l'année 1853 la région du S. O. de la Bucovine a été l'objet de nombreuses études.

La région est constituée entièrement d'une masse de schistes cristallins, recouverte dans certains endroits de l'intérieur, de dépôts du Mésozoïque inférieur. Ces sédiments se trouvent situés dans la vallée de la Bistritza entre Ciocăneşti et Vatra-Dornei, dans Poiana Pintenilor, au fond de la rivière Argestru et dans la vallée de la Putna.

En nous rapportant aux dépôts sédimentaires du Mésozoïque inférieur, qui sont localisés entre Ciocăneşti et Vatra-Dornei, on constate qu'entre Ciocăneşti et Iacobeni ils sont situés sur les deux versants de la Bistritza, et à partir de Iacobeni jusqu'à la vallée de l'Argestru, seulement sur le versant gauche de la Bistritza. A la base de ces sédiments se trouvent les dépôts du Trias inférieur, représentés par des conglomérés de Verucano. Vient ensuite un grès rouge violacé de Verucano, au dessus duquel se succèdent les calcaires dolomitiques de couleurs et grosseurs variables.

En 1854 B. Cotta [1]) et beaucoup plus tard, en 1917, Mogilnicki [2]) croyaient que les dépôts du Mésozoïque inférieur se trouvent intercalés entre les schistes cristallins.

En 1876 K. M. Paul [3]) leur attribuait la forme synclinale tandis que H. Quiring [4]), en 1917, et Th. Kräutner [5]), en 1925, leur a attribué aussi une forme synclinale mais limités par une faille du côté de l'est.

De toutes les études que nous avons faites jusqu'à présent sur ces sédiments, il résulte qu'ils ont la forme synclinale, mais non pas avec les flancs presque symétriques vis-à-vis d'un plan axial, comme il res-

sort du travail de K. M. Paul et ni avec le flanc estique faillé comme il résulte de ceux de Quiring et Th. Kräutner.

Nous avons constaté que ces sédiments forment un pli enchevauché dont il ne reste pas aujourd'hui que la partie synclinale et le flanc du côté de l'est en partie laminé et à cheval sur le flanc de l'ouest. Du côté de l'est du synclinal, on arrive ainsi à un rapport inverse avec le Verucano au dessus des calcaires.

D'autre part l'existence du conglomeré de Verucano du côté de l'est des dépôts de calcaire triasique, et pas celui du côté de l'ouest, comme il résulte des cartes plus anciennes comme celles de Quiring [4]) par ex. ou de Th. Kräutner [5]), fait que la faille avec laquelle ceux-ci limitent les sédiments triasiques à leur partie de l'est, ne puisse plus se maintenir.

Sur le versant gauche de la Bistritza, où se trouve le fond du synclinal, apparaissent les deux ailes mais sur le versant droit de la Bistritza, il n'y a que l'aile occidentale du synclinal qui se maintient, dans la région du Mont Suhărzelul, tandis que l'aile orientale qui vient à cheval a été entièrement érodée.

A l'extrémité occidentale de la région des schistes cristallins apparaissent les sédiments Crétaciques et Eocènes, connus déjà par les premiers explorateurs de la région et dont s'est occupé dernièrement de façon plus détaillée Th. Kräutner [5]).

La plus grande partie de la région comprise sur les deux versants de la Bistritza de sud-ouest de la Bucovine, est constituée par de roches cristallines.

Les recherches faites sur le terrain, de même que les études microscopiques nous ont permis de faire la division des roches cristallines de cette région en deux catégories :

1. Roches du type Epizonal,
2. Roches du type Mésozonal.

Entre ces deux catégories on distingue encore des roches intermédiaires, épi-mésozonales.

Dans la série des roches épizonales il y a des termes qui varient graduellement entre les différents types de roches.

Parmi les roches épizonales on distingue :

Des Gneisses sériciteux avec de l'albite pauvre en quartz. Ce sont des roches à structure granolépidoblastique et à texture schisteuse faiblement mis en évidence. Elles contiennent du feldspath plagioclassique acide à inclusions poekilitiques de chlorite et de séricite.

Nous attribuons l'origine de ces roches à certains sédiments pélitiques mélangés avec du matériel psamitique arcozique.

Schistes séricito-chloriteux à porphyroblastes d'albite. Ces roches présentent diverses variations pétrographiques. Elles ont une structure porphyroblastique et une texture parallèle rubanée. Les porphyroblastes d'albite se présentent sous forme isométrique. Certains porphyroblastes d'albite contiennent à leur intérieur des rangées d'inclusions entortillées sous forme de „S", indiquant par là le mouvement différentiel auquel ont été soumises les roches pendant la croissance du feldspath et qui a imprimé à la roche une structure ayant un caractère hélicitique.

Les porphyroblastes d'albite présentent aussi une légère structure zonaire.

La roche peut être considérée comme provenant du métamorphisme d'un sédiment de nature argileuse ou argilo-sablonneuse, avec un léger contenu de matière arcozique.

Gneisses sériciteux riches en quartz. Ces roches présentent des transitions vers les quartzites chlorito-sériciteux de même que vers les schistes à porphyroblastes d'albite. Dans la region étudiée elles occupent des grandes surfaces, notamment sur le versant gauche de la Bistritza.

Au microscope les roches présentent une texture parallèle et une structure granolépidoblastique, fréquemment avec une schistuosité par la cristallisation.

De telles roches peuvent être considérées comme provenant d'un matériel psamitique - arcozique et un peu de matériel pélitique.

Schistes chlorito-sériciteux. Les roches de cette nature ont une stratification fine et peuvent facilement cliver. La couleur de ces roches varie du vert foncé jusqu'au verdâtre selon le contenu variable de ces roches en séricite et chlorite. L'examen microscopique indique une masse fondamentale formée de séricite-chlorite, avec une stucture lépidoblastique et une texture parallèle hélicitique.

Le chlorite de la nature du pénine contient parfois des auréoles polichroïques assez fortes.

D'autres fois apparaît aussi la muscovite dans des proportions qui varient d'un cas à un autre.

Le matériel dont il provient est considéré comme étant un sédiment dédritique argileux.

Schistes séricito-chloriteux avec épidote, d'origine tufogène. La couleur de ces roches va du vert foncé jusqu'au vert jaunâtre sale.

L'étude microscopique indique pour ces types de roches une struc-

ture granoblastique et une texture schisteuse même schisteuse rubanée.

Nous attribuons la provenance de ces roches au métamorphisme de certains tufs ou tufites diabasiques.

Schistes chlorito-épidotiques. Ces roches présentent au fond une variété d'amphibolites à épidote passés en schistes chlorito-épidotiques et se rencontrent sur le versant occidental de la Bistritza.

Au microsope ces roches se présentent finement rubanées, avec une texture qui varie de celle massive et lamélaire jusqu'à celle faiblement schisteuse. Ce sont les roches associées généralement avec des amphibotites, et elles présentent un phénomène de métamorphisme rétrograde.

Amphibolites avec épidote. Ces types de roches et d'autres apparentées, ont constitué notre préoccupation antérieurement [6]). Ce sont des roches de couleur verte jusqu'au vert-gris, et la texture rubanée.

Au microscope, dans les parties riches en éléments léucocrates, on constate qu'elles ont une structure granoblastique et une schistuosité de cristallisation.

D'après les transformations que l'on observe chez certains minéraux composants de ces roches, il semblerait que la roche ait souffert le phénomène du métamorphisme rétrograde mis en évidence par différents caractères pétrographiques.

Schistes séricito-chloriteux avec du quartz. Au microscope ces roches indiquent une structure granolépidoblastique et une texture lamélaire rubanée.

Dans les couches léucocrates les granules de quartz sont allongés d'après la direction de schistosité et ils donnent à la roche un caractère de schistosité par cristallisation. D'autres fois les granules se trouvent angrénés irrégulièrement.

Dans les roches où la proportion de séricite est plus élevée on trouve individualisés aussi quelques porphyroblastes d'albite.

Dans cette région on rencontre de même des cas où, à côté des éléments composants du type principal, on trouve dans la roche aussi des nids de séricite et de muscovite.

En ce qui concerne l'origine de la roche, elle peut être considérée comme une roche argileuse qui va jusqu'à la roche argilo-sablonneuse métamorphosée en épizone.

Les Quartzites chlorito-sériciteux. Ce sont généralement des roches compactes.

Au microscope elles présentent une structure granoblastique et une texture schisteuse.

A côté du quartz primaire on rencontre aussi une variété de quartz fibreux, qui remplit les filons qui vont au travers de la roche.

Le feldspath apparaît dans des proportions beaucoup plus grandes que dans les roches séricito-chloriteuses avec du quartz et il est surtout en étroite liaison avec les couches de séricite-chlorite.

Les diverses variétés des quartzites chlorito-sériciteux associés très souvent avec les schistes séricito-chloriteux avec des porphyroblastes d'albite et avec les schistes séricito-chloriteux avec du quartz, occupent la plus grande partie de la région.

L'origine de ces roches peut être attribuée à certains matériaux de nature sédimentogène.

Les quartzites sont des roches compactes très riches en quartz. ils peuvent contenir aussi de petites quantités de chlorite et de séricite

Au microscope la structure de la roche apparaît granoblastique et très faiblement lépidoblastique, surtout dans les variétés qui contiennent du minerai micacé. La texture des roches se caractérise par une schistosité de cristallisation.

A son origine la roche semble avoir résulté du métamorphisme; d'une grès quartzitique mélangée parfois avec plus ou moins matériel pélitique.

Les Quartzites noirs. Ce sont des roches qui sont composées en général de quartz et de très peu de séricite.

La structure granoblastique et la texture laméllée ou schisteuse par cristallisation caractérise ces roches.

La couleur noire est due au pigment carboneux en assez grande quantité, et qui parfois se trouve déposé aussi intergranulairement.

Sur le terrain les roches sont assez bien développées, et occupent des surfaces entières.

Elles proviennent du métamorphisme de certains sédiments sablonneux avec beaucoup de restes riches en substances organiques.

Souvent les quartzites noirs sont en liaison avec les gisements de mangane, comme on en connaît déjà à Arşiţa. à Mestecăniş et à Tolovan, toutes situées autour de la localité Iacobeni.

En fait de roches épi-mésozonales on rencontre dans cette région les schistes chlorito-sériciteux avec de la biotite. Elles sont un peu plus compactes que les roches correspondantes de l'épizone et contiennent dans leur tissu fondamental de chlorite-séricite et aussi de petites feuilles de biotite avec des orientations différentes vis-à-vis de la direction de schistosité de la roche.

Dans la composition minéralogique de ces roches, on rencontre aussi le grenat en granules idiomorphes.

Dans la série mésozonale on distingue les types de roches suivants:

Schistes biotitiques avec muscovite. Les roches sont plus compactes et parcourues de filons de quartz dans différentes directions.

Au microscope elles montrent une structure granolépidoblastique et une texture orientée.

Lorsque la proportion de muscovite diminue, elles peuvent passer facilement en paragneisses plagioclasiques, avec lesquels, très souvent, on les trouve associés. De même on les trouve assez fréquemment aussi à côté des roches amphiboliques.

Le feldspath, sous forme de granules xénomorphes arrondis, est un plagioclase basique ayant de 25 à 30% Anortite.

La provenance de la roche peut être attribuée au métamorphisme dans la mésozone de certains sédiments argilo-sablonneux.

Gneisses biotitiques avec grenats Ce sont des roches avec différentes nuances de vert et une texture faiblement oculaire, à cause de porphyroblastes de grenat.

Le feldspath de nature plagioclasique de ces roches présente une structure zonaire inverse ayant au centre 5% *An.* et au bord 15% *An.*

Par le fait que la biotite présente une couleur brune verdâtre, à cause de sa transformation en chlorite, avec lequel on la trouve associée, cela indique que nous avons à faire à un stade diaftoritique de la roche.

En ce qui concerne l'origine de cette roche on peut supposer que la quantité d'argile dont elles ont pris naissance, a été plus réduite, parce que le minerai micacé se trouve dans la roche dans une proportion plus petite.

Les roches peuvent être le résultat du métamorphisme dans la mésozone d'un matériel granitique.

Paragneisses avec épidote et biotite. Les roches ont un aspect feuillu et sont parcourues de manière concordante de petits filons de quartz de grosseur relativement petite.

Au microscope elles présentent une structure granoblastique jusqu'à celle granolépidoblastique et une texture parallèle rubanée.

Le feldspath de la roche est de deux sortes: le feldspath plagioclasique contenant 5% *An.* et Schachbrettalbit provenant de la substitution du feldspath potassique.

Le phénomène diaftoritique se remarque aussi à la biotite, qui est transformée en partie en chlorite pseudomorphe.

L'origine de telles roches peut très bien mise en liaison avec le métamorphisme en mésozone d'un matériel psamito-pélitique.

Ces roches se trouvent toujours associées avec les amphibolites de la région de Vatra-Dornei-Iacobeni.

Comme roches apparentées de ce type, mentionnons les gneisses quartzeux avec épidote et grenat.

Paragneisses plagioclasiques. Ce sont des roches compactes, très peu stratifiées, de couleur variable.

Au microscope ces roches présentent une structure granolépidoblastique et une texture parallèle.

La transformation de la biotite en chlorite sous l'influence d'un procès diaftoritique se remarque aussi à ce type de roche.

Elles peuvent être considérées comme provenant du métamorphisme dans la mésozone d'un matériel argilo-sablonneux.

En dehors de ces types de roches mésozonales, on rencontre dans cette partie de la Bucovine, aussi une série d'amphibolites: amphibolites avec biotite et épidote, amphibolites avec calcite et amphibolites avec plagioclas.

Nous nous sommes déjà occupés autrefois [6]) des amphibolites avec biotite et épidote, lorsque nous avons montré que ces roches se caractérisent par un *facies* faiblement diaftoritique.

En ce qui concerne les amphibolites à calcite et plagioclases elles peuvent provenir du métamorphisme dans le mésozone d'un sédiment marneux qui a pu engendrer les amphibolites à calcite ou certains sédiments marins tufogènes, qui par le même processus de métamorphisme ont pu conduire à la formation des amphibolites plagioclasiques.

Les quartzites à biotite. Nous rencontrons encore les quartzites à biotite, qui appartiennent aussi à la série mésozonale et qui pourrait avoir leur équivalent dans les quartzites chlorito-sériciteux de l'épizone, dans lequel le chlorite correspondrait à la biotite.

Au microscope la roche présente une structure granoblastique et une texture schisteuse parallèle, pouvant être mis en évidence et une action diaftoritique soufferte par la roche.

Au dehors des roches épizonales et mésozonales énumérées et décrites sommairement jusqu'ici et dont l'origine peut être considérée généralement de nature „*Para*" exception faite de quelques-unes d'entr'elles, on rencontre aussi dans ce coin de la Bucovine des roches éruptives non métamorphosées.

Dans la catégorie des roches éruptives métamorphosées on peut classer les gneisses biotitiques ayant plus ou moins de zoïzit; les gneisses chloritiques ayant plus ou moins de zoïzit et les gneisses ayant deux espèces de feldspath.

Ces types de roches, comme l'on constate d'après les études effectuées jusqu'à présent, ont été soumises au phénomène du métamorphisme et ont reçu le caractère épizonal ou mésozonal, selon qu'elles ont été prises dans une zone ou dans l'autre.

Parmi les roches éruptives nonmétamorphosées, que l'on rencontre ici, nous citerons seulement les diabazes et les diabazes porphyriques, qui généralement occupent des positions concordantes (vis-à-vis de couches) par rapport aux couches entre lesquelles elles se trouvent, et qui du point de vue génétique semblent être en liaison avec les roches de la même espèce du cristallin de la Bistritza de la région Vatra-Dornei-Broşteni, que M. S a v u l[7]) a prouvé appartenir aux éruptions du crétacique supérieur.

Considérations générales

Grâce à l'étude microscopique faite sur le cristallin, qui forme le coin sud-ouest de la Bucovine, on peut déduire une série de caractères spécifiques pour chaque zone de métamorphisme nommément:

Les roches qui forment le cristallin épizonal contiennent, à part le quartz, le feldspath plagioclase acide aussi une série de minéraux hydratés tels que: séricite, chlorite, auprès desquels on peut trouver aussi la calcite.

Les roches qui entrent dans la composition du cristallin mésozonal contiennent à part le quartz, le feldspath plagioclasique intermédiaire aussi de la biotite, de la muscovite ou hornblende.

Dans la série mésozonale on peut distinguer des roches qui en plus du métamorphisme spécifique de mésozone auquel elles ont été soumises, elles ont subi aussi l'action d'un phénomène de métamorphisme rétrograde manifesté par ex. par l'existence du chlorite à côté de la biotite ou par l'association Albite-Epidote, minéraux qui ont pu prendre naissance par la transformation du feldspath plagioclasique.

Sur le terrain entre ces deux séries de roches, épizonales et mésozonales, on constate qu'il existe un rapport normal, sans cependant pouvoir déterminer une limite précise, mais seulement une zone de transition dans laquelle sont comprises les roches intermédiaires épi-mésozonales.

En ce qui concerne la tectonique du cristallin, on constate que la direction générale des ondulations dans cette partie des Carpates Orientales est Nord-Nord-Ouest – Sud-Sud-Est, parfaitement d'accord avec la direction du Nord et du Sud de la région dont nous nous sommes occupés.

D'autre part on constate que la série de roches épizonales occupe

plutôt la partie gauche de la Bistritza, et la série des roches mésozonales est mieux représentée du côté droit de la Bistritza, vers Vatra Dornei, la série mésozonale passant aussi sur son côté gauche.

Si nous avons en vue cette distribution des roches du type épizonal et mésozonal, de même que les directions et les inclinaisons mesurées sur le terrain, alors on met en évidence du côté droit de la Bistritza, un anticlinal, qui peut correspondre à l'anticlinal de Bretila décrit par Th. Krăutner[5]).

Du fait que les dépôts du mésozoïque inférieur situés sur le cristallin se trouvent disposés sous une forme synclinale, ayant l'aile orientale fortement penchée sur l'aile occidentale, de même que du fait que ces dépôts indiquent un élèvement axial vers le Sud, on peut déduire que, en dehors des ondulations hercyniques, il y a eu ici aussi d'importantes ondulations alpines, qui auront pu, peut-être, imprimer aux Carpates Orientales leur dernière tectonique.

Laboratoire de Minéralogie de l'Université de Jassy

(Reçu le 30 Juin 1948)

Travaux cités

1) B. Cotta - *Die Erzlagerstätten der Südlichen Bukowina*, J. d. k. k. Geol. R. 1855. VI. Jahrgang, Wien.

2) R. Mogilnicki - *Manganerzlagerstätten der südlichen Bukowina.* Berg. u. Huttenmänn. Jahrb. Wien 1917, H. 1.

3) K. M. Paul - *Grundzüge der Geologie der Bukowina.* J. d. k. k. Geol. R. 1876, XXVI., B. 34, p. 261.

4) H. Quiring - *Die Manganerzvorkommen in den Kristallinischen Schiefern. der Bukowinischen Waldkarpathen.*

5) Th. Krăutner - *Observaţiuni geologice în Munţii Bistriţei şi Bârgăului.* Dări de seamă ale şedinţelor Inst. Geol. al Rom. vol. XIV. 1925-1926.

6) M. Savul et Gh. Mastacan - *Contribution à la connaissance des schistes cristallins de Bucovine. Les amphibolites de la région Jacobeni - Vatra-Dornei.* Ann. Sc. de l'Univ. de Jassy, Seconde section, T. XXVI, 1940, fasc. 2.

7) M. Savul - *Le cristallin de Bistrita. La région Dorna-Broşteni. Distr. Câmpulung et Neamţ.* Ann. Sc. de l'Univ. de Jassy, seconde partie, T. XXIV, 1938.

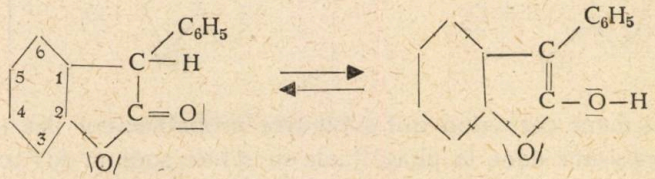
LA VITESSE DE TRANSFORMATION DES LACTONES DES ACIDES O-OXYDIPHENYLACETIQUES EN O-OXYDIPHENYLACETATES DE SODIUM. L'INFLUENCE DU SUBSTITUANT CH_3

par

BORIS ARVENTI et AURORA BORDEA

Comme nous l'avons montré dans une note précédente, les lactones des acides o-oxydiphénylacétiques I (en exceptant celles substituées par le méthyle en 6) se disolvent dans l'hydroxyde de sodium *2n* en donnant naissance au sel de *Na* de la forme énolique II, qui avec le temps se transforme en sel de *Na* de l'acide o-oxydiphénylacétique [1]).

I II.



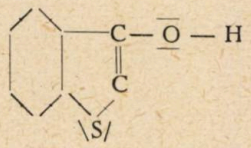
L'énolisation de ces lactones a été étudiée d'abord par A. Löwenbein et W. Folberth [2]) qui ont déterminé le contenu en énol de quelques lactones en employant la méthode avec brome de K. Meyer.

Comme partenaire de conjugaison pour l'énolisation on peut servir aussi, comme on le sait, un système aromatique, puis des atomes à paires (doublets) d'électrons non-participants, comme par exemple, l'oxigène éthérique, le soufre sulfurique et l'azote aminique, specialement quand ils se trouvent comme hétéroatomes dans le même noyau que le groupe capable de tautomérisation.

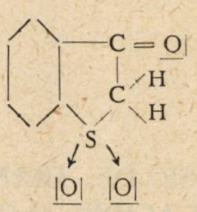
1) Rev. Şt. Adamachi, *32*, 138, (1946).
2) B. *58*, 610, (1925).

Arndt et Martius[3]) ont montré par exemple que l'oxythionaphthène III est un pur énol.

III.



IV.

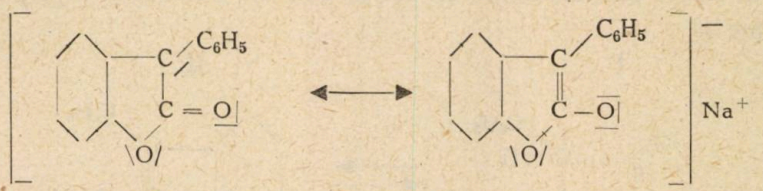


La sulphone correspondante IV dans laquelle les paires d'électrons non-participants du soufre sont bloquées par l'oxygène, est une pure cétone, quoiqu'elle soit plus fortement acide (acidité C—H).

Dans les lactones I, le partenaire de conjugaison est évidemment l'oxigène éthérique qui ferme le cycle lactonique avec ses paires d'électrons non-participants.

En ce qui concerne le sel de *Na* de la forme énolique II, nous devons admettre qu'il se trouve dans la solution comme anion mésomère V.

V.



C'est justement cet anion qui subit très probablement les transformations conduisant dans la phase finale au sel de sodium de l'acide o-oxydiphénylacétique.

Comme nous l'avons montré précédemment pour la lactone de l'acide méthyl-5-oxy-2-diphénylacétique, la vitese de cette transformation ne dépend pas de la concentration d'hydroxyde de sodium (dans les limites 0,1 – 0,2*n*), la constante de vitesse variant dans les limites des erreurs expérimentales. Dans le présent travail nous avons établi la même chose aussi dans le cas de la lactone de l'acide o-oxydiphénylacétique (dans les limites de la concentration de *NaOH* 0,05-0,1*n*).

Puisque dans le domaine de ces concentrations nous pouvons admettre sans grande erreur la concentration de l'hydroxyde de sodium

3) A. *499*, **257** (1932). Voir aussi : B. Eistert : *Tautomerie und Mesomerie*, page 50.

proportionnelle à la concentration des ions d'hydroxyle, il résulte que la vitesse de transformation mentionnée est indépendante de la concentration des ions d'hydroxyle, c'est-à-dire que nous ne pouvons l'expliquer comme un simple processus de saponification éthérique.

Si l'ouverture du cycle se fait à l'anion mésomère, dissocié dans la solution, alors étant donné que la vitesse ne dépend point de l'ion de *OH*, on pourrait admettre une migration intramoléculaire cathionotrope.

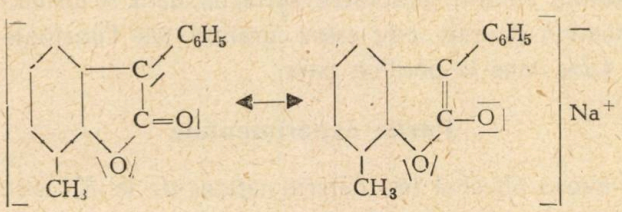
Mais il est possible que nous ayons d'abord une hydrolyse avec la formation de la molécule non-dissociée et qu'à cette molécule non-dissociée ait lieu l'ouverture du cycle sous l'action des ions d'hydroxyle. Etant donné que les ions d'hydroxyle et les ions d'hydrogène, qui déterminent l'hydrolyse se trouvent en rapport de proportionnalité inverse, l'indépendance de la vitesse de transformation de concentration des ions d'hydroxyle est dans ce cas évidente.

Parce que dans le premier cas le rôle décisif est joué par la polarité et la polarisabilité de la paire d'électrons du partenaire de réaction[5]), qui dépendent aussi des substituants déjà présents, il nous a semblé intéressant d'étudier systématiquement l'influence de diverses substituants et en diverses positions sur la vitesse de transformation de l'anion mésomère V.

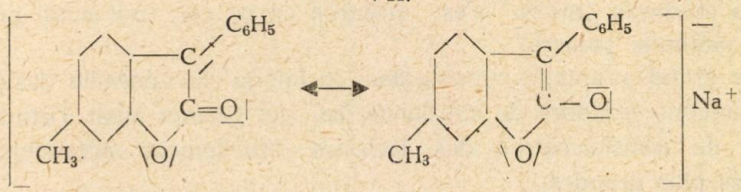
Dans le présent mémoire nous nous sommes occupés du substituant méthyle.

Le méthyle dans la position 3 (VI) ne montre aucune influence sur la constante *K*.

VI.



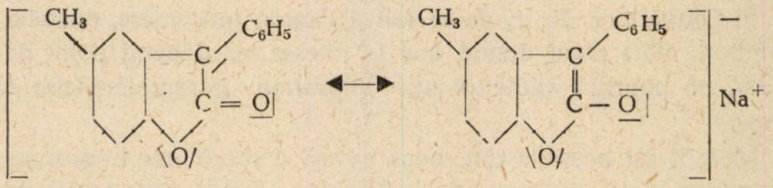
VII.



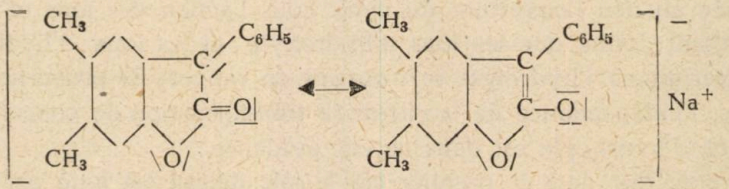
5) Voir B. Eistert, oeuvre citée, page 36–37.

Le méthyle dans la position 4 (VII) augmente 2,4 fois la constante K. Le methyle dans la position 5 (VIII) n'influence que très peu la constante K ($K = 0{,}0095\text{-}0{,}0098$) [4]).

VIII.



IX.



L'introduction de deux groupes méthyliques en positions 4 et 5 (IX) nous montre qu'ils ne s'influencent pas réciproquement dans leurs actions car la constante est presque la même que dans le cas de lactone (VII).

En ce qui concerne l'influence du groupe méthylique dans la position 6 (ortho par rapport au groupe $-\overset{|}{C}-C_6H_5$), nous pouvons dire seulement que les lactones respectives ne se dissolvent pas dans $NaOH$, 2n., froid, aussi nous n'avons pas pu établir de façon analogue l'influence de groupe CH_3 dans ϵ) sur la constante K.

Si pourtant l'anion mésomère correspondant se formait, la vitesse de transformation devrait être assez grande, par l'analogie avec l'influence du CH_3 dans la position para.

Partie expérimentale

Nous avons effectué les déterminations de la K, cette fois-ci, en titrant avec la microburette.

La méthode „micro" s'est montrée en ce cas, tout aussi précise que la méthode „macro".

Le grand avantage consiste dans le fait qu'elle nécessite des quantités beaucoup moindre de substance, ce qui permet aussi l'étude de vitesse de transformation des lactones difficilement accessibles en quantités plus grandes.

4) Loc. cit.

Déterminations de constante de vitesse de transformation de la lactone de l'acide o-oxydiphénylacétique (P. F. 113°—114°).

A 0,168 g. lactone pulverisée dans un petit mortier on ajoute 1 cmc de solution d'hydroxyde de sodium approx. 2*n*.

On agite pendant deux minutes jusqu'à ce que toute la lactone passe dans la solution. On verse la solution dans un petit ballon marqué de 20 cc, on complète en agitant jusqu'à la marque avec d'eau à 19°—20° et on le porte dans le thermostate à 19,5°. Après 20 minutes de sejour dans le thermostate on prelève 2 cc chaque fois et on dose par l'acide sulfurique environ 0,1*n* en présence de phénolphtaléine.

TABLEAU I

t le temps en minutes	cm³ de SO_4H_2 employés	*x*	*a*−*x*	$K = \frac{\log_{10}\frac{a}{a-x}}{t}$
0	1,42	0	0,29	
29	1,29	0,13	0,16	0,0089
62	1,215	0,205	0,085	0,0086
92 1/2	1,165	0.255	0.035	0,0099
123 1/2	1,145	0,275	0,0'5	0,0104
244	1,13	0,29=a	0	
363	1,13			
après 21 h.	1,13			

Comme il résulte du tableau ci-dessus, *K* varie moins pour les valeurs plus grandes de $(a-x)$. Si l'on calcule la variation de *K*, en admettant une erreur de titrage pour *x*, $\Delta x = -0{,}005$ cc, on obtient, pour $a-x=0{,}16$, $\Delta K = -0{,}00045$. Pour $a-x=0{,}015$, en supposant

TABLEAU II

t le temps en minutes	cm³ de SO_4H_2 employés	*x*	*a*−*x*	$K = \frac{\log_{10}\frac{a}{a-x}}{t}$
0	1,575	0	0,415	
28 1/2	1,395	0,18	0,235	0,0087
64 1/2	1,27	0,305	0,11	0,0089
110	1,205	0,37	0,045	0,0088
167	1,17	0,405	0,01	0,0097
359	1,16	0,415=a	0	
492	1,17			
après 23 h.	1,165			
„ 47 h.	1,16			

la même erreur $\Delta x = -0{,}005$ cc., il résulte pour $\Delta K = -0{,}0010$, c'est-à-dire une erreur presque deux fois plus grande que celle pour $a - x = 0{,}16$.

La même lactone dans de l'hydroxyde plus concentré.

A 0,168 g. lactone pulvérisée dans un petit mortier on ajoute 1,03 cc. $NaOH$ aprox $2n$, on agite pendant 3 minutes et on étend encore avec 9 cc. d'eau. Après 10 minutes on pipette 1 cc. et on titre avec SO_4H_2 aprox. $0{,}1n$ en présence de la phénolphtaléine. La température dans le thermostate $19^0{,}5$ (Tableau II).

La lactone de l'acide méthyl-3-oxy-2-diphénylacétique (*P. F.* 63^0-65^0)[5]).

On pese 0,179 g. lactone. Dès qu'on ajoute 1 cc. d'hydroxyde de sodium aprox. $2n$, la lactone se dissout, ensuite le tout se trans-

TABLEAU III

t le temps en minutes	cm³ de SO_4H_2 employés	x	$a-x$	$K = \frac{\log_{10}\frac{a}{a-x}}{t}$
0	1,545	0	0,445	
30 1/2	1,355	0,19	0,255	0,0081
64	1,23	0,315	0,13	0,0083
97 1/2	1,17	0,375	0,07	0,0082
128 1/2	1,12	0,425	0,02	0,0105
187 1/2	1.10	0,445=a	0	
365 1/2	1,10			
après 24 h.	1.10			

TABLEAU IV

t le temps en minutes	cm³ de SO_4H_2 employés	x	$a-x$	$K = \frac{\log_{10}\frac{a}{a-x}}{t}$
0	1,25	0	0,125	
30 1/2	1,15	0,10	0,025	0,0229
59	1,135	0,115	0,01	0,0184
123 1/2	1,13	0,12	0,005	
309 1/2	1,125	0,125=a	0	
438 1/2	1,125			

5) Voir la préparation de la lactone : Ann. Sci. Univ. Jassy *24*, I, 79, (1938).

forme dans une masse cristaline (probablement l'énolat de sodium, difficilement soluble dans le *NaOH*.) On la dissout en ajoutant un peu d'eau, on agite encore pendant trois minutes et on étend à 20 cc. Après 10 minutes on fait le premier dosage (Tableau III).

La lactone de l'acide méthyl-4-oxy-2-diphénylacétique[6]) (*P. F.* 122°—123°)

On pese chaque fois 0,179 g. lactone. La dissolution dans *NaOH* 2*n* se fait pendant 2 minutes. Le premier dosage se fait d'après un temps variable de 10 à 20 min. (Tableau IV—VII).

TABLEAU V

t le temps en minutes	cm³ de SO_4H_2 employés	*x*	*a*−*x*	$K = \frac{\log_{10}\frac{a}{a-x}}{t}$
0	1,32	0	0,135	
17	1,245	0,075	0,06	0,0265
45 1/2	1,21	0,11	0,025	0,0160
65	1,20	0,12	0,015	
96	1,185	0,135=a	0	
431	1,185			
après 23 h.	1,17			

TABLEAU VI

t le temps en minutes	cm³ de SO_4H_2 employés	*x*	*a*−x	$K = \frac{\log_{10}\frac{a}{a-x}}{t}$
0	1,31	0	0,19	
16 1/2	1,205	0,105	0,085	0,0211
36 1/2	1,155	0,155	0,035	0,0201
56	1,13	0,18	0,01	
88 1/2	1,13	0,18	0,01	
150	1,12	0,19=a	0	
449	1,12	0,19		
après 24 h.	1,11			

6) et *24*, I, 81, (1938).

TABLEAU VII

t le temps en minutes	cm³ de SO_4H_2 employés	x	$a-x$	$K=\frac{\log_1 \frac{a}{a-x}}{t}$
0	1,285	0	0,19	
15 1/2	1,18	0,105	0,085	0,0225
30 1/2	1,135	0,15	0,04	0,0221
53 1/2	1,115	0,17	0,02	
133 1/2	1,10	0,185	0,005	
507 1/2	1 095	0,19=a	0	

Moyenne K=0,0212

La lactone de l'acide diméthyl-4, 5-oxy-2-diphénylacétique [7] (*P. F.* 93°).

On pese chaque fois 0,1904 g. lactone. La dissolution dans *NaOH* se fait pendant 1 minute.

TABLEAU VIII

t le temps en minutes	cm³ de SO_4H_2 employés	x	$a-x$	$K=\frac{\log_{10} \frac{a}{a-x}}{t}$
0	1,22	0	0,12	
15	1,155	0,065	0,055	0,0225
31 1/2	1,12	0,10	0,02	0,0247
51	1,11	0,11	0,01	
85	1,10	0,12=a	0	
225	1,10			
après 24 h.	1,09			

TABLEAU IX

t le temps en minutes	cm³ de SO_4H_2 employés	x	$a-x$	$K=\frac{\log_{10} \frac{a}{a-x}}{t}$
0	1,265	0	0,155	
15	1,185	0,08	0,075	0,0210
34 1/2	1,135	0,13	0,025	0,0229
55	1,135	0,13	0,025	
142	1,115	0,15	0,005	
433	1,11	0,155=a	0	
après 24 h.	1,105			

7) Préparation de la lactone : Ann. Sci. Univ. Jassy *24*, I, 83, (1938).

TABLEAU X

t le temps en minutes	cm³ de SO_4H_2 employés	x	$a-x$	$K=\frac{\log_{10}\frac{a}{a-x}}{t}$
0	1,285	0	0,185	
16	1,185	0,10	0,085	0,0211
30	1,145	0,14	0,045	0,0204
49	1,13	0,155	0,03	
62	1,125	0,16	0,025	
77	1,11	0,175	0,01	
440	1,10	0,185=a	0	
après 24 h.	1,10			

TABLEAU XI

t le temps en minutes	cm³ de SO_4H_2 employés	x	$a-x$	$K=\frac{\log_{10}\frac{a}{a-x}}{t}$
0	1,27	0	0,175	
15	1,16	0,11	0,065	0,0286
28 1/2	1,14	0,13	0,045	0,0208
45	1,125	0,15	0,025	
61	1,115	0,155	0,02	
166	1,105	0,165	0,01	
491	1,095	0,175=a	0	
après 24 h.	1,095			

Moyenne K=0,0227

Laboratoire de Chimie Organique
de l'Université de Jassy
et
Laboratoire de Chimie Anorganique
de l'Ecole Polytechnique de Jassy

(Reçu le 15 Juin 1948).

547/66

ÉTUDE DES HUILES EXTRAITES DES FEUILLES DE CONIFÈRES DE ROUMANIE

par

I. MATEI et ELENA COCEA

Résumé. – On étudie, pour la première fois, les huiles de feuilles de sapin (Abies alba Mil,), d'épicéa (Picea excelsa Lk.) et de pin (Pinus silvestris L) de la Roumanie.

Cette étude met en évidence, d'une part, les rendements en huile suivant l'espèce et l'âge, et, d'autre part, les propriétés physico-chimiques des huiles et quelques fractions, ainsi que la composition de l'huile de sapin en général et des fractions obtenues par rectification à la pression normale et dans le vide. On a identifié aussi les éthers bornyliques de cette huile et on a séparé le bornéol. Au point de vue de la qualité l'huile de sapin roumain se place entre l'huile de sapin sibérien et les huiles similaires européennes et américaines.

Introduction.

Cette étude a été commencée pendant l'été de l'année 1943, dans le laboratoire de chimie organique de l'Ecole Polytechnique de Jassy.

Selon le désir exprimé par notre Ministère de l'Economie Nationale, nous nous sommes occupé de l'étude du problème qui intéresse la technique industrielle et précisément du problème de l'extraction des huiles des feuilles des conifères.

Ces huiles ont été déjà commercialisées dans les pays étrangers, ayant des emplois divers.

A cause de leur arôme balsamique et rafraîchissant, les huiles servent à la préparation des essences à l'odeur de sapin, qu'on pulvérise dans les chambres d'habitation et dans les chambres des malades.

Pour les mêmes raisons, elles trouvent aussi un emploi en parfumerie et dans l'industrie des savons.

En outre l'industrie utilise quelques unes de ces huiles à la fabrication du camphre, dû à l'acétate de bornyle qu'elles contiennent.

D'autre part ces huiles peuvent être employées à la séparation des minerais par le procédé du flottage.

C'est ainsi que sont mises en valeur les branches coupées à l'occasion du rajeunissement des arbres et aussi par l'exploitation des forêts conifères.

Grâce à une subvention accordée par le Ministère de l'Economie Nationale, nous avons fait alors des essais d'extraction des huiles de branches de sapin, d'épicea et de pin, de la région Ţetina, district de Cernăuţi.

Les quantités d'huiles obtenues étaient petites, parce que l'alambic employé ne permettait qu'une charge de 5 à 7 kg. de branches.

L'alambic était composé d'une chaudière en tôle de cuivre, un condenseur et un vase florentin pour la décantation de l'huile.

La chaudière était divisée en deux compartiments par une étagère trouée. Dans le compartiment inférieur on chauffait de l'eau, afin d'obtenir des vapeurs, tandis que le compartiment supérieur contenait la charge de branches de conifères.

Puis les essais ont été interrompus un temps à cause de la guerre.

L'étude a été reprise au mois de septembre 1946 dans le cadre de l'Institut National de Recherches Technologiques, Direction Régionale de Jassy.

Grâce à des subventions accordées par cet Institut, nous avons commandé un appareil distillateur à vapeurs d'eau, à pression normale, d'une capacité de 50 à 60 kg. de charge.

L'appareil a été construit sur le même principe que le précédent, à la différence que la partie de la chaudière qui contenait la charge, a été divisée par une autre étagère trouée encore en deux compartiments, afin d'obtenir une meilleure répartition de la charge.

Espèces étudiées.

Les distillations ont été exécutées du 22 sept. au 30 oct. 1946, dans le canton forestier d'Isachi, commune de Capu-Câmpului, district de Câmpu-Lung, Bucovine.

Nous avons extrait de l'huile des espèces de conifères suivantes:

Sapin — Abies alba Mill. (Abies pectinata DC.).
Epicea — Picea excelsa Lk. (Picea vulgaris Lk).
Pin — Pinus silvestris L.

Les branches ont été coupées sur des arbres d'âges divers comme il suit:

Sapin jeune	de	15	à 35	ans
Sapin adulte	de	35	à 60	„
Sapin vieux	de	120	à 150	„
Epicea jeune	de	15	à 35	„
Epicea adulte	de	35	à 60	„
Pin	de	30	à 60	„ .

Les branches de sapin et d'épicea, jeune et mâture, ont été coupées dans la forêt appartenant à la commune de Capu-Câmpului, tandis que les branches de sapin vieux ont été ramassées de la forêt No. 179, en cours d'exploitation, appartenant au „Fond Bisericesc" de Bucovine, c'est à dire des branches d'arbres abattus depuis au moins une semaine.

Les feuilles de pin ont été récoltées des plantations de la commune Valea Seacă (Miron), district de Câmpu-Lung et des plantations, propriété de l'Etat, des communes Mălini et Drăceni, district de Baia.

Mode d'extraction.

Les extractions de sapin et d'épicea ont été faites sur des petites branches jeunes jusqu'à 10 cm. de longueur et celles de pin sur des bouquets de l'extrémité des branches et même sur des feuilles.

Les distillations ont été exécutées sur du matériel frais (récolté 1 à 2 jours avant), tandis que les feuilles de sapin vieux ont été récoltées des amas des branches des arbres déjà abattus, en vue d'exploitation.

La durée d'une distillation était de 14 à 16 heures.

L'eau de condensation était ramenée, au fur et à mesure, dans l'alambic pendant la même distillation, afin d'épuiser l'huile qu'elle contient (principe de cohobation).

Puis, l'huile séparée était purifiée et séchée par filtration.

Rendements.

Le rendement de l'huile obtenue varie avec l'espèce de conifère utilisée et avec l'âge des arbres, comme on le voit dans le tableau I.

Des résultats du tableau I on peut conclure que le meilleur rendement est donné par le sapin et l'épicea adultes, entre 34 et 60 ans.

Le sapin vieux donne le plus petit rendement par rapport au sapin jeune et adulte.

En ce qui concerne le pin, étant donné que la récolte a été effectuée sur des échantillons de divers endroits, avec des plantations petites et presque de même âge, nous ne pouvons pas donner de

TABLEAU I

Variation du rendement avec l'espèce de conifères et avec l'âge des arbres.

Distill. No.	Espèce	Âge de l'arbre ans	Rendement minimum %	Rendement maximum %
12 / 10	Sapin jeune	15 — 35	0.668	0.857
24 / 2	Sapin adulte	35 — 60	0.900	1.054
6 / 25	Sapin vieux	120—150	0.658	0.660
20 / 19	Epicea jeune	15 — 35	0.186	0.226
22 / 23	Epicea adulte	35 — 60	0.274	0.311
26 / 27	Pin (Miron)	30 — 60	0.288	0.302
28 / 29	Pin (Mălini)	30 — 60	0.262	0.274
31 / 30	Pin (Drăceni)	30 — 60	0.223	0.263

résultats comparatifs. Pour les mêmes raisons on ne prendra pas en considération le rendement du pin par rapport à d'autres pays.

Les rendements moyens que nous avons obtenus sont indiqués dans le tableau II, qui, à titre de comparaison, contient aussi les résultats moyens de quelques espèces étrangères.

TABLEAU II

Rendements moyens en huile.

Huile de	Nombre de distillations	Rendement moyen, %	Rendements comparatifs
Sapin jeune	7	0 757	Européen, entre 0.2 à 0.3% [1]
Sapin adulte	4	0.971	haché 0.56% [1], [2]
Sapin vieux	2	0.659	Canadien haché 0.65% [3]
Epicea jeune	5	0.200	Européen, picea excelsa Lk 0.15
Epicea adulte	3	0 289	à 0.25 % [3], [2]
			Américain et canadien, picea mariana (Mill.) B. P. S 0.35 à 0.6% [2]

A l'exception de picea mariana de l'Amérique et du Canada, on constate que les rendements moyens en huile des espèces roumaines, expérimentées par nous, sont bien supérieures à ceux qui sont indiqués par la littérature étrangère. Même le sapin vieux qui est plus pauvre en huile, donne un rendement moyen semblable aux rendements moyens étrangers en général.

Au cours du mois de juin 1947 on a reçu à nôtre bibliothèque centrale un tirage à part du Canadian Journal of Research, B. 23, 194—237 (1945), qui contient un article de MM. J. Risi et M. Brûlé

sur: „Des huiles essentielles tirées des feuilles de quelques conifères du Québec" [3]).

Les auteurs indiquent qu'il serait possible d'obtenir pour le sapin dans des distilleries bien organisées, selon les endroits, des rendements qui varient entre les limites 1 à 1,4 %. Ils ont expérimenté dans le laboratoire sur des rameaux hachés et non hachés, sous la pression atmosphérique et sous des pressions variant jusqu'à ca. 20 kg. par cm^2 (40 livres). Le rendement moyen, de 0,65 % huile de sapin, a été obtenu par les auteurs en employant des rameaux hachés, distillés sous une pression de 10 livres (ca. 5 kg. par cm^2).

A défaut d'un appareil adéquat, jusqu'à présent nous n'avons pas encore expérimenté sur des rameaux hachés.

En considérant que la pression et le hachement augmentent le rendement, ainsi qu'il résulte des recherches de J. Risi et M. Brûlé,

TABLEAU III

Valeurs moyennes des propriétés physico-chimiques.

Huile de	Nombre d'extractions	Poids spécifique à 20° C	Indice de réfraction à 20° C	Rotation spécif. $[\alpha]_D$	Indices de			Acétate de bornyle %
					acide	ester	saponification	
Sapin roumain jeune et adulte	11	0.8870	1.4746	—42.90	1.12	44,98	46.1	15.75
Sapin roumain vieux	2	0.8816	1.4747	—52.14	0.92	43.48	44.4	15.22
Sapin du Tyrol, d'Autriche, de Suisse [1])		0.867à 0.886	1.473à 1.474	—34 à —60				4,5 à 11
Sapin sibérien [1])		0.905à 0.925	1.470à 1.472	—37 à —43				
Sapin de Québec [3])		0.8828	1.4754	—23.5	0.6	29.9	30,5	10.5
Epicea roumain jeune	5	0.8980	1.4730	—39.19	1.58	48.92	50.5	17.15
Epicea roumain adulte	3	0.8958	1.4743	—39.54	4.61	59.49	64.1	20.82
Epicea européen [1]) (picea excelsa Lk)		0.880à 0.888	1.470à 1.472	—37 à —43				8.3 à 9.8
Epinette de Québec (picea mariana Mill. P. S. P.) [3])		0.9141 à 15°	1.4697	—33.7	1.59	97.0	98.6	33.95

on peut supposer que l'on pourrait obtenir pour le sapin roumain un rendement d'huile plus élévé, si l'on distillait les rameaux hachés et sous pression.

D'autre part, il est à signaler que la récolte de notre matériel a été fait dans l'automne de l'année 1946, après deux années de sécheresse. Dans des conditions climatériques normales, il est à supposer que le rendement d'huile serait autre, peut être bien plus grand et aussi avec une autre composition.

Propriétés physico-chimiques des huiles.

Le tableau III donne les propriétés physico-chimiques des huiles de sapin et d'épicea, étudiées par nous et les propriétés de quelques huiles étrangères.

Au commencement, l'intérêt commercial a été le contenu d'ester, respectivement d'acétate de bornyle, l'un des composants de ces huiles ; qui sert à la fabrication du camphre.

Ainsi qu'il résulte de ce tableau, l'huile de sapin roumain contient ca. 15 % acétate de bornyle. A ce point de vue, elle est supérieure aux huiles européennes [1]) et de Québec [3]), avec un contenu de 4.5 à 11 %, mais elle est dépassée par l'huile de sapin sibérien [1]), qui contient 29 à 40 % acétate de bornyle. Nous ne connaissons pas le rendement en huile des branches de sapin sibérien.

Chez nous aussi il serait possible d'industrialiser cette huile, en perfectionnant le mode de distillation, en vue d'augmenter la quantité d'huile extraite.

De l'épicea nous avons obtenu un rendement plus élevé d'acétate de bornyle (17 à 20 %) que celui indiqué jusqu'à présent par la littérature européenne [1]) (8.3 à 9.8 %), mais le rendement d'épicea roumain est bien inférieur à celui de l'espèce picea mariana, épinette noire du Québec [3]), qui contient ca. 34 % acétate de bornyle.

Distillation fractionnée.

Dans le but de séparer les composants de l'huile, nous avons effectué des distillations à colonne de fractionnement, à la pression normale et dans le vide de 14 mm.

Ces distillations se réfèrent seulement à l'huile de sapin, dont nous avons eu une quantité plus grande.

Premier fractionnement.

En partant de la quantité de 3000 cmc. d'huile de sapin nous avons fait une première distillation, en séparant trois fractions.

Le tableau IV indique la quantité totale de l'huile obtenue à cette distillation, dans les limites de température de 150 à 170°, de 170 à 185° et au-dessus de 185° C (respectivement dans le vide entre 65 et 180°).

A titre de comparaison nous avons donné dans ce tableau les résultats indiqués par la littérature pour l'huile de sapin (abies alba), extraite au Tyrol et en Suisse.

TABLEAU IV

Premier fractionnement de l'huile de sapin.

Huile de	150 à 170° C quantité %	170 à 185° C quantité %	Au-dessus de 185 C (65 à 180°/14 mm) quantité %
Sapin roumain	57.71	14.63	27.65
Sapin européen [4]	8	55	37

Ainsi qu'il ressort du tableau, l'huile de sapin roumain possède une composition tout à fait différente de composition des autres huiles européennes. Spécialement l'huile de sapin roumain présente de grandes différences dans les premiers intervalles de température.

TABLEAU V

Pourcentage des fractions de l'huile de sapin recueillies à la sixième rectification dans l'intervalle 150 à 170° de la quantité initiale de 3000 cmc.

Temp. degrés	Quantité cmc.	%	Composition des fractions
jusqu'à—151	7	0.23	
151—154	51	1.70	
154—155	53	1.76	4.27% fraction pinénique. Le pinnène bout à 155—156°. [5]
155—156	75.5	2.51	
156—158	256	8.53	8.53%
158—159	147	4.90	15.43 Fraction camphénique. Le camphène bout à 158 5—159.5° [5]
159—161	316	10 53	
161—162.5	149	4.96	10.32%
162.5—165	161	5.36	
165—167	88	2 73	4.96% Fraction carénique Les carènes bouillent à 165.5—169° [5].
167—170	67	2.23	
au delà de 170	170	3.33	
Manques aux distillations précédentes	260	8.70	
Total	1731.5	57.47	

Refractionnement de l'intervalle de 150 à 170° C.

La fraction qui passe dans l'intervalle de 150 à 170° a été de nouveau soumise à d'autres fractionnements. Après la sixième réctification on a recueilli 11 fractions. Leurs pourcentage est donné dans le tableau V.

Ainsi que l'indique ce tableau, il y a dans cet intervalle trois régions, à savoir : une région pinénique, une région camphénique et une région carénique, qui totalise cca. 24 % du contenu de l'huile.

Il reste encore à éclaircir la composition des fractions qui distillent dans les intervalles de 156 à 158° et de 161 à 165°, fractions qui totalisent 18.85 %.

Fractionnement de l'intervalle de 170 à 185°.

La rectification de la fraction passée à la première distillation sous pression normale dans l'intervalle de 170 à 185° n'a pas conduit à des résultats satisfaisants.

Cette fraction, en quantité de 439 cmc., a donné à la deuxième distillation 179 cmc, tandis qu'à la troisième distillation on a obtenu seulement 72 cmc. de la quantité précédente de 179 cmc.

Dans cet intervalle de température intervient une résinification visible de l'huile. Pour cet intervalle sont en cours des essais dans le vide.

Fractionnement dans le vide.

La quantité de l'huile restante, au delà de 185°, a été rectifiée 7 fois dans le vide de 14 mm. Dans la première distillation dans le vide on a recueilli, entre 65 et 180°, 7 fractions, qui totalisent 774 cmc. Ces fractions ont été soumises à de nouveaux fractionnements. Après la 7-ème rectification on a accumulé, entre les limites de température de 99 à 120°, une quantité de 343 cmc. répartis en 8 fractions, qui totalisent 44 % de la quantité initiale de 774 cmc.

Sur ces fractions nous avons déterminé les constantes physico-chimiques, indiquées dans le tableau VI.

On constate, d'après l'indice d'ester, que la plus grande partie de ces fractions est constituée par des esters bornyliques.

Parmi les acides qui forment les esters, nous avons identifié l'acide acétique.

Le bornéol se sépare à l'état cristallisé, après la saponification

TABLEAU VI

Constantes physico-chimiques des fractions de l'huile de sapin, obtenues dans le vide, entre 99—120°.

Température degrés	Quantité obtenue cmc.	Poids spécifique à 20° C	Indice de réfraction à 20° C	Rotation spécifique $[\alpha]_D$	Indice d'ester	Acétate de bornyle %
99 —102	14,5	0,9654	1,4677	—40,50	204,55	71,35
102 —103,5	89	0,9704	1,4665	—43,47	227,13	79,48
103,5—104,5	43,5	0,9717	1,4670	—44,41	232,38	81,33
104,5—105,5	55	0,9702	1,4675	—43,11	232,68	81.43
105,5—107	46,5	0,9680	1,4682	—42,36	225,61	78.96
107 —110	41,5	0,9642	1,4696	—38,51	219;15	76.69
110 —115	36,5	0,9546	1,4728	—33,53	201,97	70.68
115 —120	16,5	0,9417	1,4772	—	177.45	62,11

des fractions obtenues dans le vide, par exemple de celles qui distillent dans les limites de température de 80 à 99° et de 120 à 130°.

Au fractionnement dans le vide, entre 65 à 99° et 120 à 180°, nous avons séparé encore 20 fractions, dans de petites quantités, variant de 2 à 24 cmc. Sur ces fractions nous n'avons entrepris aucune détermination chimique, n'ayant pas de quantités suffisantes.

Quelques échantillons des huiles de conifères extraites par nous, ont été donnés à l'Institut National de Recherches Technologiques, en vue d'être expérimentés à la séparation des minerais par le procédé de flottage.

Une communication, plus détaillée, sur ces recherches, ainsi que sur d'autres résultats, sera faite dans le Bulletin de l'Institut National de Recherches Technologiques de Bucarest.

A cette occasion les auteurs désirent exprimer leur profonde gratitude au Directeur de l'Institut National de Recherches Technologiques pour les subventions accordées, leurs sincères remerciements au Recteur de l'Ecole Polytechnique de Jassy et aussi leurs reconnaissance au Directeur et au personnel du „Fond Bisericesc-Bucovina", qui ont approuvé et facilité l'expérimentation sur le terrain.

Faculté de Chimie Industrielle
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy
et
l'Institut National de
Recherches Technologiques

(Reçu le 10 Juin 1948)

Travaux cités

1) Fölsch, Max. – *Die Fabrikation und Verarbeitung von ätherischen Ölen*, Wien-Leipzig, 1930.
2) Gildmeister, E. und Hoffman, F. – *Die ätherischen Öle*, 2 Auflage, Leipzig, 1910.
3) Risi, J. et Brûlé, M. – *Canadian Journal of Research*, B. 23 : 1945,. 199–207.
4) Bertram und Walbaum. – Archiv. d. Pharm. 231, 291 (1893) Bericht von Schimmel et Co. Oct. 1892, 21 und April 1893, 29.
5) *Handbuch der Pflanzenanalyse* Bd. III, Hälfte I, Spezielle Analyse II, 1932, Thomas, H. K. – *Aetherische Öle*.

547/67

CONTRIBUTION À LA CONNAISSANCE DES MATIÈRES TANNANTES VÉGÉTALES DE ROUMANIE

par

G. ALEXA et CONST. STRUB

I.

Le Sumac

Le Sumac est un arbrisseau de la famille des Anacardiaceaes, croissant dans les contrées méridionales, représenté par plusieurs variétés, étant repandu dans presque toute l'Europe, dans le nord et le sud de l'Afrique et en Amérique. Eitner [1]) résume, dans le tableau ci-dessous, les diverses variétés de Sumac, en indiquant leurs régions d'origine, d'où elles se sont repandues spontanément, ou par culture, dans d'autres régions.

Rhus coriaria : Le Sumac d'Italie, d'Espagne, de la Grèce, d'Anatolie ;
Rhus pentaphylla : Le Sumac d'Algérie ;
Rhus thyphina et
Rhus glabra : Le Sumac de la Virginia ;
Coriaria myrtifolia : Le Sumac de la France centrale ;
Rhus copallina : Le Sumac d'Amérique ;
Rhus cotinus : Le Sumac du Tirol ;
Rhus lucida et
Rhus viminalis : Le Sumac du Cap (Afrique).

Les variétés européennes de Sumac, d'après les indications données par Johannes Paessler [2]), sont donc les suivantes :

Rhus coriaria : originaire de la Sicile et de l'Asie minore ;
Coriaria myrtifolia : „ de l'Europe du sud-ouest et de l'Afrique du Nord ;
Rhus cotinus : originaire de l'Europe meditérranéenne et centrale.

A ces trois variétés appartient aussi le Sumac de: Bulgarie Montenegro et de Caucas [3]).

Le Sumac d'Italie de nord, de Triest, Fiume, Dalmatie, Tirol et Hongrie appartient aux variétés *Rhus cotinus* [4]) et à la même variété appartient aussi le Sumac de Roumanie.

En Roumanie le Sumac croit spontanément à la lisière des bois, ou en marge des routes avec exposition vers le midi, préférant un sol argileux, mais en s'adaptant à n'importe quel sol.

En Roumanie le Sumac est connu sous le nom de: „Sumac", mais plus spécialement sous celui de „Scumpie" [5]), en s'étendant le long de la rivière de Pruth, jusq'au district Covurlui, puis dans les districts de Tutova, Neamtz, Putna, Tecuci, Buzău, Ilfov, Vlașca et Mehedinți.

Les feuilles de Sumac contiennent des matières tannantes appartenant [6]), [7]), [8]) au groupe des substances tannantes hydrolisables, respectivement à la classe des tannins de cette groupe.

Le contenu en tannin des feuilles de Sumac, varie d'une région à l'autre, d'après les indications données par Paessler [9]), résumées dans le tableau suivant:

La région	Tannin	Netannin	Inextractibles et insolubles
Sumac de Bulgarie	22,5	12,0	53,5
„	24,5	14,0	49,0
Montenegro	20,5	13,0	48,5
Caucas	23,0	17,5	47,5
Turquie	20,5	14,0	53,5
Tirol	17,0	17,0	54,0
Espagne	23,0	25,0	42,0
„	17,4	32,5	38,0
„	14,0	41,5	32,5

Le Sumac étudié par nous a été cueilli à Breazu, dans le district de Jassy, au cours de l'année 1946, de mai à octobre inclusivement.

L'analyse a été exécutée selon les méthodes officielles [10]).

Les feuilles cueillies des différentes parties de l'arbrisseau, séchées à l'air, constituaient un échantillon moyen.

Pour chaque échantillon nous avons effectué deux extractions, parallèlement, en collectant, pendant deux heures, 1000 cmc., pour chaque extraction.

L'extraction a été commencée à 50° C. et les premiers 500 cmc.

ont été recueillis à la température de 50—70° C. et le reste de 500 cmc. à la température de l'eau bouillante, au bain marie [11]).

L'analyse proprement dite a été systématisée de la manière suivante [12]).

A — *Déterminations directes.*

a) Résidu total.
b) Solubles totales (obtenues après filtration dans les filtres de „Berkefeld").
c) Non-tannins (d'après la méthode de detannisation, de „Baldracco", avec de la poudre de peau chromée, sèche, par agitation).
d) Humidité.

B — *Déterminations indirectes.*

e) Nonextractibles $100-(a+d)$
f) Insolubles dans l'eau $(a-b)$
g) Tannin $(b-c)$.

Des déterminations ci-dessus nous avons déduit les résultats analytiques comme il suit:

1. Humidité (d)
2. Nonextractibles et insolubles (e+f)
3. Tannins (g)
4. Nontannins (c).

D'après ce mode, les données analytiques du Sumac analysé par nous (Breazu-Jassy), sont présentées dans le tableau suivant, sous forme de valeurs moyennes.

	10 Mai	9 Juillet	11 Août	14 Sept.	4 Oct.
Humidité	9,70	9,73	9,90	9,53	11,00
Nonextractibles et insolubles	68,28	66,94	64,86	63,10	50,85
Tannin	4,18	5,25	5,78	6,44	15,75
Nontannin	17,84	18,08	19,46	20,93	22,40
Somme	100,—	100,—	100,—	100,—	100,—
Tannin/Nontannin	0,234	0,290	0,297	0,307	0,703

De l'examen de ce tableau il résulte que:

Le contenu en substances nonextractibles et insolubles décroit

avec l'évolution de la plante, en atteignant un minimum au cours du mois d'octobre.

Le contenu en tannin croit à mesure que les substances nonextractibles et insolubles diminuent et atteint un maximum au cours du mois d'octobre.

Le contenu en nontannin croit en même temps que le tannin, mais plus lentement que celui-ci, de sorte que :

Le rapport tannin / nontannin croit, atteignant un maximum au moment où le tannin est maximum lui même, donc tout le long du mois d'octobre ; cela nous indique que :

La récolte du Sumac doit se faire au mois d'octobre, quand le contenu en tannin est maximum et non pas en juillet, comme pour les pays européennes, méridionales quand le contenu en tannin est maximum [13]).

Le contenu maximum en tannin, de 15, 75 %, trouvé par nous est satisfaisant, en tenant compte de la latitude de Jassy et montre que le Sumac analysé par nous est supérieur au Sumac de certaines variétés d'Espagne.

Le rapport tannin / nontannin sans être complètement favorable, ne doit cependant être considéré comme un rapport non favorable. Nous essayerons à améliorer ce rapport, en variant certains facteurs qui pourraient influencer l'extraction.

Laboratoire de Chimie technologique organique de l'Ecole Polytechnique de Jassy
et
l'Institut National de recherches technologiques, Direction régionale de Jassy

(Reçu le 30 Juin 1948)

Indications bibliographiques

1) Eitner - *Handbuch der Gerbereichemie und Lederfabrikation, Die Gerbung mit Pflanzengerbstoffen*, Vol. II, Teil 1, von Prof. Dr. M. Bergmann, Dr. Ing. H. Gnamm u. Dr. W. Vogel.
2) Paessler Johannes - *Lederzeitung* 1920, Nr. 55, 61, 67, 73, 85, 92, 98/99, 103, 109, 115, 119, 127, 133, 139.
3) Ibidem.
4) Ibidem.
5) Prodan Iuliu - *Flora pentru determinarea și descrierea plantelor ce cresc în România*, Vol. I, partea 1. Pantu Zach, *Plantele cunoscute de poporul român*, 1906.
6) Freudenberg K - *Die Chemie der natürlichen Gerbstoffe*, 1920.

7) Bergmann M. *op. cit.*
8) *Journal of the Society of Leather Trades'Chemists*, vol. XXXII, Nr. 5, 1948.
9) Bergmann M. – *op. cit.*
10) *Méthodes Officielles d'Analyse, de la Société internationale des Chimistes des industries du cuir, 1938.*
11) Kuntzel A. – *Gerbereichemisches Taschenbuch*, 1943.
12) Ibidem.
13) Eitner – *Der Gerber*, 1892.

547/66

CONTRIBUTION À LA CONNAISSANCE DES MATIÈRES TANNANTES VÉGÉTALES DE ROUMANIE

par

G. ALEXA et CONST. STRUB

II.

Le Kermek

Le Kermek est la racine sechée de *Statice latifolia* et du *Statice gmelini*, une plante de la famille des *Plumbaginaceae*, qui comprend plusieurs plantes riches en tannin. Le Kermek présente des feuilles ovales avec une seule nervure, sur un pétirole court. Ces feuilles sont groupées en rosette basilaire, du milieu de laquelle sort une tige ramifiée penicullée[1]). La racine de la plante, pivotante, qui s'enfonce profondément dans le sol, contient des matières tannantes. Cette plante se développe dans les sols marécageux et salins[2]). Le Kermek sert, depuis longtemps, pour le tannage des peaux de mouton, dans les régions de Turkestan et du Gouvernement Sémipalatinsk (U. R. S. S.), où a été employé pour la première fois[3]). Il donne un cuir de couleur verdâtre. Ces plantes produisent de fortes racines de 5 à 6 cm. de diamètre, qui s'enfoncent jusqu'à 1 m.—1,5 m. dans le sol, d'où il est assez difficile de les extraire[4]). Ces racines contiennent en moyenne[5]):

Tannin	17 pour 100
Nontannins	14 „ 100.

L'Usbekistan pourrait produire annuellement 20.000 tonnes de Kermek.

En Roumanie le Kermek, connu sous le nom de „Apărătoare", „Sica"[6]), „Garofiță de mare", „Limba boului", „Limba peștelui"[7]), „Sfeclișoară", „Sfeclișoară de sărătură"[8]), croit en abundance étant répandue dans tout le pays, dans les sols salins et marécageux[9]) [10]), mais les dimensions de la racine sont plus petites que celles connues en U. R. S. S.

Etant donné que le Kermek est très repandu dans notre pays, en se développant dans les sols les plus impropres sur lesquels pendant la sécheresse disparrait l'herbe même, nous nous sommes proposé d'étudier cette plante tannante, en établissant momentanément son contenu en tannin et la période optimum de sa récolte.

La récolte des racines a été faite dans les mois de mai, juillet, août, septembre et octombre, 1946, dans la région Breazu du district de Jassy. Certaines des racines récoltées par nous eurent une longueur partiale de 30 cm.

Après avoir enlevé, avec une brosse humide, les restes de la terre, les racines ont été séchées à l'air libre, puis découpées transversalement en morceaux d'une grosseur de 0,3 mm, avec un dispositif adapté par nous, formé d'un disc circulaire aux couteaux réglables.

L'extraction a été faite d'après les méthodes officielles [11]) dans un extracteur de „Koch".

Chaque fois nous avons pris 15 gr. de racine decoupée, l'extraction étant faite en double.

L'extraction des premiers 500 cmc. a été faite à la température de 50—70° C et le reste, jusqu'à 1000 cmc. à la température de 85° C.

L'analyse proprement dite, a été systématisée d'après A. Küntzel [12]), en déduisant, des déterminations directes, les résultats analytiques suivantes:

1. Humidité
2. Nonextractibles et insolubles
3. Tannins et
4. Nontannins,

comprises dans le tableau reproduit à la page suivante.

Ce tableau résume les valeurs obtenues, ainsi que leurs moyennes, pour les divers échantillons de Kermek; ces valeurs montrent que:

Le contenu des divers composants (nonextractibles, insolubles, tannins, nontannins) varient peu d'une racine à l'autre; cela s'explique par le fait que le développement de tous ces composants est plus uniforme, les racines étant à l'abri de la lumière solaire directe, en opposition avec les feuilles et les autres organes de la plante, qui sortant au-dessus du sol présentent, par conséquence, des irrégularités en ce qui concerne ses composants.

Au cours du mois de juillet le contenu en substances nonextractibles et insolubles s'est accru en mode anormal, en comparaison avec le mois suivant; tandisque, ce contenu aurrait du s'interpoler aux valeurs correspondantes des mois de mai et août. Cette anomalie s'explique par le fait que la récolte, au mois de juillet, a été faite immédiatement

après la pluie. De même, les substances solubles (le tannin et les nontannins) présentent des valeurs plus petites. Le rapport Tannin / Nontannin est cependant plus grand que celui qui correspond aux mois de mai et d'août, ce qui nous fait croire que les nontannins se sont plus facilement solubilisés que les tannins.

Abstraction faite des valeurs obtenues pour le mois de juillet, on constate :

une croissance du pourcentage en substances nonextractibles et insolubles, de mai vers octobre;

une croissance du pourcentage de tannin, de mai jusqu'au mois d'août, inclusif, quand il atteigne un maximum, qui décroit successivement en septembre et octobre ;

une decroissance des nontannins, au fur et au mesure de l'évolution de la plante, cependant le contenu en nontannins reste constant pendant les derniers mois.

Le rapport Tannin/Nontannin croit, atteignant un maximum au cours de mois de septembre, quand le contenu en tannin commence à décroître ; cela

TABLEAU

des résultats analytiques de Kermek (Statice gmelini).

Données analytiques	10 mai		9 juillet			11 août			14 sept.			4 oct.		
	limites		limites		moyen.	limites		moyen.	limites		moyen.	limites		moyen.
Humidité	17,12	17,12	16,00	16,00	16,00	15,87	15,87	15,87	17,79	17,79	17,79	15,94	15,94	15,94
Nonextract. et insolub.	64,03	64,91	67,80	67,68	67,74	66,56	65,48	65,92	67,98	67,54	67,76	69,45	70,09	69,77
Tannin	8,29	8,27	7,87	7,74	7,81	8,40	8,80	8,60	7,11	7,31	7,21	7,15	6,93	7,04
Nontannin	10,56	9,70	8,33	8,58	8,45	9,37	9,85	9,61	7,12	7,36	7,24	7,46	7,04	7,25
Somme	100,—	100,—	100,—	100,—	100,—	100,—	100,—	100,—	100,—	100,—	100,—	100,—	100,—	100,—
Tannin/Notan.					0,924			0,895			0,995			0,971
					0,817									

montre que la récolte des racines de Kermek peut être faite, soit au mois de septembre, quand le rapport Tannin / Nontannin est maximum, donc plus favorable, soit au cours du mois d'août, quand le contenu en tannin est maximum.

Les données trouvées par nous, montrent que les racines de Kermek indigène ne représente pas une des meilleures matières tannantes mais nous pensons que le Kermek qui pousse dans d'autres régions de notre pays, que nous n'avons pas encore étudié, soit plus riche en tannin.

Nous nous proposons donc d'étendre notre étude sur le Kermek des différentes régions du pays et en même temps, de chercher à améliorer le rapport Tannin / Nontannin.

De même nous chercherons à établir la valeur tannante de Kermek comparativement aux autres matières tannantes connues.

Laboratoire de Chimie technologique organique de l'Ecole Polytechnique de Jassy
et
l'Institut National de recherches technologiques. Direction régionale de Jassy

(Reçu le 30 Juin 1948)

Travaux cités

1) Pantu Zach – *Plantele cunoscute de Poporul Român*, (Vocabular botanic) 1906.
2) Ibidem.
3) Peters – *Ledertechnische Rundschau*, 1927.
4) Gnamm H. – *Handbuch der Gerbereichemie u. Lederfabrikation*, (von Prof. M. Bergmann).
5) Ibidem.
6) Prodan Iuliu – *Flora pentru determinarea şi descrierea plantelor ce cresc în România*, Vol. I, Partea I.
7) Pantu Zach – op. cit.
8) Topa Em. – *Culegere de date fito-sociologice*, 1939.
9) Prodan Iuliu – op. cit.
10) Pantu Zach – op. cit.
11) Méthodes Officielles d'analyse, de la Société internationale des chimistes des Industries du cuir, 1938.
12) Kuntzel A. – *Gerbereichemisches Taschenbuch*, 1943.

CONTRIBUTION A LA CONNAISSANCE DES LESSIVES BISULFITIQUES RESIDUAIRES

par

GH. ALEXA et T. SĂVEANU

L'alcool éthylique est produit industriellement dans notre pays à partir des céréales, des pommes de terre et de la mélasse. Ces matières premières se trouvent chez nous dans des quantités importantes; mais leur utilisation rationnelle, spécialement dans l'alimentation, met le problème de chercher d'autres matières premières pour la fabrication de l'alcool.

Une telle matière première est constituée par les lessives résiduaires bisulfitiques, résultées de la fabrication de la cellulose par le procédé bisulfitique.

Pour 1000 kg. de substance sèche du bois on emploie 3,5—4,0 m^3 de lessive bisulfitique, qui est une solution aqueuse de bisulfite de Ca, ayant un excès de SO_2 libre, de composition moyenne: 1,2% Ca, 1,2% SO_2 combiné et 2,5% SO_2 libre.

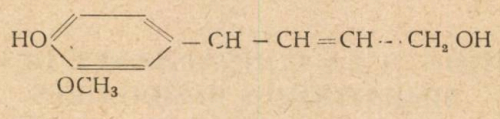
Le procédé bisulfitique pour l'obtention de la cellulose s'applique en industrie soit d'après la méthode de Mitscherlich, dans laquelle on cuit le bois avec la lessive bisulfitique 15—20 heures jusqu'à 135° C, par chauffage indirect aux vapeurs, soit d'après la méthode de Ritter-Kellner, dans laquelle la cuisson des bois avec la lessive se fait en 10-12 heures à 140 - 145° C, en chauffant directement avec de la vapeur d'eau.

Klasson [1]) a établi la composition moyenne suivante du sapin, rapportée à la substance sèche sans cendre:

Cellulose	50 — 53%
Autres hydrates de carbone .	16 — 14%
Lignine	30 — 29%
Protéines.	0,7%
Résines et graisses . . .	3,3%.

Pendant la cuisson, la lignine et toutes les autres substances du bois, sauf la cellulose, sont solubilisées par la lessive bisulfitique.

On admet que la réaction principale de la cuisson consiste dans une addition de gaz sulfureux à la lignine pour former des acides lignosulfoniques de formule mal définie, à cause de la constitution encore incertaine des lignines. On suppose que celles-ci sont des produits de condensation de l'alcool conifĕrylique,



possédant par suite un noyau aromatique se prêtant à la sulfonation. On a également pû mettre en évidence dans la lignine : des groupes méthoxyle et acéthyle, trois groupes ethyléniques et un groupe actif carbonyle [2]).

Les acides lignosulfoniques, formés pendant la cuisson du bois, se combinent avec la chaux en donnant des lignosulfonates de Ca solubles. Les pentosanes et les hexosanes du bois, sous l'action des ions d'hydrogène donnés par les acides, sont hydrolisés aux pentoses et hexoses. Même une petite quantité de cellulose est hydrolisée à la glucose. Hägglund a constaté que la cuisson d'après Ritter-Kellner avec une lessive contenant comme acide libre 70% de l'acide sulfureux total présente en même temps l'avantage de la production d'une bonne cellulose d'une part et d'autre part les meilleurs conditions de durée et de concentration en ions d'hydrogène pour hydroliser les lignosanes, sans engendrer une destruction simultanée.

De la cuisson résulte de la cellulose et des lessives bisulfitiques résiduaires. Pour une tonne de cellulose fabriquée on doit obtenir 7—10 m^3 de lessive résiduaire, soit en moyenne 8,5 m^3. Une partie de la lessive est retenue par la cellulose, de sorte que pour la fabrication de l'alcool il ne faut compter que sur 4, jusqu'au maximum 6 m^3.

* * *

Mitscherlich [3]) fut le premier qui essaya d'obtenir de l'alcool des lessives bisulfitiques résiduaires.

Lindsey et Tollens en 1891 ont étudié la nature et la quantité des hydrates de carbone d'une lessive bisulfitique résiduaire, dont ils ont obtenu par fermentation 0,58 — 0,67% en vol. d'alcool.

Matthéus [4]) en 1892 a trouvé 0,7% en volume d'alcool.

Krause [5]), dans ses essais faits en 1905, obtient 0,5 — 0,7% en vol. d'alcool d'une lessive dans laquelle il trouve 1,47% de sucre.

Les premiers essais industriels pour la fabrication de l'alcool à partir des lessives bisulfitiques résiduaires ont été fait par Wallin, Ekström et Sandberg en 1906 en Suède, dans les fabriques construites à Köpmanholmen et Skutskär. Puis parurent des fabriques en Suède, Finlande, Allemagne, Italie et dans d'autres pays. En Suède furent fabriqués plus de deux millions d'hectolitres d'alcool en 1920. Pendant la guerre mondiale de 1914—1918, l'Allemagne rendit obligatoire la fermentation alcoolique des lessives bisulfitiques résiduaires.

Aujourd'hui on obtient dans l'industrie en moyenne 0,9 — 1,0% en vol. d'alcool, les valeurs pouvant être 1,1 — 1,2% ou seulement 0,6 — 0,7%.

* * *

La composition des lessives bisulfitiques résiduaires varie dans des limites assez grandes. Elles ont une densité $d = 1{,}045 - 1{,}046$ respectivement 11,0 — 14,5° Bx; la substance sèche est 80 — 135 gr/litre dont:

a) Substance organique 85 — 90%
b) „ anorganique 10 — 15%.

Klason[6]) a établi que dans les lessives résiduaires passent les composantes suivantes du bois du sapin, rapportées à une tonne de cellulose sèche:

Lignine	644 kg.
Hydrates de carbone .	311 „
Protéines	25,5 „
Résines et graisses . .	73 „
SO_2 combiné à la lignine	235 „
CaO combiné à l'acide lignosulfonique	102 kg.
Total	1380,5 kg.

Une analyse plus complète d'une lessive bisulfitique a été faite par Wichelhaus:

	gr./1
Substance sèche .	82,8350
a) Organique .	68,3440
b) Inorganique .	14,4910
SO_4H_2	3,4340
SO_2 combiné . .	5,8420
SO_2 libre	2,5600
Cl	0,0240
SiO_2	0,0024

Fe_2O_3 et Al_2O_3	0,0102
CaO	7,1760
MgO	0,0040
Alcalies	0,0192.

Pour la fabrication de l'alcool il est à désirer que le pourcentage des sucres fermentescibles des lessives soit le plus grand possible. Pour une cuisson bien conduite, les sucres fermentescibles d'une lessive résiduaire représentent 14%, rapportés à la cellulose. De cette quantité seulement 1% provient de l'hydrolise de la cellulose dans les conditions de la cuisson (Ekström[7]) et le reste de 13% résulte de l'hydrolise de substances gomeuses du bois (lignosanes), solubles dans l'eau bouillante.

Klason[8]) établit qu'une partie des lignosanes ne s'hydrolise pas pendant la cuisson et par conséquent ne peuvent pas fermenter. Il précipite les lignosulfonates et dans la solution restante il intervertit les sucres avec *ClH* à 2% à 100°C; ainsi le pourcent du sucre de la liqueur croît de 2,07 à 2,60%.

Les monosaccharides sont formées de pentoses nonfermentescibles et de hexoses qui fermentent à l'alcool.

Krause[9]) a trouvé dans deux lessives résiduaires les sucres suivantes:

	Procédé Ritter-Kellner %	Procédé Mitscherlich %
Sucre total	1,47	1,48
Pentoses (xylose)	0,41	0,47
Mannose	0,48	0,48
Galactose	0,01	0,01
Levulose	0,25	0,28
Glucose	—	traces.

Klason a précipité les lignosulfonates avec de la naphtylamine-sulfate et dans le filtrat a dosé les monoses existantes:

	% du sucre total	% du poid du bois
Pentoses (arabinoses)	26,9	4,3
Mannose	15,6	2,5
Galactose	8,1	1,3
Glucose	49,4	7,9
	100,0	16,0.

On observe que Klason trouve beaucoup de glucose, tandis que Krause n'en a obtenu que des traces. Des essais seraient encore nécessaires pour établir définitivement si dans les lessives bisulfitiques résiduaires se trouve vraiement une quantité appréciable de glucose et d'établir sa provenance.

Krause constate que le pourcent des sucres des lessives résiduaires est plus élevé en hiver ; il attribue ce fait aux substances de réserve, accumulées par les arbres pour l'hiver.

Hägglund [0]) croit que la variation du pourcentage des sucres n'est pas dûe à la saison, mais à la conduite de la cuisson et à la composition de la lessive. Il établit que dans les premières 6 — 8 heures il résulte peu des sucres, dont la plus grande partie est constituée par des pentoses nonfermentescibles ; avec la progression de la cuisson, la formation des sucres dépend de la température et de la composition de la lessive. Le pourcent de sucre atteint un maximum après 15 heures dans une lessive contenant 1,15% SO_2 combiné et 3% SO_2 libre et à peine après 18—20 heures dans une lessive avec 1,15% SO_2 combiné et 2,40% SO_2 libre. Il résulte donc qu'un plus grande pourcentage de SO_2 libre favorise la formation des sucres et aggrandit leur quantité. Mais, si la cuisson est trop poussée, les sucres et surtout les sucres fermentescibles sont rapidement détruits. En mode normal, la cuisson se fait plus vite avec une lessive contenant un pourcent de gaz sulfureux plus grand et est considérée terminée quand le pourcent en sucre a atteint la maximum.

* * *

Pour nous rendre compte de la quantité d'alcool qu'on pourrait obtenir des lessives bisulfitiques résiduaires de notre pays, nous avons fait des essais sur quatre lessives bisulfitiques, dont deux obtenues de la

Lessive de	Letea I	Letèa II	Celuloza I	Celuloza II
Densité	1,0534	1,0534	1,0496	1,0494
Substance sèche, gr./100 cm³ . .	12,17	13,02	11,25	10,52
„ organique, gr /100 cm³	10,89	11,70	9,95	9,35
Cendre, gr./100 cm.³	1,32	1,28	1,30	1,17
SO_2 libre, gr /100 cm³	0,023	0,034	0,029	0,29
Sucre total, gr./100 cm³	1,42	1,51	1,29	1,38
Alcool, cm /100 cm³	1,02	0,98	0,77	0,83

fabrique Letea et deux de la fabrique de cellulose de Piatra Neamț.

Le tableau ci-dessus est rangé suivant les données analytiques de lessives analysées, ainsi que le pourcentage d'alcool résulté par fermentation.

La détermination du SO_2 libre a été faite d'après la méthode de Oeman [11]).

Le sucre total a été dosé d'après le procédé Fehling-Bertrand après avoir précipiter les substances organiques avec de l'acétate basique de plomb [12]).

La détermination de l'alcool a été faite d'après la méthode exposée en: G. Foth-Handbuch der Spiritusfabrikation, 1929, P. Parey, Berlin, pag. 1010, qui est la suivante:

On bouille 500 cm^3 lessive bisulfitique résiduaire dans un ballon jusqu'au moment où le volume arrive à 400 cm^3. Pendant le chauffage on insouffle de l'air dans la lessive. Dans ces conditions le SO_2 et les autres acides volatils sont chassés de la solution. On réfroidit la lessive et puis on neutralise, en agitant continuellement, avec du lait de chaux et à la fin avec d'eau de chaux. La lessive neutralisée est complétée à 500 cm^3 et filtrée. 400 cm^3 du filtrat, qui correspond à 4/5 de la quantité prise dans l'analyse (si l'on néglige le volume du précipité) sont acidulés avec 2,5 cm^3 d'acide sulfurique n/1. On passe la lessive quantitativement dans un ballon de fermentation, muni d'un dispositif de fermentation avec SO_4H_2 concentré. Au lieu d'autolisat de levure nous avons ajouté comme substances nutritives pour la levure 1,0 gr. phosphate trisodique, 1,0 gr. sulphate d'ammonium et 0,1 gr. sulfate de magnésium. La fermentation a été faite par 5 gr. levure rasse *M* purifiée par la méthode suivante [3]): A 5 gr. levure on ajoute 50 cm^3 SO_4H_2 à 2%, on agite bien, on laisse deux heures en repos, on centrifuge, on décante la solution acide et on antrène par eau stérilisée la levure dans le ballon à fermenter.

La fermentation a durée 72 heures à 30° C. On distille 200 cm^3 de la lessive fermentée, on neutralise le distillat avec de Na OH n/10; on redistille des deux cent cm^3 100 cm^3 et sur le distillat on détermine la densité avec le picnomètre et on lit dans les tables de correspondence le pourcent d'alcool, qui est rapporté à 100 cm^3 de lessive.

Pendant la fermentation il arrive quelquefois des infections à la surface de la lessive dans le troisième jour de fermentation. Pour les éviter, nous avons modifié la méthode utilisée de la manière suivante: Après avoir ajouté à la lessive neutralisée et filtrée 2,5 cm^3 SO_4H_2 n/1, on fait une stérilisation à la température de 80—85° C pendant 5 minutes. On continue après comme plus haut. Dans ces conditions il n'y a plus des infections, mais la quantité d'alcool résultée par la fer-

mentation est de 10, 9—11,5% plus petite que celle obtenue sans stérilisation.

D'après notre avis deux causes pourraient influencer la diminution du rendement en alcool :

Premièrement par le chauffage se précipitent des sels de Ca qui fixent la levure et l'entraine au fond du ballon et consomment une quantité de l'acidité de la solution, acidité nécessaire pour avoir le p_H optimum pour la fermentation. La diminution du p_H apporte un changement dans la composition des produits qui résultent de la fermentation alcoolique normale. Parmi ces produits il y a l'acide acétique dont la quantité augmente en ce cas. L'acide acétique, volatil, passe dans le distillat et à la neutralisation de 200 cm^3 de distillat, provenu de la lessive stérilisée, nous avons titré l'acidité de celui-ci avec 14,7 cm^3 Na OH n/10 et celle provenue de la lessive nonstérilisée avec seulement 8,0 cm^3 ;

Deuxièmement une autre cause serait dû à la destruction partielle des sucres fermentescibles (particulièrement de la glucose), dans les conditions du travail près du point de neutralité de la solution.

En résumé, dans le présent travail nous avons étudié le rendement en alcool éthylique des lessives bisulfitiques résiduaires roumaines. Les résultats trouvés concordent avec ceux donnés par la littérature. Nous avons essayé à améliorer la méthode pour le dosage de l'alcool par fermentation en faisant une stérilisation avant la fermentation, mais nous avons toujours trouvé des valeurs de 10,9 à 11,5 % plus petites.

Laboratoire de Chimie Technologique
Organique de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 30 Juin 1948).

Travaux cités

1) Klason – *Beiträge zur Kenntniss des chemischen Zusammensetzung des Fichtenholzes*, Berlin 1910 Festschrift Kempe, pag. 215, Stockholm 1916
2) R. Escourou – Le cuir technique, 1928, 7, pag. 155.
3) Mitscherlich – D. R. P. Nr. 4178 (1878) ; Nr. 72161 (1891).
4) Mattheus – Papierfabrikant 1910, 8, pag. 532.
5) Krause – Chem. Industrie 1906, 29, pag. 21.
6) Klason – Papierfabrikant 1909, 7, pag. 27, Festheft.
7) Ekström – Svensk Kemisk Tidskrift 1907, 7.
8) Klason – Kempe-Festschrift, 1915, pag. 224, Stockholm.
9) Krause – Chem. Industrie 1905, 29, pag. 217.

10) Hägglund – *Die Sulfitaglaugen und ihre Verarbeitung auf Alkohol*, II Aufl., 1921, Vieweg & Sohn, Braunschweig, pag. 17—19.
11) Schwalbe, Sieber – *Die chemische Betriebskontrolle in der Zellstoff und Papier-Industrie*, III Aufl. J. Springer, Berlin, pag. 240—41.
12) Detto, pag. 248–51.
13) Berl-Lunge – *Chemisch-Technische Untersuchungsmethoden*, V, Achte, Aufl. 1934, J. Springer. Berlin, pag. 123.

OBSERVATIONS SUR LES EFFETS DE LA GELÉE SUR QUELQUES VARIETES DE POIRIERS

par

P. BABALEANU et **M. CELAN**

Il résulte des recherches récentes, que la résistance des plantes à la gelée est un phénomène d'une complexité extrême, dont le mécanisme est loin d'être complètement élucidé. Sous l'action des certaines influences du milieu, survenues à des moments bien déterminés de son cycle évolutif, la plante réalise un état physiologique particulier : elle acquiert, selon l'expression des auteurs russes, une *„trempe"* [1]) appropriée, qui lui permet d'échapper à l'action nocive des températures basses.

Le manque de résistance à la gelée de telle espèce ou de telle variété ne traduit donc qu'un désaccord plus ou moins profond, permanent ou accidentel, entre les facteurs externes et la capacité de l'espèce ou de la variété de déclancher au moment opportun la série de réactions, dont l'ensemble constitue le phénomène de la *„trempe"*.

De là, la complexité sous laquelle se présente le problème de la résistance de la plante à la gelée : le chercheur est obligé de se demander chaque fois si le manque de résistance à la gelée d'une espèce ou d'une variété est due à la déficience du mécanisme de défence qui conditionne la *„trempe"*, ou seulement à la conjonction défavorable, due à l'ensemble des facteurs externes qui empêchent cette *„trempe"*.

Le discernement des causes, qui sont à la base du phénomène de la résistance à la gelée, demande donc beaucoup de pénétration.

Ce discernement est nécessaire non seulement pour une sélection judicieuse des variétés, mais encore pour décider des mesures de protection à prendre. En effet, on ne peut appliquer avec efficacité

---

1) Toumanov I. G. : *Les bases physiologiques de la résistance au froid des plantes cultivées* (en russe).

aucune des mesures agrotechniques de rigueur pour prévenir les dégâts causés par la gelée ou pour y remédier, sans la connaissance préalable des causes de la non-résistance des arbres à la gelée.

Les recherches relatives à la résistance des plantes à la gelée ont établi qu'il s'agit là d'une notion toute relative et que des plantes, qualifiées comme résistantes à la gelée pour une région déterminée, deviennent non-résistantes dans des conditions de climat différentes, et inversement. C'est pourquoi les recherches régionales ou même locales sont d'une très grande importance.

Pour un pays comme le nôtre, où les hivers très rigoureux qu surviennent à quelques années d'interval, éprouvent gravement les plantations d'arbres fruitiers en y provoquant parfois des dégâts irréparables, le problème de la résistance à la gelée se pose avec insistance. Ainsi les effets du long et rude hiver de 1946—1947 ont été mis en évidence au printemps pour toutes les espèces d'arbres fruitiers de la région de Jassy.

Le poirier, un des arbres fruitiers de grande importance économique de cette région, a beaucoup souffert aussi bien par suite de la sécheresse que du froid. Et comme on cultive ici beaucoup de variétés sur lesquelles nous n'avons pas de données précises en ce qui concerne leur manière de se comporter au froid et à la sécheresse, nous avons saisi l'occasion offerte par l'année catastrophale 1946 – 1947 pour examiner à ce point de vue une série de variétés de poirier appartenant à l'Ecole Normale „V. Lupu" (Copou) et à la pépinière Vişani (Bucium).

Nous mentionnons dès le début que la plantation de poiriers de la pépinière Vişani a été plus ou moins negligée depuis deux ans et qu'elle a souffert énormement par suite de la sécheresse et du froid ; par contre la plantation de l'Ecole Normale „V. Lupu" a été bêchée et soignée. Aussi, nous avons choisi pour nos observations de base cette dernière plantation en nous servant, pour la comparaison seulement, de certaines observations faites à Vişani.

Nos observations ont été faites sur des poiriers âgés de 10 ans, greffés sur des cognassiers et, cette année ci, privés de fruits. Les observations macroscopiques, effectuées sur place, ont été confrontées avec les résultats des observations microscopiques de laboratoire.

Dans le cas spécial dont nous nous sommes occupés, celui de l'examen des tissus affectés par la gelée, la technique se réduit à l'application des méthodes que la cytologie met à la disposition du chercheur pour lui permettre de distinguer les cellules mortes de celles qui

sont vivantes. Dans notre cas, la plus appropriée de ces méthodes a été celle de la coloration vitale [1]).

On sait que les tissus affectés présentent sur une section fraiche une coloration brune, plus ou moins accentuée, et que cette brunification est due à la présence des tannins dans la cellule. Dans les cas de brunification grave, seule la coloration vitale permet de distinguer les éléments vivants de ceux qui ne le sont pas. En effet, à l'aide de cette méthode nous avons pu constater dans les tissus très brunifiés, à côté de nombreuses cellules mortes, des éléments encore en vie. En même temps que l'examen des tissus frais, colorés vitalement, il est indispensable de procéder à l'examen des mêmes tissus non colorés. Dans ce cas l'examen des coupes dans le tissu frais a été fait dans la glycérine, milieu qui empêche la brunification, cette dernière survenant dès qu'un tissu, même sain, est exposé à l'air. Ces coupes peuvent être conservées ainsi pendant longtemps sans que la brunification, due aux tannins des vacuoles .cellulaires, se superpose et agrave la brunification des affections causées par la gelée.

Nous nous rendons parfaitement compte que des recherches ayant trait à la manière dont les variétés réagissent à l'action du froid nécessitent des observations de longue durée. Nous présenterons pourtant les résultats obtenus en une seule année parce qu'ils nous semblent très concluants et parce qu'ils corroborent les connaissances des praticiens en cette matière. Nous pensons encore qu'après un hiver à effet aussi catastrophal, qui ne se répète qu'au bout d'une série d'années, il est juste que la pratique puisse profiter aussi et apprendre quelque chose d'utile.

Dans l'exposé qui suit, les variétés examinées au champ et au laboratoire ont été groupées selon le degré d'affection qu'elles présentent. Le développement des arbres a été suivi dès le début de la période végétative du printemps 1947 ; les constatations définitives, résultées à la suite de l'examen macro- et microscopique ont été faites dans le courant du mois de Juillet.

1. Parmi les variétés de poiriers, qui ont été l'objet de nos observations, Joséphine de Malines est la seule dont les tissus présentaient un aspect absolument sain, sans aucune trace de brunification. L'examen macroscopique du tronc et des rameaux ne révèle la présence d'aucune plaie causée par le froid. Bien que peu vigoureux,

1) V. „*Sur l'examen microscopique et histochimique des tissus affectés par la gelée*", M. Celan et P. Babalean, Bull. de l'Ecole Polytechnique de Jassy, T. 2, fasc. 2, p. 537—543.

les arbres présentent une végétation abondante et un feuillage très riche. La variété Joséphine de Malines s'est donc très bien comportée dans des conditions, où le reste des variétés examinées ont été plus au moins fortement affectées. Cette variété est d'ailleurs mentionée dans la littérature comme résistante au froid [1]).

2. La variété Beurré d'Hardenpont se place entre les variétés de poiriers qui, bien que présentant des affections causées par la gelée, ces dernières ne sont pas de nature à gêner le bon fonctionnement des tissus. Sur les sections des rameaux on ne constate qu'une légère brunification dans le liber de l'année précédente (1946); les plaies causées par le froid, peu nombreuses, n'ont gêné en rien la croissance vigoureuse. Les jeunes pousses de 1947 sont fortes et nombreuses.

Les variétés Clapps Favorite et Virgouleuse, cette dernière surtout, ont dans la majorité des cas un aspect vigoureux. Leurs pousses peuvent atteindre 66 cm. Pourtant, chez les deux variétés, les plaies causées par le froid sont beaucoup plus fréquentes, quoique en général superficielles. La brunification se limite au liber et aux parties internes de l'ecorce. On observe une brunification plus intense dans le voisinage immédiat des plaies. Comparées entr'elles ces deux variétés présentent des différences assez marquées: si la variété Virgouleuse peut être considérée sans réserve, comme l'une de celles qui, bien qu'affectée par le froid, a résisté, ayant toutes les chances de guérir, la variété Clapps Favorite compte parmi les arbres qui la représentent quelques exemplaires ayant l'aspect souffrant.

3. Les variétés Duchesse d'Ancoulême, Doyenné d'hiver, Beurre Diel et Baronine Melo von Schmidt, forment ensemble, selon leur degré d'affection, un trosième groupe.

Bien que certains exemplaires aient l'air bien-portants, leurs pousses de 1947 atteignant 40 cm, les Duchesses d'Ancoulême présentaient des crevasses longitudinales sur les rameaux principaux et sur le tronc. Le sectionnement des rameaux laisse voir une brunification assez importante dans la zone du liber et dans la moelle qui a un aspect noirâtre. L'examen microscopique montre, sur les rameaux âgés de 2 ans une brunification assez forte dans le liber primaire et dans les parties profondes de l'écorce. L'anneau de bois 1947 est bien développé, ce qui indique le bon fonctionnement du cambium. Cependant sur d'autres parties (rameaux de 3-4 ans) l'examen microscopique met en évidence une affection bien plus grave ; la brunification forme une

1) Schlenz V.- *Frostschäden im Obstbau.* Bechtold, Wiesbaden, 1935.

bande continue dans le liber de 1946 et discontinue dans le liber plus ancien ; le bois montre une légère brunification à la limite des anneaux annuels consecutifs.

La coloration vitale met en évidence l'existence d'éléments vivants à côté de ceux qui sont morts, même aux endroits où la brunification parait assez forte et étendue. Seules les cellules qui présentent un contenu compact brun foncé peuvent être considérées avec certitude comme mortes ; les cellules légèrement brunifiées, mais capables de se colorer vitalement sont, elles aussi, des éléments condamnés car, on le sait, les cellules mortes diffusent des substances de nature inconnue qui tue les éléments vivants de leur voisinage immédiat. Là où les tissus ne forment pas, par suberification ou cutinisation (parfois rien que par lignification) une ligne de défence imperméable, la mort s'étend lentement en élargissant les zones de brunification. L'état d'affaiblissement des éléments encore en vie pourrait expliquer la non-formation du suber protecteur.

La variété Doyenné d'hiver reconnue comme peu vigoureuse présente des pousses de 1947 suffisamment développées. Le feuillage est assez riche. Le tronc et les rameaux principaux présentent des plaies allongées dues au froid et des crevasses profondes au bord des plaies. Vers le sommet on constate que certains des rameaux principaux se dessèchent. Les pousses portant des bourgeons floraux sont fortement affectées. L'examen microscopique révèle une affection égale ou même plus accentuée que pour la variété précedente. On constate même parfois dans les rameaux affectés, des anomalies dans la formation des tissus secondaires, ce qui prouve une atteinte partielle du cambium.

Dans la pépinière Vişani cette variété compte de même des arbres gravement affectés. Dans la littérature pomologique (op. cit.) elle est citée comme sensible au froid.

La variété Beurré Diel, quoiqu'avec un feuillage relativement riche et des pousses de 1947 atteignant 20 cm, présente sur la partie inférieure des rameaux de très nombreuses plaies et des crevasses longitudinales allant jusqu'au bois. Le sectionnement des rameaux montre une brunification assez accentuée de l'écorce et une coloration noirâtre du bois ancien et de la moelle. L'examen microscopique montre en général une brunification du liber et des assises internes de l'écorce. Nous avons pu observer chez cette variété une extension de la brunification à partir des îles de brunification vers les tissus sains. Ainsi, sur une section transversale d'un rameau âgé de trois ans, où l'on observe une brunification à la limite du bois de 1947 et du

méristème qui lui a donné naissance, on constate que cette brunification provient de la diffusion de la coloration brune du liber et de l'écorce par l'entremise des rayons médullaires. Ceux-ci sont, à leur tour, légèrement brunifiés. La brunification est donc survenue ici après une période de fonctionnement normale. Le rouge neutre colore vitalement les rayons médullaires légèrement brunifiés. Il est probable que, dans ce cas, même si le cambium fonctionne normalement, les chances de régénérescence ne sont pas grandes.

La variété Baronine von Schmidt est peu répandue. Certaine arbres, avec peu de fruits, ont un aspesct extérieur presque normal, à pousses de 1947 vigoureuses, d'autres ont un aspect souffrant. On constate de nombreuses plaies causées par la gelée autour des jeunes pousses déjà desséchées. Au sectionnement on observe une brunification dans la zone du liber et une coloration légèrement noirâtre du bois et de la moelle.

A l'examen microscopique on observe, sur les tissus colorés au rouge neutre, une forte brunification sous forme d'ilots dans le liber primaire et dans les parties profondes de l'écorce. Le liber secondaire aussi est bruni. Là, où la brunification est plus forte, elle s'étend à travers le méristème jusqu'au parenchyme ligneux. La diffusion se produit par les rayons médullaire, comme dans le cas précédent.

4. Enfin, les variétés Curé et Louise bonne d'Avranche sont très gravement affectées par la gelée.

La variété Curé présente des arbres fort atteints, dont les rameaux ont séché pendant la période de végétation dans une proportion de 75% ou même entièrement. D'autres exemplaires, bien que recouverts de nombreuses plaies causées par la gelée ont de pousses de 1947 fort vigoureuses.

Cette variété est d'ailleurs reconnue comme vigoureuse et ayant une tendance prononcée à se régénerer. En effet, sur les rameaux partiellement affectés de plaies profondes, où le gel a tué tous les tissus jusqu'à la moelle, les ilots de méristème qui ont survecu reforment activement les tissus secondaires. Cependant ces tissus présentent généralement certaines anomalies. Ainsi les éléments du tissu vasculaire sont fortement deviés dans tous les sens. La formation du bois est irrégulière et parfois ce dernier est ramplacé par un simple tissu parenchymateux ; les rayons médullaires sont enrichis par des séries surnuméraires de cellules, déviées elles aussi par la croissance irrégulière des tissus voisins.

L'examen microscopique d'un grand nombre de rameaux à tissus ainsi régénérés nous prouve qu'en dernier lieu ces tissus nouvellement

formés sont, chez la plupart des arbres, voués au dépérissement comme les anciens.

La variété Curé présente donc dans nos plantations des exemplaires fort différents : les uns complètement ou partiellement desséchés, les autres fortement atteints à plaies et crevasses causées par la gelée mais qui luttent, donnant naissance à de nombreuses pousses. Dans le nombre des arbres étudiés notre attentation a été sollicitée par un exemplaire parfaitement sain. Il s'agissait là sans doute de ce qu'un biologue nomme *jordanon physiologique*, qui mérite d'être observé et surveillé, car sa valeur pour la sélection est connue.

La variété Curé est signalé dans la littérature comme peu résistante au froid (op. cit).

La variété Louise bonne d'Avranches visiblement souffrante, avait un feuillage pauvre et pâle. La croissance des pousses de 1947 était insignifiante. Un sectionnement dans un rameau de 4 ans montre à l'examen microscopique une forte brunification dans le liber et la moelle et un anneau de brunification entre le bois de 1946 et de 1947. Le rameau a donc été affecté par la gelée dans toute son épaisseur.

L'examen microscopique montre en général, un fonctionnement irrégulier du cambium, des anomalies dans la formation des tissus secondaires, la brunification des rayons médullaires, et l'anneau de brunification entre le bois de 1946 et de 1947.

La méthode de la coloration vitale montre qu'à la fin de juillet beaucoup d'éléments appartenant aux tissus formés par l'activité du cambium dans le courant de la période de végétation de 1947, sont morts.

L'activité du méristème cambial est ralentie, mais non interrompue. Cette variété présente les mêmes affections graves des tissus que la variété précédente ; pourtant nous avons constaté que les éléments constitutifs des rayons médullaires sont très robustes ; ils se colorent vitalement même au milieu des tissus dont la majorité des cellules sont mortes.

La variété Louise bonne d'Avranches compte le plus grand pourcentage d'arbres desséchés dans les plantations étudiées.

* * *

Après avoir exposé les effets du froid pendant l'hiver rigoureux de 1946—1947 sur ces dix variétés de poiriers, nous examinerons dans ce qui suit les conditions météorologiques des périodes de végétation

précédentes, afin de constater dans quelle mesure ces conditions ont influencé le procès de la „trempe" et le manque de résistance à la gelée.

Le centre pomologique de Jassy et de ses environs présente deux facteurs de végétation peu favorables: les précipitations et la température.

Un de nous a montré ailleurs [1]) que par rapport à la température moyenne de 18,9° C dans la période de végétation mai-septembre, les 515,2 mm de précipitation annuelle à Jassy ne sont pas suffisants pour les espèces d'arbres fruitiers qui prédominent dans les cultures de cette région.

Les pluies ne réalisent donc pas les conditions les plus favorables pour la croissance et la fertilité des arbres; et si elles baissent sous la moyenne citée plus haut ou si elles sont irrégulièrement reparties, leur insuffisance pendant les mois de végétation devient un véritable désastre.

Les deux dernières années qui nous intéressent 1946-1947, représentent un exemple concluant à cet égard:

Tableau mensuel de la température moyenne et des précipitations

MOIS	Température moyenne 1945	1946	Quantité de précipitation 1945	1946
Janvier . . .	—4,8	—4,9	46,1	26,7
Février . . .	—2,4	—0,3	11,22	23,7
Mars	4,4	4,6	12,4	12,9
Avril	10,8	12,3	38,6	6,5
Mai	17,8	18,8	43,7	25,0
Juin	22,1	23,1	5,3	129,7
Juillet	24,1	23,7	13,8	25,9
Août	21,5	25,1	54,4	17,8
Septembre . .	17,1	18,8	15,6	41,9
Octobre . . .	10,4	6,4	26,7	105,0
Novembre . .	3,7	3,5	5,6	37,4
Décembre . .	0,7	6	39,0	44,5
Total de précipitations			312,42	497,0.

La moyenne de la température dans la période végétative mai-septembre 1945 . . . . . 20,5°C.

La moyenne de la température dans la période végétative mai-septembre 1946 . . . . . 21,9°C.

1) P. Babaleanu: *Nevoia de apă a pomilor şi calea de a o împlini* „Viaţa Agricolă", Nr. 5, Mai 1939.

Ainsi, pendant la période végétative 1945 les précipitations sont très réduites en mai, juin, juillet ; elles augmentent en août et vers l'automne.

L'été de 1945 a été sec, mais les arbres n'ont pas trop souffert, ayant des réserves d'eau de l'hiver précédent. L'hiver suivant a été doux, sans neige, puis le printemps 1946 extrêmement sec. Les mois d'avril en particulier, avec 6,5 mm. de précipitations, précédé du mois de mars avec 12,9 mm. et suivi de mai avec 25,0 mm., le vent sec, ont créés des conditions défavorables à la nutrition des arbres. Les pluies de juin 1946 n'ont pas suffit à améliorer la situation, car la température a été trop élevée. Les trois mois suivants, particulièrement le mois d'août, ont été exceptionnellement chauds et secs.

Dans ces conditions de végétation la nutrition des arbres n'a pu se faire d'une manière satisfaisante. En plein été on signale déjà dans les centres pomologiques de Comarna et Covasna de nombreux cas où les arbres ont perdu leur feuillage, entrant dans un repos partiel ou en se desséchant.

Après un été aussi sec il y eut en octobre et novembre une période de pluies et une température assez élevées. La végétation parut recevoir une impulsion nouvelle ; ensuite, les arbres ont été surpris en pleine végétation par une baisse brusque de la température, vers la mi décembre. En effet, entre le 10 et 19 décembre le thermomètre marqua -29^0 C. Cette baisse brusque de température et le froid qui se maintint surprirent donc les arbres insuffisamment nourris pendant l'été de 1946 et mal préparés pour affronter le froid. Ces deux circonstances expliquent dans une large mesure les effets de la gelée révélés chez les variétés des poiriers étudiés.

Il est remarquable que les variétés qui, à en juger d'après l'anneau de bois de 1946, ont cessé leur croissance plus tôt, ont moins souffert de froid.

C'est précisement le cas de Joséphine de Malines, de Beurré d'Hardenpont et de Virgouleuse. La variété Clapps Favorite qui paraît avoir végété tard, n'a pas été trop gravement affectée par le gel, sauf quelques rares exemplaires. Par contre, on constate les affections les plus graves chez toutes les variétés chez lesquelles l'aspect des éléments constitutifs de l'anneau de bois démontre que la croissance a continué sans marquer, d'une manière nette, une période de relentissement ; d'où *l'importance d'une étude sur le rythme de végétation* caractérisant les différentes variétés.

Résumé. Les mois d'automne 1946, chauds et humides, venant après un été extrêmement sec, furent défavorables au déroulement des

processus cyto-physiologiques qui conditionnent l'état hivernal de vie ralentie chez les végétaux ligneux.

Ceci explique l'étendue des dégats causés parmis les arbres fruitiers par l'hiver rigoureux de 1946-1947.

Les différentes variétés de poirier furent celles qui ont particulièrement souffert à cause du froid et c'est justement sur ces dernière qu'il nous manquent des données précises en ce qui concerne leur résistance à la gelée.

Nos recherches ont porté sur des variétés que l'on cultive dans les environs de Jaşsy (Moldavie): Joséphine de Malines, Beurré d'Hardenpont, Clapps Favorite, Virgouleuse, Duchesse d'Angoulême, Doyenné d'hiver, Beurré Diel, Baronine Melo von Schmidt, Curé et Louise bonne d'Avranches. Ces variétés peuvent être reparties en quatre groupes, d'après le degré des atteintes causées par la gelée, dans les conditions particulières de l'automne 1946 et de l'hiver qui s'en suivit.

1. La variété Joséphine de Malines n'a présenté aucune des altérations caractéristiques que l'examen macro- et microscopique révèle chez les arbres atteints par la gelée.

2. Les variétés Beurré d'Hardenpot, Clapps Favorite, et Virgouleuse, bien que présentant des tissus brunifiés dans les régions du liber et de l'écorce, ont parfaitement résisté et ont présenté une croissance vigoureuse pendant la période végétative de 1947.

3. Les variétés Duchesse d'Angoulême, Doyenné d'hiver, Beurré Diel et Baronine Melo von Schmidt présentent des tissus profondément affectés par la gelée, affection extériorisée par l'existence de plaies sur le tronc et les rameaux. Des cas intéressants d'extension de la brunification des tissus à partir des foyers de nécrose le long des rayons médullaires ont été observés.

Les variétés Curé et Louise bonne d'Avranches figurent parmi celles qui ont été irrémédiablement compromises par la gelée. L'assise cambiale, profondément atteinte, fonctionne par endroits, mais ne donne que des tissus malformés.

Une corrélation entre l'arrêt plus ou moins tardif de la croissance et le degré d'affection causée par la gelée a été constatée.

Faculté d'Agronomie de l'Ecole Polytechnique de Jassy

(Reçu la 30 Mars 1948)

CHAMP MAGNÉTIQUE D'UNE MASSE EN ROTATION

par

STÉFAN PROCOPIU

1. Le magnétisme terrestre a reçu en 1947, comme explication, une solution inattendue. Le magnétisme de la Terre et des étoiles serait dû à la masse gravitationnelle du corps en rotation, d'après la théorie de Blackett.

H. W. Babcock[1]), astronome au Mont Wilson, en étudiant l'effet Zeeman dans les spectres des étoiles, a découvert en 1947 que les étoiles en rotation présentent un champ magnétique comme la Terre : l'étoile 78 Virginis possède un champ magnétique d'environ 1500 gauss aux pôles ; l'étoile Europium a un champ de 5500 gauss, le plus grand champ stellaire connu jusqu'à présent. Babcock a suggéré que le moment magnétique de la Terre, du Soleil et de l'étoile 78 Virginis, doit être proportionnel à leur moment angulaire.

En même temps, P. M. S. Blackett[2]), professeur à l'Université de Manchester, donne l'explication du magnétisme de la Terre, du Soleil et de l'étoile 78 Virginis, en admettant que tout corps en rotation est un aimant. La formule de Blackett, qui donne le champ magnétique aux pôles d'une masse gravitationnelle en rotation est la suivante :

$$\frac{P}{U} = \frac{\beta}{2} \cdot \frac{\sqrt{G}}{c} \tag{1}$$

dans laquelle P est le moment magnétique d'une masse en rotation, U est le moment angulaire, G est la constante de gravitation, de valeur $G = 6{,}67.10^{-8}$ c. g. s., c est la vitesse de la lumière, $c = 3.10^{10}$

1) H. W. Babcock, *Zeeman Effect in stellar Spectra. Astrophysical Journal, 105*, 1947, p. 105–119 ; Irma S. Bowen, Annual Report of the Director of the Mount Wilson Observatory, 1947.

2) P. M. S. Blackett, *The magnetic Field of massive rotating Bodies.* Nature, London, 159, May 1947.

cm/sec, $\frac{\sqrt{G}}{c} = 0{,}85\ 10^{-14}$ c. g. s., et β est un coefficient numérique de l'ordre de l'unité. Les valeurs de β sont, d'après Blackett, 0,30 pour la Terre, 1,14 pour le Soleil et 1,16 pour l'étoile 78 Virginis.

L'importance de la formule de Blackett consiste en ce qu'elle s'applique à trois corps célestes, et en ce qu'elle est la première relation de la Physique qui relie la constante de gravitation à un phénomène magnétique.

L'existence d'une relation entre le moment magnétique de la Terre et du Soleil, et la racine carrée de la constante universelle de gravitation a déjà été prise en considération, en 1922, par L. Décombe [1]).

2. Dans la formule de Blackett il y a deux parties : la première est constituée par le rapport P/U, qui doit être constant et égal à 10^{-15} c. g. s. ; et la seconde partie, le second membre de la formule précédente, est le produit de $\sqrt{G}/c$ par un coefficient $\beta/2$.

Le but de cette Note est de montrer qu'on peut représenter le magnétisme de la Terre par une formule analogue à celle de Blackettt, mais qui, dans le second membre de cette formule, introduit la charge électrique spatiale de la Terre à la place de la constante G de gravitation. Je propose à la place de la formule (1) la formule suivante :

$$\frac{P}{U} = \frac{1}{d}\frac{q}{V} \tag{2}$$

dans laquelle, q/V, est la charge électrique q du corps en rotation divisée par le volume V du corps, c'est-à-dire la charge électrique spatiale, et d est la densité de la masse en rotation.

On obtient la formule (2) par des considérations de dimensions : Le rapport P/U a les dimensions $\left[M^{-\frac{1}{2}} L^{+\frac{1}{2}} \right]$ et $\sqrt{G}/c$ a les mêmes dimensions. Si on désigne par q la quantité d'électricité du corps, en unités électromagnétiques, et par m la masse du corps, on constate que le rapport $[q/m]$ possède les mêmes dimensions $\left[M^{-\frac{1}{2}} L^{+\frac{1}{2}} \right]$. Du point de vue des dimensions, à la place de la formule (1), on peut écrire la formule analogue :

$$\frac{P}{U} = \frac{q}{m}. \tag{3}$$

1. L. Décombe, *Calcul du moment magnétique d'un astre à partir . . . de la constante universelle de la gravitation*, Comptes Rendus Ac. Sc. Paris. 175, 1922, p. 872.

Cette relation satisfait aux dimensions et en outre elle est symétrique par rapport aux quantités, électrique et magnétique. Elle reste encore homogène, lorsqu'on adopte un système de quatre unités fondamentales, M, L, T et Q. Si on remarque que

$$m = d \, . \, V$$

où d est la densité et V le volume du corps, la relation (3) peut encore être écrite ainsi :

$$\frac{P}{U} = \frac{1}{d} \frac{q}{V}. \tag{4}$$

La relation (4) donne les mêmes résultats que la relation (1) à condition que les deux membres de ces deux relations soient égaux :

$$\frac{\beta}{2} \frac{VG}{c} = \frac{1}{d} \frac{q}{V}. \tag{5}$$

Les valeurs du coefficient $\frac{\beta}{2}$ et du coefficient $1/d$ pour les corps célestes sont approximativement égaux. Voici leurs valeurs :

Terre	$\frac{\beta}{2} = 0,15$	$\frac{1}{d} = \frac{1}{5\,5} = 0,17$
Soleil	$\frac{\beta}{2} = 0,57$	$\frac{1}{d} = \frac{1}{1,41} = 0,71$
78 Virginis	$\frac{\beta}{2} = 0,58$	. . . .

Par suite, le rapport $1/d$, de l'inverse de la densité du corps, de la formule (4), joue le même rôle que le coefficient $\frac{\beta}{2}$ de la relation de Blackett. Le coefficient $1/d$ possède un certain avantage, il reçoit une base physique dans la formule.

Pour que la condition (5) soit réalisée, il faut que le rapport q/V, c'est-à-dire la charge spatiale électrique, ait une valeur du même ordre de grandeur que $0,85\,10^{-14}$ c. g. s. Or, il est intéressant à remarquer que la charge électrique superficielle de la Terre a justement la valeur $s = 0.8.10^{-14}$ u. é. m. C. G. S., pour un champ électrique au sol de 120 volts par mètre. On ne connaît pas la charge électrique de volume de la Terre ; mais on peut faire l'hypothèse que la charge de volume q/V possède une valeur numérique du même ordre de grandeur que celle de la charge superficielle. Cela peut être admis, vu que dans la détermination de la charge superficielle par chute de potentiel à la surface de la Terre, prennent part aussi des charges de volume. Cette hypothèse sera exprimée par l'égalité :

$$(6) \qquad \frac{q}{V} = 0.8.10^{-14} \text{ u. é. m. C. G. S.}$$

Une telle hypothèse signifie que la charge spatiale doit être la même pour le Terre, pour le Soleil et pour toute masse en rotation; et cela constitue une propriété générale de la matière. Pour connaître cette propriété, il faudrait faire des mesures sur la conductibilité des masses en mouvement.

La charge spatiale pourrait provenir d'un excès de l'électricité négative des électrons sur l'électricité positive des protons, ou bien, à une séparation inégale de ces deux charges par la rotation.

3. *La charge spatiale de la Terre.* Si l'on admet que la charge spatiale de la Terre est $q/V = 0{,}8.10^{-14}$ u. é. m. C. G. S. et si la charge d'un électron est $e = 1{,}6.10^{-20}$ u. é. m., alors le nombre n des électrons pour 1 cm^3 sera

$$n = \frac{0\,8\,10^{-14}}{1{,}6.10^{-20}} = 5.10^5 \text{ électrons par } cm^3.$$

Pour une masse moléculaire moyenne d'environ *100* à *200*, des substances qui constituent la Terre, dans 1 gr. de matière se trouvent environ 60.10^{20} molécules ou 300.10^{20} molécules par cm^3. Il résulte qu'on trouve 1 électron par

$$\frac{300.10^{20}}{5.10^5} = 60.10^{15} \text{ molécules}.$$

L'existence de 1 électron pour 10^{17} molécules, nécessaire à l'explication du magnétisme terrestre, pourrait nous être indiquée par des mesures sur des masses en mouvement.

Des considérations d'ordre électromagnétique ont conduit Schuster, Swann, etc., depuis 1912 déjà, à essayer d'expliquer le magnétisme des masses en rotation par les charges électriques superficielles et de volume, entrainées par la rotation [1]).

La solution que je propose ici *provient de considérations de dimensions; elle est en relation avec la formule de* Blackett *et admet comme hypothèse une propriété générale de la matière d'être chargée par la rotation.*

4. *Le magnétisme d'un électron en rotation.*

Le moment magnétique d'un électron tournant sur lui-même n'est pas représenté par la formule de Blackett (1), mais par une formule du genre de la formule (3).

En effet, un électron qui tourne autour d'un noyau positif donne

1) Ch. Maurain, *Magnétisme Terrestre*, Paris, 1935, p. 58.

naissance à un moment magnétique, que j'ai calculé en 1912, et qui est [1])

$$P = \frac{he}{4\pi m} \tag{7}$$

où P est le moment magnétique, h la constante de Planck, e la charge électrique et m la masse de l'électron. Cette formule représente ce qui s'appelle d'ordinaire le magnéton de Bohr, ou encore le magnéton théorique.

Si l'on considère un électron qui tourne sur lui-même (spin), son moment magnétique, d'après Goudsmit et Uhlenbeck, est donné par la même formule (7). Avec les valeurs, $e = 1{,}6.10^{-20}$ u. é. m., $h = 6{,}53.10^{-27}$ c. g s., m $= 9.10^{-28}$ g, on obtient $P = 9{,}2.10^{-21}$ u. é. m.

Le moment angulaire de l'électron, considéré comme une masse uniformément répartie, tournant sur lui-même, est donné par

$$U = \frac{2}{5} \cdot m.\ r.\ v.$$

où r est le rayon de l'électron et v sa vitesse de rotation. On connaît comme valeur du rayon, $r = 3.10^{-13}$ cm. Pour la vitesse v de l'électron tournant, on admet, afin de pouvoir expliquer la valeur du moment magnétique P de l'électron, que cette vitesse dépasse la vitesse de la lumière [2]). On admet la valeur, $v = 300\,3\,10^{10}$ cm/sec.

Avec ces valeurs on obtient pour le rapport P/U :

$$\frac{P}{U} = \frac{9{,}2.10^{-21}}{\frac{2}{5} \cdot 9.10^{28} \times 3.10^{-13} \times 300.3.10^{10}} \cong 1.10^{7} \text{ u. é. m.}$$

Cette valeur est de l'ordre du rapport $\frac{e}{m}$ pour l'électron car on a

$$\frac{e}{m} = 1{,}76.10^{7} \text{ u. é. m.}$$

où e est la charge d'un électron.

Le rapport P/U, calculé pour un électron tournant sur lui-même de sa charge électrique, est de 10^{21} fois plus grand que le rapport obtenu par la masse gravitationnelle, d'après la formule de Blackett.

Pour l'électron tournant, le champ magnétique est donné par la formule (3), plutôt que par la formule (1).

---

1) St. Procopiu, *Les éléments d'énergie*. Annales Scient. Université Jassy. 7, 1912, p. 280–290.

2) L. Brillouin, *L'Atome de Bohr*, Paris, 1931. L'électron tournant, 280–304.

Le but de cette Note a été de signaler que le magnétisme de la Terre et du Soleil peut être représenté par la formule (3) et (4), tout aussi bien que par la formule (1) de Blackett ; mais, pour l'électron tournant la formule (3) est la seule valable [1]).

(Reçu le 30 Juin 1948).

Laboratoire d'Electricité
de l'Université de Jassy.

1) Une Note plus courte a déjà été publiée dans „Revista Ştiinţifică V. Adamachi" Jassy, le 25 Mars 1948.

595.371

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES AMPHIPODES GAMMARIENS DES EAUX MONÉGASQUES ET FRANÇAISES

(Note préliminaire) *)

par

SERGE CĂRĂUȘU

Le présent ouvrage est le résultat de l'étude d'une petite collection, recueillie à Monaco et Banyuls/mer par mon ami et collègue, Dr. M. Băcescо. Bien que notre matériel soit peu riche (seulement 26 exemplaires), nous avons eu la chance d'y découvrir des espèces pas encore citées pour ces localités – et même pour la Méditerranée – et d'autres espèces, nouvelles pour la science.

Voilà, en-dessous, le matériel déterminé ; les espèces précédées d'un astérisque sont citées pour la première fois pour Monaco et Banyuls/mer ; celles précédées de 2 astérisques sont des espèces nouvelles pour la Méditerranée et les espèces écrites en lettres grasses sont nouvelles pour la science.

1.– ** *Ampelisca gibba* G. O. Sars . . . 1 ♀ ov., 1 ♀ j.
2.– *Urothoe pulchella* (A. Costa) . . . 1 ♀ j., 1 ♂
3.– ** *Pontocrates altamarinus* (Bate & West.) 1 ♀ ov.
4.– * *Synchelidium maculatum* Stebbing 1 ♂
5.– **Monoculodes chevreuxi** n. sp. . . 1 ♀ ov.
6.– **Westwodilla longidactyla** n. sp. . 1 ♀ ov., 1 ♂ j.
7.– *Eusirus longipes* Boeck . . . . 1 ♂
8.– **Rachotropis integricauda** n. sp. . 1 ♀ ad.
9.– * *Eriopisa elongata* Bruzelius . . . 1 ♂ j.
10.– *Elasmopus* sp. . . . . 1 ex. jeune
11.– *Aora typica* Krőyer . . . . . 2 ♂
12.– *Microdeutopus chelifer* (Bate) . . 4 ♂
13.– * *Corophium rotundirostre* Stephensen 1 ♂

1) Le travail, „in extenso", devait constituer une communication faite aux séances du XIII-e Congrès International de Zoologie à Paris, 21—27 Juillet 1948.

14.- * *Siphonoecetes dellavallei* Stebbing 3 ♂, 2 ♀

15.- *Podocerus variegatus* Leach . . 1 ♀.

Et voilà (voir page suivante 461) la liste des stations où ont été récoltés ces animaux (en indiquant en même temps les Caprellides rencontrés).

Dans ce tableau, on voit que la station LIII (dragage à 220 m. profondeur) a fourni les plus intéressantes des formes. Ce fait nous fait espérer que l'exploration des profondeurs plus grandes des eaux monégasques pourrait encore procurer un matériel carcinologique bien intéressant.

Dans la présente note, nous nous limitons à donner seulement les diagnoses des espèces nouvelles.

1. **Monoculodes chevreuxi** n. sp. [1]).

Diagnose. *Taille de la femelle ovigère 4,9 mm. Corps épais, la tête, le 3-e segment du métasome et le 1-er segment de l'urosome carénés à la partie dorsale; les segments du mésosome et les 2 premiers segments du métasome présentent, dorsalement, un contour avec des gibbosités. Yeux séparés par la carène de la tête. Antennes I plus longues que les pédoncules des antennes II. Propode du gnathopode 2, plus étroit et plus court que dans le gnathopode 1. Péréiopodes 1-3 au dactyle long, dépassant l'article précédent. Telson carrément tronqué à l'extrémité, avec 4 soies distales.*

2. **Westwoodilla longidactyla** n. sp [2]).

Diagnose. *La femelle ovigère, avec 5 oeufs dans la poche incubatrice, mesure 6,2 mm. Rostre atteignant exactement l'extrémité du 1-er article des antennes I. Tête dépassant, en longueur, l'ensemble des segments I—IV du mésosome. Processus frontal courbé en bas. Yeux grands, occupant presque entièrement ce processus. Le 2-e article du pédoncule des antennes I considérablement plus grand que le 2-e article; le flagellum plus court que l'ensemble des articles 2+3 du pédoncule, 8-articulé. Le dactyle des péréiopodes 1-4 robuste, considérablement plus grand que le propode. Telson rétréci vers le bout, avec 4 fines soies apicales.*

3 **Rachotropis integricauda** n. sp.

Diagnose. *Taille de la femelle ovigère 5,1 mm. Les trois seg-*

1) Espèce dédiée à la mémoire de l'éminent carcinologiste français Ed. Chevreux.

2) La caractéristique principale de notre espèce réside dans la longueur des dactyles des péréiopodes 1-4; ces dactyles sont considérablement plus longs que les propodes, caractère que ne présente aucune autre espèce du genre.

No. des stations	Date, heure	Localité	Profondeur	Nature du fond	Procédé de récolte	Espèces recueillies
X	23. V. 1939 heure 24	Monaco La digue du port	—1—2m.	Parmi les algues de la digue	Haveneau	*Podocerus variegatus* Leach
XI	23. V. 1939	Monaco Port	—2—4m.	Pierres couvertes d'algues vertes	Filet Mortensen	*Synchelidium maculatum* Stebb., *Elasmopus* sp., *Aora typica* Krøyer, *Microdeutopus chelifer* (Bate). Caprelliens: *Phtisica marina* Slabber, *Caprella acanthifera* Leach forma *discrepans* Mayer, *Pseudolirius Krøyeri* (Haller).
XXVII stn. 07680	2. VI. 1939 heure 9	Monaco En face du musée	—100 m	Vase	Drague Mortensen	*Corophium rotundirostre* Stephensen. Caprelliens: *Phtisica marina* Slabber, *Caprella lipariotensis* Haller.
XXX stn. 07685	5. VI. 1939	Monaco En face du musée	—290 - 300m	Vase	Drague à Mysis (de Băcesco)	*Eriopisa elongata* (Bruz.). Caprelliens: *Parvipalpus major* A. Cărăuşu, *Phtisica marina* Slabber.
LIII stn. 07712	15. VI. 1939	Monaco En face du musée	—220 m.	Vase	Filet Mortensen avec petite drague à Mysis (de Băcesco)	*Ampelisca gibba* G. O Sars, *Monoculodes chevreuxi* n. sp., *Westwoodilla longidactyla* n. sp. *Eusirus longipes* Boeck, *Rachotropis integricauda* n. sp. Caprelliens: *Parvipalpus major* A. Cărăuşu, *Phtisica marina* Slabber.
XVIII	20. IV. 1939	Banyuls/mer Golfe B.	— 8 m.		Dragage, pendant la nuit après tempête.	*Urothoe pulchella* (A. Costa), *Pontocrates altamarinus* (Bate & Westw).
XXIII	25. VI. 1939	Banyuls/mer Cap l'Abeille	—20 - 25m.	Sable	Drague à Mysis (de Băcesco)	*Siphonoecetes dellavallei* Stebb. Caprelliens: *Phtisica marina* Slabber.

ments du métasome portent une forte carène dorsale et deux carènes latérales, dont les extrémités finissent en dent aiguë. Premier segment de l'urosome portant, aussi, une carène dorsale, prolongée en dent aiguë. Rostre bien développé, yeux présents. Flagellum accessoire, absent. Les 3 plaques épimérales crénélées le long du bord postérieur. Pédoncule des uropodes 1 pas plus long que les branches. Telson presque atteignant l'extrémité des uropodes 3 et ne présentant trace de fissure, le bord distal continu.

Les exemplaires-types sont gardés dans les collections de la Station Zoologique Maritime d'Agigéa-Constantza.

Station Zoologique Maritime d'Agigéa
Constantza

(Reçu le 30 Juin 1948)

ACTION DE L'URÉTHANE ET DE LA CHALEUR DANS LA COAGULATION DU SANG AVEC DES SYSTÈMES VITAMINIQUES

par

GH. TUDORANU, I. FONI et GH. CREȚEANU

Dans une autre note [1]) nous avons montré l'action anticoagulante indéfinie avec deux systèmes vitaminiques: 1) acide nicotinique-acide ascorbique et 2) acide nicotinique-thiamine, dans des proportions convenables.

Nous avons trouvé que le plasma de ces systèmes est tout différente des autres plasmas.

Le plasma du premier système a un p_H de 5,8 et le plasma du 2-ème système a un p_H de 6,2.

Le plasma de ces deux systèmes recalcifié ne coagule pas. Il n'a pas de métathrombine ou il est masqué. Il coagule, si on le met en contact avec du sérum provenu d'un plasma oxalaté et recalcifié.

Dans cette note nous allons donner nos résultats: 1) sur l'action de l'uréthane et 2) sur l'action de la chaleur employés comme inhibiteurs de l'action anticoagulante avec les deux systèmes vitaminiques.

Voici nos résultats:

5 ctg. acide nicotinique + 10 ctg. acide ascorbique + 4,5 cmc. sang frais d'homme laisse le sang incoagulable indéfiniment.

5 ctg. acide nicotinique + 2,5 ctg. thiamine + 4,5 cmc. sang frais d'homme laisse le sang incoagulable.

Il résulte de ces expériences qu'on peut obtenir une action anticoagulante avec ces 2 systèmes vitaminiques dans des proportions convenables.

Notons que les vitamines employés isolées n'ont pas d'action remarquable sur la coagulation. Il faut les employer en systèmes.

Action de l'uréthane sur la coagulation du sang.
(vitamines en systèmes).

1) 5 ctg. acide nicotinique + 10 ctg. acide ascorbique + 1,1 cmc.

100% éthyle uréthane, 30 minutes au bain marie à 45° C. On ajoute à ce mélange 4,5 cmc. sang frais et on le met à 45° C. Coagulation en 3 minutes.

2) 5 ctg. acide nicotinique + 10 ctg. acide ascorbique + 4,5 cmc. sang frais. Sang incoagulable. On centrifuge. Le plasma + 1,1 cmc. éthyle uréthane, bain marie à 45° C. Coagulation du plasma en 90 secondes.

3) 5 ctg. acide nicotinique + 2,5 ctg. thiamine + 1,1 cmc. éthyle uréthane, 30 minutes au bain marie à 45° C. On ajoute à ce mélange 4,5 cmc. sang frais et on le met à 45° C. Coagulation en 3 minutes.

4) 5 ctg. acide nicotinique + 2,5 ctg. thiamine + 4,5 cmc. sang frais. Sang incoagulable. On centrifuge. Le plasma + 1,1 cmc. éthyle uréthane au bain marie à 45° C. Coagulation du plasma en 45 secondes.

Il résulte de ces expériences que le sang ou le plasma, provenu des systèmes vitaminiques, est coagulé par l'uréthane.

Action de la chaleur sur le plasma provenu des systèmes vitaminiques.

1) 3 cmc. de plasma du système acide nicotinique + acide ascorbique; bain marie à 45° C.; le plasma reste incoagulable.

2) 3 cmc. de plasma du système acide nicotinique + thiamine. Bain marie à 45° C. Floculation en 8-10 minutes.

Il résulte donc de ces expériences, qu'il y a une différence entre le plasma de nos deux systèmes. Le plasma du I-er système (acide nicotinique + acide ascorbique) n'est pas attaqué par la chaleur, tandis que le plasma du II-ème système (acide nicotinique + thiamine) est floculé.

Discussion.

Comment pourrait-on interpréter l'action anticoagulante des systèmes vitaminiques, d'une part, et l'action coagulante de ces systèmes par l'uréthane et par la chaleur, d'autre part.

Au moment ou nous voulions rédiger cette note, nous avons trouvé l'article de Jeener[2]) sur le rôle des groupes thiol dans la coagulation.

Jeener cite les travaux de Lyons qui croit que dans la coagulation il s'agirait d'une transformation du fibrinogène en fibrine grâce à l'oxidation des groupes thiol (—*SH*—) en groupes disulfuriques. (—*S*—*S*—).

Jeener confirme l'opinion de Lyons. Il travaille avec des différents corps (iodacétamide, sulfon et sulfure de dichloréthyle) qui ont

une action anticoagulante et avec des corps qui coagulent le sang (chloropycrine).

Les corps du premier groupe + fibrinogène purifié empêchent la coagulation, tandis que les corps du II-ème groupe coagulent le fibrinogène.

En revenant à nos systèmes nous pourrions supposer que l'action anticoagulante serait due à l'empêchement de l'oxidation des groupes $-SH-$.

Quand à l'action de l'éthyle uréthane, elle serait due à l'oxidation de ces groupes.

Nous allons revenir dans une autre note pour voir si la coagulation est le résultat de l'oxydation des groupes thiol du fibrinogène.

Laboratoire de la I-ère Clinique Médicale
Faculté de Médecine de Jassy

Reçu le 30 Juin 1948)

Travaux cités

1) Gh. Tudoranu et Gh. Creţeanu - *Action anticoagulante des systèmes : acide nicotinique - acide ascorbique et acide nicotinique - vitamine B_1*, Annales scientifiques de l'Université de Jassy, tome XXX, 1948 (sous presse).

2) R. Jeener, - *Sur le rôle des groupes thiol dans la coagulation du plasma sanguin*, Experientia, Basel, vol. III, fasc. 6. 1947, p. 243-244.

LES INTOXICATIONS PAR L'ALCOOL MÉTHYLIQUE

par

C. STRAT, G. RUSSU et M. CASETTI

Les progrès continuels de la chimie industrielle, les taxes élevées sur les boissons alcooliques, d'une part, l'appât du gain de certains individus de l'autre, sont autant de causes qui provoquent de fréquentes intoxications aiguës et chroniques par l'alcool méthylique.

L'industrie emploie l'alcool méthylique sur une assez grande échelle. Il sert de solvant pour les couleurs, les laques, les peintures ; de moyen d'extraction de différentes essences des plantes médicinales. Il sert également à la préparation de nombreux articles de toilette, etc. Chimiquement, l'alcool méthylique est rarement pur. Il contient beaucoup d'impuretés nocives à notre organisme.

Dans l'industrie, les intoxications par l'alcool méthylique se font généralement par inhalation ou par absorption tégumentaire. Le plus souvent, elles se font d'une manière chronique chez les ouvriers qui sont en contact direct avec l'alcool méthylique.

En dehors de ces intoxications professionnelles, on cite assez fréquemment des cas d'intoxication par ingestion de boissons préparées à base d'alcool méthylique. On a parlé de vraies épidémies de ce genre d'intoxication en Allemagne, et surtout aus Etats Unis à l'époque de la prohibition. Ces intoxications sont favorisées, comme nous l'avons dit, par le manque de matières premières dont on fabrique l'alcool éthylique, et par les hautes taxes sur les boissons alcooliques.

La manière des intoxications diffère suivant la sensibilité de l'individu et la quantité d'alcool méthylique qui a provoqué l'intoxication. On sait qu'outre le méthylalcool on y trouve de fortes substances très nocives à l'organisme et dont les principales sont la formaldéhyde et l'acide formique.

On distingue deux sortes d'intoxications par l'alcool méthylique : l'intoxication aiguë et l'intoxication chronique.

L'intoxication aiguë est très importante. Elle est provoquée géné-

ralement par l'ingestion de boissons dans lesquelles on a employé d'une manière commercialement criminelle de l'alcool méthylique, moins souvent, dans un but de suicide. L'alcool méthylique moins que l'alcool éthylique produit l'ivresse, mais l'effet sur le système nerveux en est de plus longue durée. Après avoir consommé une certaine quantité d'alcool méthylique, mais pas trop grande, on ne peut obtenir un réveil réconfortant qu'au bout de quinze heures de sommeil. Après ce longue repos, l'individu ressent toute fois une grande fatigue, un mauvais état général, des douleurs dans les membres, de la cyanose. Tous ces phénomènes durent, pour la plupart des cas, plusieurs jours. Parmi les phénomènes les plus importantes, on cite les troubles oculaires, caractérisés par des dilatations pupillaires à réaction tardive évidente.

Ces symptômes, propres à l'intoxication par l'alcool méthylique, apparaissent, dans certains cas, quelques heures après, dans d'autres, un peu plus tard, quelques jours après. Si la quantité d'alcool méthylique est plus grande ou bien si la sensibilité de l'organisme est plus accentuée, l'intoxication se manifeste par des phénomènes plus graves qui vont jusqu'à la mort. Dans ces cas l'individu en cause présente un faciès d'une pâleur cyanotique, les pupilles dilatées, les yeus fixement voilés, de fortes crampes abdominales, des douleurs dans les membres, et une dyspnée accentuée. Tous ces phénomènes peuvent s'aggraver et antraîner, partant, une mort soudaine. Généralement les symptômes qui s'aggravent le plus dans ces cas sont ces de la vue.

La quantité d'alcool méthylique qui peut provoquer les intoxications aiguës varie selon la sensibilité de l'individu et l'impureté de l'alcool méthylique ingéré. Des quantités infimes d'alcool méthylique de 5 à 10 grammes par exemple, peuvent produire des symptômes d'intoxication aiguë. La littérature médicale cite des décès survenues après l'ingurgitation d'une seule cuillerée d'alcool méthylique, de même que des cas où des individus consommant regulièrement, au jour le jour de 30 à 50 cmc, pendant un certain temps, ne présentent aucun symptôme d'intoxication. On remarque assez souvent qu'à une nouvelle absorption de cet alcool, il se manifeste une sorte de sensibilisation voire une idiosyncrasie pour cette substance. On a enregistré des cas d'atrophie optique après la consommation d'une petite cuillerée d'alcool méthylique.

On en établira le diagnostic différentiel par le Botulisme, l'intoxication par la Datura Stramonium, l'aconitine. On peut le faire grâce à certains états postdiphtériques qui mènent aux mêmes résultats que les accidents d'alcool méthylique.

Habituellement, on en prononce le diagnostic sur les coémmo-

ratifs. Dans des cas incertains, on doit épuiser tous les moyens afin de savoir si le malade a pris de l'alcool méthylique.

Les intoxications chroniques par l'alcool méthylique sont plus importantes que les premières. Elles proposent un problème médico-social dont la résolution devient imminente.

L'inhalation et l'absorption par la peau d'alcool méthylique pendant une longue période de temps produisent de grands troubles qui naissent insidieusement et déterminent de graves incidents chez les individus atteints. Les troubles oculaires, ici encore, sont au premier plan, et se manifestent par la mydriase, les réflexes attardés, l'obnubilation aboutissant au scotomes et aux névrites retro-bulbaires. En outre, l'irritation de la muqueuse respiratoire est constante. Elle se traduit par des bronchites, des pneumopathies aiguës, et en certains cas, par des oedèmes pulmonaires. Les céphalées, les vertiges, les symptômes nerveux et psychiques complètent le tableau morbide de l'intoxication chronique.

La nécropsie révèle une cyanose accentuée des téguments de la face et de la tête, une hyperémie du cerveau présentant des hémorragies craniennes. Le sang en est généralement liquide. L'estomac et tout le tractus digestif sont irrités, couverts de mucosités ; ils saignent superficiellement plusieurs jours après. Il y existe également une contraction de l'intestin au maximum. Les poumons sont congestionnés et présentent une sécretion muqueuse. On peut trouver dans le foie de l'acide formique produit par la décomposition de l'alcool méthylique. Parfois lorsqu'on fait la nécropsie peu de temps après l'ingestion de l'alcool méthylique, on peut trouver dans l'estomac de cette substance.

Quant au traitement de ces intoxications on n'en a pas encore découvert l'antidote. Aussi, dans ces sortes d'intoxications, le traitement ne peut-il être que symptomatique, et préventif au possible, dans les intoxications chroniques.

Le traitement symptomatique prescrit des médicaments contre la dyspnée et les troubles cardiaques, du repos, des boissons chaudes, des saignées, des injections de caféine. Si l'ingestion d'alcool méthylique est plus grande, on fait au malade des injections de sérum physiologique, de solution Ringer et de substances à effets alcalinisants sur l'organisme. En cas de troubles de connaissance on emploie la ponction rachidienne.

En cas d'intoxications sévères on administre de l'adrénaline en injections sous-cutanées.

Nous avons traité cinq malades dans notre clinique. Nous venons de décrire leurs symptomatologie. En plus on a pu remarquer un symptôme sanguin notoire, une diminution accentuée de réserve alcaline. Cette dernière atteint en certains cas de très petites valeurs. Elle contribue en grande partie à l'aggravation de l'état général sinon à la mort des patients.

Première observation. B. G. officier, âgé de trente ans, on fait entrer au service de réception médicale, le 14 mai 1947, pour état d'inconscience, avec contractions tonico-cloniques des membres supérieurs et inférieurs, cyanose de la face et de la tête, dispnée prononcée, pouls imperceptible. *Historique.* En même temps que lui sont internés trois autres officiers dont l'un présente le même état bien grave. L'un des moins souffrants nous informe que le douze mai, à vingts heures, en bonne compagnie de huit personnes, on achète, en gare Ploești, à un marchand ambulant un litre de rhum, qu'on avale. Aussitôt B. G. en prend quelque trois cents grammes. Peu de temps après, quatre d'entre eux sentent un gros malaise, une forte céphalalgie et des troubles oculaires, la vue obnubilée, d'imperceptibles douleurs aux yeux. Les quatre autres qui consomment plus ou moins la même quantité de rhum ne ressentent aucune manifestation particulière. L'aggravation des symptômes des deux premiers consommateurs, ci-mentionnés, décident les autres à réclamer de l'assistance médicale pour leurs camarades intoxiqués.

Notre malade est de constitution athlétique. Les téguments de la face et des extrémités, ainsi que les lèvres sont cyanosés. Il est inconscient. De temps en temps, il a des contractions musculaires des membres. La respiration fréquente est artificielle. Le pouls au radiale est imperceptible. Les bruits du coeur sont etouffés. On lui administre incessamment un traitement en toniques cardiaques et en excitants vasomoteurs. Cinq minutes après, les mouvements réspiratoires ne s'effectuent plus. On recourt à la respiration artificielle qui n'apporte aucune amélioration. Le malade meurt quinze minutes après son entrée à l'hôpital.

Deuxième observation. Le 14 mai 1947, N. N. S. officier, âgé de trente ans, est interné à la clinique. Inconscient, notre malade présente des contractions musculaires généralisées, un colapsus vasculaire, des vomissements. L'historique reprend toutes les données du premier cas.

Le malade a consommé trois cents grammes environ de rhum, peu après il a ressenti une céphalée qui se prolonge du soir au lendemain quand viennent s'ajouter de nouveaux symptômes tels que troubles visuels, douleurs épigastriques avec nausées et vomissements.

Ces symptômes s'accentuent de plus en plus. Avant son entrée à l'hôpital le patient venait de présenter des convultions, la cyanose des lèvres, de la face, des membres supérieurs et inférieurs, et enfin un état de syncope.

Cet autre intoxiqué est aussi costaud que le premier. Son inconscience continue. Les contractions musculaires se généralisent tout en succédant à des petits moments de relâchement. Le faciès, les lèvres surtout et les membres sont cyanosés. Il est agité. Il a une dyspnée très accentuée, le pouls tachycardique : cent dix pulsations par minute. Les bruits du coeur sont sourds.

On lui administre un traitement en toniques cardiaques vasomoteurs.

Vingts minutes après son entrée, l'état d'agitation et de contraction musculaire s'accentue et ne présente plus de mouvement de la cage thoracique. On a recours à la respiration artificielle, à la saignée et à l'oxygénothérapie. Malgré ce traitement énérgique notre patient succombe au bout d'une demi-heure. Avant sa mort, il a des vomissements sanguinolents.

Troisième observation. S. C. officier, de vingt neuf ans, est interné à la clinique, le 14 mai 1947, pour douleurs dans la région de l'épigastre et de l'hypochondre droit, troubles visuels, céphalgie, asthénie accentuée. Le douze mai, le dit officier ingère deux cents grammes de rhum. Il n'a aucune manifestation particulière jusqu'au lendemain, quand il commence à avoir une céphalée de plus en plus forte et persistente, de douleurs aux globes oculaires, des troubles visuels. Ultérieurement surviennent des vomissements répétés pendant toute la journée, des douleurs abdominales siégeant dans l'épigastre et l'hypochondre droit. C'est avec ces symptômes que le malade est entré à la clinique.

Notre victime est de constitution robuste. Ses téguments et ses muqueuses sont d'aspect normal, le faciès congestionné, point de fièvre, asthénie marquée, légère obnubilation. Il répond difficilement aux questions. Sa réspiration est bruyante. Il a une tachypnée de trente quatre respirations par minute, une légère diminution du murmure vésiculaire à la base ; une tachycardie de cent battements par minute. A l'examen de l'appareil digestif, on constate une langue saburrale, l'abdomen contracté et des douleurs épigastriques, anorexie, nausées et vomissements réflexes oculaires retardés. Les examens de laboratoire effectués à l'entrée du malade montrent : Urine = albumine absente, au sédiments, rares leucocites. R. A. dans le sang = 32. Cl. plasma-

tique = 4,6 °/₀₀, Cl. globulaire = 3,5 °/₀₀. Le dosage de l'urée dans le sang 0,65 °/₀₀; l'urée dans l'urine = 15 gr. °/₀₀.

Aussitôt après l'internement, nous instituons un traitement pour activer la circulation périphérique. On y ajoute des toniques cardiaques, des ponctions rachidiennes contre la céphalée, les troubles de la vue. Après avoir fait le dosage de la réserve alcaline, on commence un traitement alcalinisant en Natrium bicarbonicum per os et Potio Imperialis. L'hypochlorémie est combattue par du sérum Fischer et du sérum chloruré hypertonique. Le 15 mai le pouls ne compte que quatre-vingts quatre pulsations par minute. Il esquise spontanément le signe de Trousseau bilatéralement. La contraction massétérine persiste. Pendant cette journée la réserve alcaline est de 77; Cl. Na plasmatique 3,8 gr. °/₀₀, le globulaire 2,7 °/₀₀. Vers midi, le malade devient légèrement agité, accusant des douleurs dans la région de l'épigastre, des hoquets fréquents, légère cyanose des extrémités. Le 15 mai 1947, le soir, les hoquets se maintiennent. Le patient a une crise tétaniforme qui dure 10', des vertiges, le faciès congestionné, des nausées. Au bout d'une heure, il a une sensation d'engourdissement dans les membres. La nuit, il est tranquille, les phénomènes manifestement tétaniques disparaissent plus ou moins, la respiration redevient régulière et rythmique, le pouls régulier bien marqué, ayant une fréquence de soixante seize pulsations par minute, la tension artérielle 12/6 ½ cm. Hg. Les douleurs épigastriques persistent. Le troisième jour après l'internement, le 16 mai 1947, la réserve alcaline est de 83, le Cl.Na plasmatique 4,7 gr °/₀₀ et le Cl.Na globulaire 2,5 gr °/₀₀. L'urée dans le sang est de 0,45 gr °/₀₀. Pendant la journée, l'état général s'améliore visiblement, Le 17 mai la réserve alcaline est de 76; le Cl.Na plasmatique 4,3 gr °/₀₀. et le globulaire 3,2 gr °/₀₀. Le malade va bien, tous les symptômes antérieures ayant disparus. Ce même jour l'examen ophtalmoscopique ne montre pour tout trouble qu'une diminution de champ visuel pour le rouge-nasal. Les jours suivants, on continue le traitement en toniques cardiaques adjuvantes, en vitamine B et en acide nicotinique. Notre convalescent quitte la clinique le 23 mai 1947 complètement rétabli.

Quatrième observation. Le 14 mai 1947, A. P., officier de vingt quatre ans, entre à la clinique pour troubles visuels, douleurs épigastriques, mauvais état général. Le 12 mai 1947, à vingt heures, il ingurgite une quantité de cent cinquante grammes de rhum, en gare Ploeşti. Le lendemain, il se réveille ayant de forts grands maux de tête qui continuent le jour durant. Il n'a pas d'appetit. Vers la fin du second jour, la céphalgie s'accentue, mais accompagnée de troubles visuels. La nuits, le patient dort tranquillement, pour que trois jours

après l'ingestion du rhum, il constate que les troubles visuels s'étaient accrus. Le malade a des vertiges, des douleurs épigastriques, des nausées et des vomissements. C'est à ce moment qu'on le fait entrer à l'hôpital. Notre malade est bien robuste. Les téguments de la face et des extrémités sont légèrement cyanosés. Il n'a point de fièvre. Il est pleinement conscient. Son faciès atteste cependant des souffrances. Ses pupilles sont en mydriase, les réflexes oculaires attardés. Le pouls régulier ayant une amplitude normale, compte cent six pulsations par minute. Il a la langue saburrale. Il ressent des douleurs à la palpation de l'épigastre. Il présente de l'anorexie. Les examens de laboratoire montrent : urine = normale ; réserve alcaline 21, urée dans le sang 0,54 gr.$^0/_{00}$; urée dans l'urine 21,1 gr. $^0/_{00}$; Cl. Na plasmatique 4,9$^0/_{00}$ et globulaire 3,8 gr. $^0/_{00}$.

On institue un traitement en excitants vaso-moteurs et en toniques cardiaques adjuvants, des boules d'eau chaude aux pieds, ponction rachidienne. La réserve alcaline diminuée est combattue par l'administration de bicarbonate de soude per os et intra-réctal, Potio imperialis et contre l'hypochlorémie du sérum Fischer.

A la suite de ce traitement, le 15 mai, les résultats sont : réserve alcaline montée à 33, tandis que l'urée dans le sang et le Cl. Na plasmatique et globulaire restent les mêmes. On continue le traitement énoncé ; l'état général s'améliore sensiblement hors la forte céphalée qui persiste. La tension artérielle demeure constante : 13,7 cmc. Hg.

Le 16 mai 1947, la réserve alcaline remonte brusquement à 86. On interrompt la médication alcalinisante. Les jours suivantes la céphalée disparaît graduellement, la réserve alcaline descend à 67. On continue le traitement en vitamine B et en acide nicotinique jusqu'au 24 mai, quand le malade, totalement remis de son intoxication, quitte la clinique. L'examen ophtalmologique montre tout d'abord un ralentissement des réflexes d'accommodation et même une sensation d'obnubitation. Le dernier jour d'hospitalisation tous ces troubles disparaissent.

Cinquième observation. Le 12 juin 1947, l'officier F. G., âgé de quarante sept ans est transféré chez nous, venant d'une clinique chirurgicale. Il y avait été interné à cause des douleurs abdominales diffuses, céphalée, agitations, mydriase. Au dire du malade, il résulte que trois jours auparavant, il avait bu deux cents grammes de tzouica et que vingt quatre heures après il s'était très mal senti, ayant des nausées, des vomissements, une forte céphalgie, des douleurs abdominales. Vu ces phénomènes, on le fait entrer dans un service de chirurgie pour abdomen aigu, afin de le faire finalement transporter chez nous.

Le malade est de constitution athlétique. Ses téguments et ses

muqueuses sont colorés normalement. Le faciès congestionné, mydriase pupillaire, soufébrile, céphalée accentuée, agitation, respiration avec odeur d'acétone, tension artérielle $^{14}/_{9}$ cmc. Hg, langue saburrale, abdomen douloureux, anorexie, réflexes rotuliens et pupillaires diminués. Les examens de notre laboratoire montrent : la réserve alcaline 53,1 ; l'urée dans le sang 0,60 gr. $^{0}/_{00}$; Cl. Na plasmatique 3,7 gr. $^{0}/_{00}$ et le globulaire 1,2 gr. $^{0}/_{00}$. On institue un traitement au sérum chloruré, en toniques cardiaques et vaso-moteurs. Le malade est de plus en plus agité, ses paroles sont incohérentes, son faciès se congestionne. Puis il a des halucinations. Il délire enfin. On lui fait une ponction lombaire avec de l'extraction de 20 cmc. L.C.R. Les phénomènes vont s'accentuant, le malade est de plus en plus agité. Il perd les urines. Le jour même à vingt et une heure il succombe.

Les cinq cas que nous venons d'exposer nous mènent aux conclusions que voici :

1. Tous les cinq présentent une intoxication aiguë par l'alcool méthylique à la suite de l'ingestion de breuvages alcooliques falsifiés. Les investigations de la police ont conduit à la découverte d'une fabrique clandestine de boissons alcooliques où l'on employait de l'alcool méthylique, et où l'on préparait le rhum qu'avaient pris nos patients.

2. Dans tous les cas les symptômes d'intoxication apparaissent tardivement, en général de 36 à 48 heures après l'ingestion des breuvages falsifiés.

3. La sensibilité de l'individu est le principal facteur déterminant dans les phénomènes d'intoxication. Sur huit personnes qui avaient consommé, à peu près la même quantité de rhum falsifié, quatre ne présentent aucun symptôme, deux meurent, et deux se remettent à la suite de soins medicaux.

4. Les symptômes oculaires sont au premier plan quant aux manifestations de l'intoxication.

5. Dans tous ces cas on remarque une tendance évidente à l'acidose, avec tous ses signes cliniques, phénomènes probablement dû à la transformation de l'alcool méthylique en acide formique.

6. L'urée dans le sang est au seuil supérieur et le dépasse même dans tous ces cas.

7. Dans les cas de décès, l'autopsie ne dévoile d'alcool méthylique ou acide formique ni dans l'estomac ni dans l'intestin.

8. Il serait intéressant de suivre les manifestations et l'évolution ultérieure des troubles oculaires chez tous ces malades qui ont quitté la clinique guéris.

2-ème Clinique Médicale-Sémiotique
de l'Université de Jassy

(Reçu le 30 Juin 1948)

CONTRIBUTION FLORISTIQUE ET CHOROLOGIQUE RELATIVE À LA MOLDAVIE

par

CONSTANTIN BURDUJA

Les excursions entreprises sur le territoire appartenant aux districts de *Jassy*, *Vaslui*, *Roman*, *Neamț* et *Baia*, nous ont permis d'identifier sur place ou plus tard, dans le matériel recueilli, entre autres, les espèces qui suivent.

Certaines de ces espèces sont citées pour la première fois dans la région et même dans la province entière, et leur présence a une importance floristique et phytogéographique, la mention de certaines autres doit apporter de nouveaux détails sur leur distribution (les indications antérieures étant sporadiques), enfin les unes, communes et très répandues dans une partie de la région, ont été surprises, pour ainsi dire, en plein processus d'expansion et d'invasion dans d'autres endroits.

Une attention particulière a été accordée au relèvement des différences morphologiques constateés chez certaines espèces dans leur rapport avec les diagnoses courantes.

Nous avons jugé nécessaire d'indiquer peut être trop de détails, dans le but de localisation précise des espèces au point de vue géographique, et de même, nous avons noté des données d'ordre topographique, édaphique et biotique (les espèces associées) pour leur situation, au point de vue des circonstances ambiantes. Nous indiquons également la date de la récoltes ou de la notation.

Salsola kali L. **f. tenuifolia** Moqu. Dans le voisinage du village de Tupilați (R.) [1] (rev. PȚ) [2] sur les bords à alluvions sablonneu-

1) Dans le texte, le nom du district respectif est indiqué par l'initiale : Jassy (J.), Vaslui (V.), Roman (R.), Neamț (N), Baia (B.).

2) Une partie du matériel a été revue ou déterminée par MM. le Prof. I. Prodan et Em Țopa-Cluj. Ce matériel est marqué dans le texte par (rev. PȚ) ou bien (dét. PȚ). Une autre partie l'a été par M. E. J. Nyárády-Cluj [dans le texte : (rev. N) ou (dét. N)].

Je les prie tous de trouver ici l'expression de ma bien vive gratitude.

ses de la rivière Moldova, sous forme de population dense, mais restreinte, mêlée à : *Artemisia austriaca* L., *Euphorbia Gerardiana* Jacq., *Gnaphalium uliginosum* L., *Polygonum aviculare* L., *var. condensatum* Becker, *Pulicaria vulgaris* Gärtn., *Trifolium fragiferum* L., (18. IX. 946). Sur le talus et en bordure de la chaussée nationale dans le secteur des collines de Trudeşti Commune de Ghigoeşti (N.), (rev. PŢ.) quelques groupes compactes de quelques mètres carrés, et dans le territoire cultivé voisin, comme des individus isolés. L'altitude maximum 391 m. s. m., sol argileux-sablonneux mêlée à un peu de gravier. J'ai noté sur le talus et la bordure de la route : *Achillea millefolium* L., *Anthemis tinctoria* L., *Artemisia austriaca* Jacq., *Asperula cynanchica* L., *Berteroa incana* (L.,) D. C. *Botriochloa Ischaemum* (L.) Keng, *Centaurea rhenana* Bor., *Crepis rhoeadifolia* M. B., *Dianthus membranaceus* Borb., *Eryngium campestre* L., *E. planum* L., *Galium verum* L., *Knautia arvensis* L., Coult., *Linum austriacum* L., *Lotus corniculatus* L., *Medicago lupulina* L. *f. glandulosa* M. *et* K., *Onobrychis viciaefolia* Scop., *Plantago lanceolata* L., *Potentilla argentea* L., *Salvia nemorosa* L., *S. verticillata* L., *Scabiosa ochroleuca* L., *Teucrium chamaedrys* L., sur le terrain cultivable : *Spergula arvensis* L., *v. vulgaris* M. *et* K. ad *f. laricina* (Wolf) Aschers. cf. (24) [1]) et sur une parcele de trèfle : *Arenaria serpyllifolia* L., *Crepis rhoeadifolia* M. B., *Erigeron canadensis* L., *Falcaria vulgaris* Bernh., *Glaucium corniculatum* (L.) Curt., *Nonnea pulla* (L.) DC., *Trifolium arvense* L., *Tr. pratense* L. *ssp. sativum* Schreb. (7. IV. et 8. IX. 1947). Sur le talus du deblai pratiqué dans les dépôts alluvionnaires de la rivière Bistriţa pour l'installation de la voie ferrée à Piatra Neamţ, dans le voisinage de la caserne, comme des individus isolés. Le sable et legravier abondent dans le sol. J'ai noté, espacées sur la surface végétale : *Artemisia austriaca* Jacq., *Berteroa incana* (L.) DC., *Botriochloa Ischaemum* (L.) Keng., *Thymus* sp.

Dans l'avant dernière localité la plante semble s'être instalée tout récemment et nous pouvons nous attendre à ce qu'elle serve de centre d'expansion à l'encombrante mauvaise herbe, bien connue dans le district de Jassy (40). Quant aux autres endroits, nous devons mentionner que l'espèce a déjà été indiquée, dans le distr. de Roman, à Elisaveta Doamna (12) et dans le distr. de Neamţ, au E-S-E de la ville de Piatra-N., sans indications précises du lieu (13 b).

Dianthus membranaceus Borb. L'espèce a été mentionnée dans la Moldavie, pour la première fois, par Grecescu (15) sous le

1) Les chiffres mis entre parenthèses indiquent les numéros correspondants dans la bibliographie.

nom de *D. pseudobarbatus* Boiss. syn. entre autres, *D. Rehmanni* Blocki et *D. membranaceus* Borb. Ultérieurement la plante est citée sous le nom de *D. Rehmanni Bl.* (36) et l'on conteste à ce dernier même la synonymie avec *D. membranaceus* Borb. (33, pag. 273). Récemment, c'est ce dernier nom qui est reconnu comme légitime (7) et les autres comme synonymes.

Après l'avoir trouvée et récoltée souvent dans nos excursions et d'autre part, après l'avoir examinée dans l'Herbier de l'Institut botanique de Jassy, nous pouvons communiquer les informations suivantes relativement à la distribution de cette espèce:

Le district de Neamț: le village Bărcu, dans la clairière de V. Aga de la forêt Deasa (26.VII.946); Com. Budeşti-Ghica: dans les prairies de Peştera (1.VII.946); Com. Ghigoeşti: sur la banquette de la chaussée de la colline Trudeşti (pour les espèces associées, voir *Salsola kali*), les prairies de Bahna Mare, dans les endroits pas trop humides (8.IX.947); Com. Bărgăoani: dans la région nommée „în Infundătură", sur la fossé de la chaussée (20.VI.947); Com. Dragomireşti: dans la prairie „In Cot" (Mastacan) (19.VII.938), la colline de Podişu (Tarniţa), sur son versant abrupt de l'Ouest, mêlé à: *Anemone silvestris* L., *Aster Amellus* L., *Inula hirta* L., *Cerasus fruticosa* (Pall.) Woronow. (2.X.945, 11.V.947), Com. Talpa: dans la terre de Belceşti, sur le bord en friche de la route (10.VII.947) (H. B.) [1]) le mont Cozla (Piatra-N.) (1.VII.900) et la colline de Boiştea (Tg. Neamț (7.VIII.934) (H. I.).

Le district de Roman: Com. Bozieni-Balş; sur la colline de la Chiciora (Huciul barabulelor), sol argileux-sablonneux (26.VI.947; Com. Dulceşti: dans la prairie du talus de la vallée de la rivière Moldova (village de Corhana (28.VI 947); Com. Simioneşti: prairie dans la vallée majeure de la rivière Moldova où nous avons noté: *Achillea millefolium* L., *Agropyron intermedium* (Host.) Beauv., *Eryngium campestre* L., *Galuim verum* L., *Onobrychis viciaefolia* Scop., *Salvia nemorosa* L., *S. verticillata* L., *Senecio Jacobaea* L., *Scabiosa ochroleuca* L. (28.VI.947); Com. Văleni: la forêt de Gropi, dans la clairière de Sipot (6.VI.946), la prairie de la Parcelle Prundu (forêt Corhana) de la vallée de la rivière Moldova (30.VI. 946) (H. B.).

Le *district Baia;* Com. Miroslăveşti: la prairie Tălpăluişte (Ver-

1) La notation (H. B.) s'inserre après les localités d'où provient notre propre matériel, tandis que (H. I.), aprés celles d'où est collectionné le matériel appartenant à l'Institut botanique de Jassy.

şeni), mêlé à: *Agropyron intermedium* (Host.). Beauv., *Centaurea scabiosa* L., *Campanula bononiensis* L., *Potentilla* sp., *Melampyrum arvense* L., *Medicago falcata* L., *Galium verum* L., *Eryngium campestre* L., *Cichorium intybus* L., *Convolvulus arvensis* L., *Seseli annuum* L., *Senecio Jacobaea* L., *Salvia nemorosa* L., *S. verticillata* L., (10.VII.947) (H. B.). Leucuşeşti (VIII 896), Toleşti, Toleşti-Huci (14.IX.896), Stăncești (8.VI.894) (H. I.).

Le *district de Jassy:* publiée (40) sous le nom de *D. collinus* W.K. [1]) (un exemplaire figurant sur la feuille d'herbier contenant le matériel de Plopu-Ţiganaşi, = *D. capitatus* Balb.), *D. glabriusculus* (Kit.) Borb., *D. trifasciculatus* Kit. (la dernière espèce mentionnée comme nouveauté dans la flore de la Moldavie), la forêt du côté de Hadâmb, Cristeşti-Ungheni, la vallée de Bahluet, Ciurea (H. I.). La région de Bârnova: le bois, défriché en partie, de la colline Durui-toarea, mêlé à: *Anthemis tinctoria* L., *Brachypodium silvaticum* (Huds) Beauv., *Calamintha Clinopodium* Moris., *Campanula cervicaria* L., *C. persicifolia* L., *C. rapunculoides* L., fo. *trachelioides* (Bieb.) Hay. u. Hegi *Chrysanthemum corymbosum* L., *Ch. leucanthemum* L., *Dactylis glomerata* L., *Hypericum perforatum* L., *Lapsana communis* L., *Lathyrus nissolia* L., *v. genuina* Uechtr. *Trifolium hybridum* L., *Tr. pannonicum* L., *Tr. pratense* L. *subvar. genuinum* Rouy., *Tr. strepens* Cr. (que je l'ai cueilli pour la Flora Romaniae Exsiccata) et la prairie dans la clairière du Schit, associée à: *Agropyron intermedium* (Host.) Beauv., *Bromus inermis* Leyss., *Chrysanthemum corymbosum* L., *Chr. vulgare* (L.,) Bernh. *Galium verum* L., *Lathyrus hirsutus* L., *Medicage falcata* L., *Plantago media* L., *Peucedanum carvifolia* Vill., *Potentilla pedata* Willd ssp. *pinnatifida* Griseb., *Senecio Jacobaeia* L., *Stachys officinalis* (L.) Trev., *Tragopon orientalis* L., *Trifolium montanum* L., *Tr. medium* L., *Veronica spicata* L., (7.VII.947); prairie sur la colline „Podgoria Galata" vers la vallée du Bahlui, accompagné par: *Astragalus cicer* L., *Brachypodium pinnatum* (L.) Beauv., *Bromus inermis* Leyss., *Coronilla varia* L., *Galium verum* L., *Medicago falcata* L., *M. varia* Martyn, *Plantago media* L., *Salvia nemorosa* L., *Tragopogon orientalis* L., *Trifolium pratense* L., *Tr. montanum* L., *Trinia Kitaibelii* B. M. (rev. PŢ) et du côté de Miroslava (6.VII. 947), à Breazu dans une prairie non loin de la source d'eau minérale, associée à *Chrysanthemum corymbosum* L., *Phlomis pungens*

1) Sur la distribution en Roumanie de cette espèce voir également I. Prodan (35), pag. 276.

Willd., *Ph. tuberosa* L., *Serratula radiata* (W. K.) M. B. (14.VI. 947); dans la forêt Repedea, aux environs du canton sylvique (15.VI 947); sur la colline de Păun, au Nord du village du même nom. (15.VI.947) (H. B.).

Le *district de Botoşani:* sous le nom de *D. carthusianorum* L. *v. latifolium* Griseb. et *v. saxigenus* Schur (27); Siminicea (VII.896), Leorda (VIII.896) (H. I.).

Notre propre matériel ainsi que celui qui appartient à l'Institut botanique de Jassy, présente des variations assez vizibles, pourtant nous nous gardons bien de les compter parmis les microunités avant de continuer les observations en nature et d'effectuer eventuellement des cultures; les variations nous apparaissent en bonne partie comme des réflexes temporaires des circonstances écologiques.

Hepatica transsilvanica Fuss. (= *Anemone tr.* (Fuss) Heuff. *A. angulosa* Lam.). A Tazlău (N.) dans la forêt (*Fagus silvatica* L., *Abies alba* Mill.) du monticule de Petroaia sur les bords du torrent de Rău (11. V. 946) et à Borleşti (N.) dans la vallée du ruisseau de Nichit, en bordure de la forêt qui recouvre le monticule de Sângeru, non loin du canton sylvique (20. IX 946). Il est intéressant de remarquer que selon les mentions de la littérature (10,29) [1]) et selon ce qui précède, les localités situées le plus à l'est où la plante fait son apparition dans de district de Neamţ, sont situées plus ou moins sur la ligne de contact entre les formations du Flysche marginal et les dépôts du Miocène sous-carpatique (1, 3, 22, 23).

Thalictrum foetidum. L. v. **genuinum** Rikli. Sur le flanc sud-ouest du mont Petricica (Piatra-N.) à l'altitude approximative de 460 m. sur la couche mince de sol végétal qui recouvre la roche mère constituée de schistes bitumineux à ménilites et plus rarement entre des blocs de grès blanc silicieuse (2). Dans le voisinage de la plante on voit apparaître: *Asperula glauca* (L.) Bess. (n.), *Astragalus onobrychis* L. (n), *Aster amellus* L. (n), *Campanula sibirica* L. (n), *Cornus mas* L., *Cotoneaster nigra* Wahlb., *Crataegus monogyna* Jacq., *C. monog. f. decusata* Wallr. (n), *Cytisus nigricans* L., *Dianthus glabriusculus* (Kit.) Borb., *Euphorbia polychroma* Kern., (n), *Evonymus verrucosus* Scop. (n), *Libanotis montana* Cr. (n), *Ligustrum vulgare* L., *Medicago falcata* L., (n), *Phleum montanum* Koch (n), (det. N), *Prunus spinosa* L., *Salvia verticillata* L. (n), *Spiraea* sp., *Stipa capillata* L. (n), *Stachys recta* L., *Teucrium montanum* L., v. *vil-*

1) L'indication de Petrescu (29) n'est pas précise, mais dans l'Herbier de l'Institut botanique de Jassy il y a une feuille avec le matériel cueilli par lui a Secu (N.) (1917).

losum Roch. (n), *Thymmus* sp., *Veronica austriaca* L. (det. N) (n) [1].

Le versant ouest - sud - ouest de ce mont, très incliné, sensiblement dénudé, traversé de plusieurs torrents profonds, ayant une quantité importante d'éboulis accumulés à la base des corniches, offre sur ces derniers, mais particulièrement sur es affleurements de la roche constitutive (voir plus haut), un asile à une flore riche en éléments xérothermiques. Grâce à l'interdiction des pâturages et de la protection des plantations effectuées, une bonne partie de la surface du versant est déjà dominé spontanément ou artificiellement par la foret qui semble être en plein progrès. Sous les arbres certaines espèces mésophiles trouvent des conditions d'existence. Nous citons comme de nouvelles espèces, en dehors de celles déjà mentionnées et de celles qui seront insérées à part dans le présent mémoire : *Agrimonia Eupatoria* L., *Agropyron caninum* (L.) Beauv., *Bupleurum falcatum* L., *Cornus sanguinea* L., *Erysimum pannonicum* Cr., *Galium verum* L., *Glechoma hirsuta* W. K., *Hieracium Bauhini* Bess. (det. N), *Malus silvestris* (L.) Mill., *Pyrus piraster* (L.) Borkh., *Taraxacum officinale* Web., *Trifolium alpestre* L., *Tr. strepens* Cr., *Valeriana officinalis* L., *Veronica chamaedrys* L., *V. officinalis* L., *Viburnum opulus* L.

Dans le de Neamț l'espèce a été mentionnée de sur le mont Ceahlău (37).

Potentilla pedata Wild. ssp. **pinnatifida** Griseb. (det. PT) Jusqu'à présent on connaissait l'espèce en Roumanie, seulement dans la Dobrudja (35,36). Nous l'avons cueillie dans les prairies de la clairière du Schit (Bârnova) (I). Pour les espèces associées voir le Dianthus membranaceus, dans ce mémoire. (7.VII. 947).

Medicago varia Martyn (= falcata×sativa).— On ne mentionne plus dans la littérature récente (7) l'hybride sur lequel nous possédons une indication vague (10) : „par les paturages stériles de la Moldavie". Cette mention se trouve confirmée par les lignes qui suivent. Sur la colline de Păun, au nord du village du même nom, (I.), altit. 358 m s. m. (15.VI.947) ; dans une prairie du voisinage de l'ermitage de Tărâță, altit. 280 m. s. m. (15.VI.947), une autre prairie voisine de la nouvelle variante de la chaussée nationale et dans la prairie de la parcelle appelée „la vigne Bădărău", altit. 320 m s. m., d'où je l'ai cueillie pour la Flora Romaniae Exsiccata et où j'ai noté dans la société de la plante : *Achillea millefolium* L., *Allium scorodoprasum* L., *Arrhenatherum elatius* (L.) J. et C. Presl, *Astragalus cicer* L. *v. vulgaris* Ducomm., *Brachypodium pinnatum* (L.) Beauv., *Briza media* L., *Centaurea scabiosa* L., *Dactylis glomerata* L, *Convolvulus arvensis* L., *Coro-*

1) Les espèces notées (n) sont nouvelles pour cette montagne ; pour les autres ainsi que pour compléter l'inventaire floristique voir : Papp (26) — étude dén —, Grințescu (17,18), Panțu (25), Grecescu (16) et Prodan (36 b.).

nilla varia L., *Crepis biennis* L., *Cichorium inthybus* L., *Festuca pratensis* Huds., *Fragaria viridis* Duch., *Galium verum* L., *Koeleria gracilis* Pers., *Linum austriacum* L., *Salvia verticillata* L., *Silene inflata* (Salisb.) Sm. *f. angustifolia* DC., (rev. PT) *Stacys officinalis* (L.) Trev., *subv. hirtus* (Leysser) Béguignot, *Tragopogon orientatis* L., *Trifolium medium* L., *subv. genuinum* Rouy., *Tr. montanum* L., *Veronica teucrium* L., *Vicia cracca* L., *v. vulgaris* Koch, *Cuscuta epithymum* Murr. parasite sur: *Medicago falcata* L., *M. lupulina* L., *f. glandulosa* M et K., *Rhinanthus rumelicus* Vel. (Calix margine dense superficie sparse glandulosus), *Teucrium chamaedrys* L., (rev. P.T.) (24.VI.947); les trois dernières stations, sur la colline de Repedea (I.). Dans la prairie de la colline appelé „Podgoria Galata" sur ses flancs, vers la vallée du Bahlui, (pour les espèces „associées voir *Dianthus membranaceus*). La plante présente dans le coloris des fleurs une gamme de variations dont quelques unes rappelent singulièrement l'espèce *Medicago sativa*. Sur la colline de Cîrlig-Dulceşti, près du village de Corhana (R.) (26. VI. 947) et sur la colline de Morei (Borniş), Com. de Dragomireşti (N.) (27.VI.947). Dans ces dernières localités on trouve à peu près des champs de luzerne artificielle de *Medic. sativa* et des populations sauvages de *Medic. falcata*.

Trifolium medium L. **sp. Sarosiense** (Hazsl) A. u. G. Dans la vallée de la rivière Iapa (N.) (VI.938); le matériel se présente avec le calice couvert de poils touffues, particulièrement près de la bouche et muni de nervures variant au point de vue de grosseur et du nombre, même dans le même capitule. Dans la forêt de Hlăpeşti, com. de Dragomireşti (N.) (15.VI.941). Le caractère velu du calice est à peu près nulle, excepté très peu de poils rares, près de la bouche. Les nervures varient dans le même capitule comme nombre et dans la même fleur, comme longueur et grosseur. Dans la forêt de la vallée de Slatina, village de Ţolicea (N) (22.V.947); le matériel diffère du précédent par la présence de poils plus abondants longues, mais cependant rares. Les variations de ce genre ont été annotées également au matériel édité dans la Flora Romaniae Exsiccata (46).

Euphorbia polychroma Kern. En petites touffes, sur le talus des torrents, sur les bosquets nains et dans la société de l'espèce *Thalictrum foetidum* du versant sud-ouest du Mont Petricica (Piatra N.) (9.VI.946). En Moldavie la plante est connue dans des localitées éloignées de la présente (10, 15, 39),

Vitis silvestris Gmel. En bordure de la forêt sur la côte de

Pietrăria, exposée nord-ouest, altit. 340 m. s. m. près le village d'Obîrşia, com. de Dragomireşti (N.); j'ai noté dans la société des plantes: *Acer campestris* L., *Agrimonia Eupatoria* L., *Asparagus tenuifolius* Lam., *Brachypodium silvaticum* (Huds.) Beauv., *Cerasus avium* (L), Mnch. *v. sylvestris* Kirschl. *Clematis Vitalba* L., *Corylus Avellana* L., *Evonymus europaeus* L., *Fagus silvatica* L., *Heracleum sphondylium* L., *Inula britanica* L., *Medicaga falcata* L., *Origanum vulgare* L., *Quercus robur* L., *Rubus* sp., *Salvia glutinosa* L. (4.IX. 947); en bordure de la forêt de Mănăstirea (Huci), altit. 320 m. s. m., même exposition, près du village de Negoeşti, même commune (3.X. 947); sur la crête ou la proéminence de Ripa Roşie de la forêt de Dîrloaia, commune de Bălăneşti (N.). (23.IX.946). Ces localités se trouvent en dehors de l'aire de distribution déjà connue (31) en Moldavie.

Angelica palustris (Bess.) Hoffm. — Dans la prairie naturelle et humide de la vallée de Bahna Mare. On cite pour la première fois en Moldavie. Pour des données stationnelles, voir *Ligularia sibirica* dans ce mémoire.

Peucedanum carvifolia Vill.—La plante a attiré l'attention des botanistes dans fort peu de localités de la Moldavie (10, 15, 26). Dans des touffes installées par de petites dépressions humides, entre les vignes, dans le village de Vlădiceni (1. IX. 945), dans une station analogue sur la colline de Păun (en contre bas de l'église du village), toutes les deux stations dans la commune de Bucium (I.); une partie du matériel de cette dernière localité possède des gaines foliaires longues et flexibles (? *v. podolicum* Bess.) (20. VIII. 947). Dans la clairière du Schit (I.) en société de *Dianthus membranaceus* et en bordure de la forêt (7. VII. 947). En bordure des forêts: pe Coastă, Craiu, Viişoara, dans la parcelle non cultivée à l'est de la clôture de l'église, toutes autour de la vallée d'Obîrşia, com. de Dragomireşti (N.) (1-7. IX. 947). A Păun autour de la plante j'ai noté: *Viburnum lantana* L., *Carpinus betulus* L., *Trifolium medium* L., qui présente le tube du calice à une villosité rare (? *v. eriocalycinum*, Hausskn.) et dans les localités du voisinage d'Obîrşia: en bordure de la forêt: *Agrimonia Eupatoria* L., *Achillea millefolium* L., *Campanula trachelium* L., *Calamintha Clinopodium* Moris, *Euphorbia cyparisias* L., *Echinops commutatus* Juratz., *Lolium perene* L., *Medicago lupulina* L., *Pimpinela saxifraga* L., *Teucrium chamaedrys* L., *Veronica orchidea* Cr. et dans la forêt: *Acer campestris* L., *Cornus sanguinea* L., *Corylus Avellana* L., *Crataegus monogyna* Jacq., *Clematis recta* L., *Evonymus europaeus* L., *Lapsana communis* L., *Quercus robur* L., *Q. sessili-*

flora Salisb., *Prunus spinosa* L., *Pulmonaria molissima* Kern., *Salvia glutinosa* L.

Le matériel possède des involucelles, contrairement à la façon dont l'espèce est parfois représentée (41, 43).

Peucedanum palustre (L.) Mnch.—Dans la prairie de la vallée de Bahna Mare, à l'endroit où se trouve *Angelica palustris*. La plante est mentionnée vaguement et sporadiquement (10) en Moldavie.

Selinum carvifolia L. — Au même endroit que l'espèce précédente. L'observation relative à la mention de l'espèce précédente en Moldavie, est également valable pour celle-ci (10).

Bonnier (4: IV) insère les synonimes de cette espèce: *Angelica carvifolia* Spr. et *Mylinum carvifolium* Gaud. aussi parmi les synonimes de l'espèce *Seseli carvifolium* Vill., cantonée uniquement (21 : V_2) dans le sud de la France.

Menyanthes trifoliata L. — Nous ajutons encore deux localités aux anciennes indications (10,16): en bordure du petit ruisseau au cours lent, dont l'eau est recouverte d'une pellicule irrisée et dont le limon est de couleur rouge brune due aux dépôts d'oxyde de fer (42), dans la vallée du Răvnic, comm. de Bălăneşti (N.), altit. 330 m. s. m. (26. VI. 940) et dans le marécage de Bahna Mare. Les détails sur la dernière localité sont données à l'espèce *Ligularia sibirica*. Dans les deux stations la plante manifeste une vigueur remarquabile; elle doit cependant soutenir une lutte pénible pour l'espace avec *Carex* sp.

Anchusa italica Retz **f. bivestita** Guşul.—Sur la colline de Bisericei, près du santier qui relie le village de Căciuleşti à celui de Gura Văiei (N.) où j'ai encore noté: *Bromus inermis* Leyss., *Linaria vulgaris* L., *Echium vulgare* L. (8. VI. 46); dans la forêt de Repedea (I.), près du canton sylvique, en marge d'un chemin abandonné vers le ruisseau de Vasluet (8. VI. 947) et sur la colline de Vişan, comm. de Bucium (I.), près de l'hôpital de Socola, en bordure d'une vieille tranchée militaire (26. V. 948).

Ces localités se trouvant à peu près sur la même ligne que les découvertes de la steppe „Bălţi-Hotin" (44), indiquent pour le moment (la plante pourrait aussi se trouver plus au nord) une extension sensible dans notre province, où elle n'a pas encore été mentionnée, de la limite nord de son champ.

Teucrium montanum L. **v. villosum** Roch. (=*T. pannonicum* Kern.). — Sur le versant sud-ouest du mont Petricica, (rev. PŢ) par les mêmes touffes que *Thalictrum foetidum*. Les vielles citations de Moldavie ne sont pas d'accord: Brandza (10) cite l'espèce *T.*

mont. L. *β. pannonicum* (=*T. pann.* Kern.) de Caraclău, alors que Grecescu (15) cite, toujours du même endroit, l'espèce *T. montanum* L.

Iva xanthiifolia Nutt. — L'apparition de cette espèce néophyte dans plusieurs localités de Moldavie a été signalée dans de récents ouvrages de botanique (47, 39, 48). Nous l'avons observée à Cristești (I), près de magasins de la gare et dans le village en bordure des chemins, sous forme de population dense, composée d'individus vigureux (10.VIII.947); à Buhăești (V.), autour des magasins de la station, des individus isolés, accompagnés de: *Amarantus albus* L., *A. retroflexux* L., *Salsola kali* L., *Xanthium spinosum* L., *X. strumarium* L. (3.VIII.947); à Dumesti (V.) des petits groupes entre les lignes de la voie ferrée (3.VIII.947); à Roman, entre les lignes de triage de la station, des individus rares (13.VII.947); à Piatra-N., sur les terrains vagues recouverts d'abondants dépôts de fumier, sur les bords de la rivière de Cuejdiu autour de la rue de Petru-Rareș, des individus isolés mêlés à: *Datura stramonium* L., *Xanthium strumarium* L. et des populations compactes d'individus très vigureux (26.VII.947). Il paraît que la plante a été surprise dans son expansion vers l'ouest (atteignant dans sa dernière étape la limite des Monts Carpathes), expansion favorisée et précipitée par le trafique intense routier et ferroviaire, dû à la dernière guerre. La végétation luxuriante à Piatra de cette espèce, née dans une région de steppes (8) dans sa patrie d'origine, est une preuve qu'elle supporte aussi un climat de région montagneuse et périphérique et que le facteur édaphique (richesse du sol en matières azotiques) semble être prépondérant.

Carpesium cernuum L. — Dans la forêt de Tarnița près le village de Negoești, comm. de Dragomirești (N.) où j'ai déjà noté: *Carpinus betulus* L., *Cornus mas* L., *Fagus silvatica* L., *Ligustrum vulgare* L., *Hieracium sabaudum* L., *Poa nemoralis* L., *Quercus robur* L., *Sedum maximum* L. (7.IX.947).

Ligularia sibirica (L.) Cass. — Dans la prairie humide de la vallée de Bahna Mare, comm. de Bălănești (N.). La plante a une constitution exceptionnellement robuste: les pédoncules capitullifères de la base mesurent 9 cm, les feuilles caulinaires ont le limbe épais et herbeux (pas membraneux comme d'habitude) assez bien développé; elle prospère sur un sol très humide, un peu spongieux dans les couches supérieures et teinté de rouge brun (dépôts d'oxyde de fer).

En liaison avec l'abondance d'humidité dans le sol, la végétation manifeste une disposition dans des zones qui ont une composition flo-

ristique un peu variée. Sur le ruisseau au cours lent, au limon rouge brun et dont l'eau a une pellicule irrisée, ainsi que sur le terrain marécageux du voisinage immédiat (partiellement inondé) *Menyanthes trifoliata* s'installe abondamment ; toujours sur la même espèce de terrain, mais sans se mélanger à *Menyanthes, Succisa pratensis* Mnch. [1]) s'instale dans des portions voisines. Les deux espèces s'évitent réciproquement et s'associent à Carex sp.

La présence de ces deux espèces (la première sur une surface plus restreinte) détermine deux variantes dans le zone de végétation suivante qui recouvre un terrain très humide mais pas inondé. Dans la variante de *Menyanthes* se trouvent : *Ligularia sibirica* et *Sonchus arvensis* L. *v. uliginosum* M. B. et dans celle de *Succisa : Angelica palustris.* Les espèces communes des deux variantes (énumérées approximativement dans l'ordre décroissant de leur importance quantitative) sont : *Mentha aquatica* L., *Trifolium hybridum* L., *Tr. pratense* L. *v. spontaneum* Willk., et *f. albiflorum* Pluskal, *Potentilla Tormentilla* Neck., *Filipendula Ulmaria* (L) Maxim. *f. nivaea* (Wallr.) Sch. et Kell., *Parnassia palustris* L., *Lycopus europaeus* L., *Prunella vulgaris* L, *Dianthus superbus* L., *Epilobium parviflorum* Schreb., *Lythrum salicaria* L., *Hypericum acutum* Mnch., *Valeriana officinalis* L., *Selinum carvifolia* L., *Peucedanum palustre* (L.) Mnch, *Phragmites communis* Trin.

Sur le terrain voisin, un peu plus élevé et par conséquent moins humide, la végétation est composée de (toujours selon l'importance décroissante) : *Selinum carvifolia, Peucedanum palustre, Lythrum salicaria, Gentiana pneumonanthe* L., *Filipendula Ulmaria f. nivaea, Potentilla Tormentilla, Angelica palustris, Dianthus superbus, Parnassia palustris, Serratula tinctoria* L., *Succisa pratensis, Valeriana officinalis, Lysimachia vulgaris* L.

Enfin sur la portion de terrain plus élevé et desséché, la composition de la couche végétale est la suivante : *Lythrum salicaria, Gentiana pneumonanthe, Geranium palustre* L., *Molinia coerulea* (L.) Mnch., *Selinum carvifolia, Peucedanum carvifolia, Dianthus superbus, Heracleum sphondylium* L., *Succisa pratensis.*

Dans l'ancien royaume l'espèce a été découverte et publiée seulement de Sinaia et Buşteni (15, 28). En Transylvanie elle a eté publiée

1) Possède dans ses capitules certaines fleurs dont le calice proprement dit a cinq arêtes et d'autres, à calice avec quatre arêtes. Cette réduction du nombre des arêtes, constatée et exprimée déjà par De Candolle (13) n'est plus mentionnée dans les descriptions des grands ouvrages floristiques à consulter (4, 20, 21, 41, 43) que nous avons eus sous la main.

(45, 32, 33, 34) de plusieurs localités situées dans la région des Carpathes orientaux [qui fournissent aujourd'hui même de nouvelles localités (5)]. Toujours en Transylvanie on l'a trouvée dans la région de Cluj à l'altitude de 500 m. environ.

F. Pax (28) considère cet élément altaïque propre à la région montagneuse en Roumanie.

Dans les ouvrages phytogéographiques plus récents on voit une manière similaire d'apprécier la distribution de l'espèce par rapport à l'altitude. M. le Prof. Al. Borza (6,6 b) la considère comme une espèce des plantes altaïques répandues surtous dans les étages supérieurs, espèce des marécages tourbeux. M. le Prof. Tr. Săvulescu (44 b) la considère comme une espèce carpathique ayant un caractère sous-artique oréphile. d'après la manière dont elle est distribuée.

La station qui a été en discussion, située à 20 km. vers l'est des Carpathes et à l'altitude de 320 m. environ, aussi bien que les localités (communiquées par l'obligeante lettre de M. le Dr. Em. Ţopa - Cluj) Dersca, distr. de Dorohoi, Bosanci, distr. de Suceava, Calafindeşti distr. de Rădăuţi, situées à l'altitude de ca. 350 m. environ et aussi vers l'est des Carpathes, nous rappellent le façon dont la plante est distribuée en Volhynie et Podolie où elle se trouve dans les prairies humides (14) à des basses altitudes.

Erigeron annuus (L.) Pers.—Nous sommes redevables des premières indication relatives à la présence de cette plante en Moldavie à M. Răvăruţ (38,40). Nous l'avons cueillie dans la vallée du ruisseau Iapa (Neguleşti) (N.) (2. VII. 938), dans la clairière du Sipot de la forêt de Gropi, com. de Văleni (R.) (6. VI. 946), dans la forêt de Codrul Moreni, même commune (29. VI. 946); dans la clairière de Dumbrava, forêt de Cîrlig (R.) (10. VI. 946).

Calamagrostis arundinacea (L.) Roth. var **brachyclada** Torges.—Sur le versant O—SO du mont Petricica, associée à Phleum montanum (voir plus bas).

Phleum montanum Koch. — Sur le flanc sud-ouest du mont Petricica, en société de: *Thalictrum foetidum*, de l'espèce suivante et sur le talus des torrents, dans les parties qui se trouvent en cours de développement végétal, et sur les éboulis les plus fins. Dans le voisinage de la plante apparaissent: *Berberis vulgaris* L. (n.) [1]), *Chrysanthemum corymbosum* L. (n), *Hieracium Bauhini* (det. N), *Lotus corniculatus* L. (n.), *Rhamnus cathartica* L. (n), *Salvia pratensis* L. (n), *S.*

1) Les espèces notées (n) sont nouvelles pour ce mont.

verticillata L. (n), *Stacys recta*, *Calamagrostis arundinacea* (L.) Roth, *v. brachyclada* Torges. (n.), *Cynachhum Vincetoxicum* (L.) Pers. (n) (8. VI et 17. VII. 946).

Stipa pulcherrima Koch. — Sur le versant O–SO. du mont Petricica (Piatra N.) (12. V. 46) ainsi que dans les prairies du versant O. de la colline de Coşări, connues sur le nom de prairies de la vallée de David Comm. d'Uricani (I.) (6. VI. 48) [1]). Nous possédons seulement des indications sporadiques (16) sur la présence de la plante en Moldavie.

Carex Pairei F. Schultz.— Indiquée (40) dans le district de Jassy comme une plante nouvelle pour la Moldavie. Je l'ai cueillie dans les parties boisées du versant sud-ouest du mont Petricica, associée à: *Carpinus betulus* L., *Evonymus europaeus* L. (n), *Lithospermum purpureo-coeruleum* L. (n), *Phleum montanum*, *Poa nemoralis* L., *Populus tremula* L., *Quercus sessiliflora* Salisb., *Verbena officinalis* L.

Institut botanique de l'Université de Jassy

(Reçu le 25 Décembre 1947)

Travaux cités

1) Atanasiu I. – *Contrib. à la stratigr. et la tecton. du flysch margin. moldave.* Ann. Sc. Univ. Jassy. XXV (1939), 320-327.
2) Atanasiu S., Macovei G. et Atanasiu I. – *La zone margin. du flysch dans la partie infér. etc.* Assoc. avancem. de la Géol. des Carpates-Guide des Excurs. Bucureşti, 1927, pag. 315-352.
3) Băncilă I. – *Le Miocène de la rég de Tazlăul-Mare (distr. Neamţ).* C. R. d. Séanc. de l'Instit. de Sci. de Roumanie, III (1939) 86-93.
4) Bonnier Gast. – *Fl. comol. ill. de France, Belgique et Suise.* IV, V. Paris.
5) Boros A. – *Beitr. z. Kenntnis d. Fl. des Seklerlandes (Siebenbürgen)* „Scripta bot. Musei Transsilv." I (1942).
6) Borza Al. – *Veget. şi Flora Ardealului.* Bucureşti, 1929.
„ – *Die Veget. u. Fl. Rumäniens* Guide de la VI-e P. I. E. Cluj (1931) 1-55.
7) „ *Conspectus Fl. Romaniae region. affinum.* Cluj. (1947—48) 16-17.
8) „ et Arvat A. – *Iva xanthifolia* Nutt. etc. Bul. Gr. bot. Cluj, XV (1935) 186-187.
9) „ et Topa E. – *Desiderata ad „Fl. Rom. Exsic."* 1947 Cluj.

1) Nous avons identifié aussi l'espèce **Stipa stenophylla** Cz. (=*S. Tirsa* Stev.) dans le matériel recueilli dans ces mêmes prairies et déposé (sous le nom de S. *Joannis* Cel.) dans l'herbier de l'Institut botanique de Jassy (1943). Nous espérons mieux attirer l'attention des botanistes sur la systématique et la chorologie en Moldavie du genre **Stipa**, en ajoutant une nouvelle localité pour la distribution de cette espèce, dans notre provence, d'où elle n'est pas indiquée qu'une seule fois (17).

10) Brandza D. – *Prodromul fl. romîne.* Bucureşti, 1879-1883.
11) Buia Al. – *Cuscutele României* Bul. Fac. Agr. Cluj. VII (1938), 227-365.
12) Constantineanu, I. C. – *Urédinées de Roumanie.* Ann. Sc. Univ. Jassy X. (1920), 314-460.
13) De Candolle. – *Prodr. syst. natur. regn veget.* Parisiis IV (1830), 657.
Enculescu P. – *Studiu agrogeol. al vechei insule de antestepă dela E. de Piatra N.* Dări de seamă ale şedinţ. Inst. Ged. al Rom. VIII (1919), 242-261.
14) Gajewski W. – *Les élém. de la fl. de la Podolie polon..* Planta Polonica V, (1937), 146-211.
15) Grecescu D. – *Conspectul fl. României.* Bucureşti, 1898.
16) „ *Supliment la Consp.* Bucureşti, 1909.
17) Grinţescu, G. P. – *Contrib. la fl. României.* Publ. Soc. Natur. România Nr. 6, (1923) 111-128 et Sept ex. No. 7 şi 9 (1927) 43-126.
18) „ dans Borza A. – *Schedae ad „Fl. Rom. Exsic." No. 296 c, 639, 790, 2226, 2729,* Bul. Gr. bot. Cluj. III (1923), VII (1926) VIII (1928), XXI (1941), XXVI (1946).
19) Guşuleac M. – *Die europ. Arten d. Gatt. Anchusa.* Bul. Fac. Şt. Cernăuţi. I (1927) 73-123.
20) Hayek A, – *Prodr. fl penin. Balcanicae.* Dahlem, 2, 1931.
21) Hegi G. – *Ill. Fl. o Mitteleur.* Wien. V_2 (1926) 1243, VI_1 (1918).
22) Instit. Geol. al României – *Harta geologică a României.* Atlas fizic, foaia 2 ed, 1926 1 : 1 5000.000.
23) Macovei G. – *Aperçu géol. sur les Carpathes orient.* Assoc. avanc. Géol. Carp. Guide des Excurs. (1927), 23-141.
24) Nyáráy, E. J. – dans Borza A. : *Schedae ad „Fl. Rom. Exsic." No. 1212.* Bul. Gr. bot, Cluj. XV, (1935).
25) Panţu, Zah. C. – *Spec. de Geranium ce cresc spontan etc..* Publ. Soc. Natur. România No. 4 (1920), 51-52.
26) Papp C. – *Vegetaţia Măgurei Petricica.* Bul. Soc. Reg. Rom. Geogr. LVI (1937), 230-245.
27) Papp C. – *Contrib. la cunoaşterea veget. Stînca Ştefăneşti.* Lucr. Soc. „Dim. Cantemir". III (1941), 101-131.
28) Pax F. – *Pflanzengeopraphie o Rumänien.* Halle, 1919.
29) Petrescu C. – *Quelques pl. aquat. fl. Moldavie,* Acad. Rom. Bul. sec. Şt.. VIII (1922/23), Nr. 1/2v.
30) Pop E. – *Cercet. citol, anat. – tiziol. şi taxonom. la Anemonele...* Bul. Gr. bot. Cluj. XVII (1937), 91-149.
31) „ *Vitis vinifera Gmel. in România.* Bul. Gr. bot Cluj. XI (1931), 78-92.
32) „ *Das Torfmoor o. Borsec.* Guide de la VI-ème I. P. E. (1931), 170-177.
33) „ *Semnalări de Tinoave şi pl. de mlaştini.* Bul. Gr. bot. Cluj. XVII (1937), 169-181.
34) „ dans Borza A. : *Schedae ad „Fl. Rom. Exsic." No. 13 8.* Bul. G2 bot. Cluj XV, (1935).
35) Prodan I. – *Consp. fl. Dobrogei.* Bul. Ac. Agron. Cluj V. (1934), 175-34
36) „ *Flora pentru determinarea* etc. I. II. ed. II, Cluj, 1939.
„ *Trandafirii spontani şi cultivaţi..* etc. Bul Ac. Agr. Cluj. III (1922), 333-477.

37) Răvăruț M. – *Plantes nouv. ou rares... Mt. Ceahlău.* Ann Sc. Univ. Jassy XXII (1936), 368-378.
38) „ : *Noutăți din fl. Mt. Ceahlău.* Bul. Gr. bot. Cluj. XVI (1936), 78-85.
39) „ : *Contrib. la fl. Moldovei* Rev. „V. Adamachi" XXXI (1945), 188-189.
40) „ : *Fl. et végét. du distr. Iassy.* Ann. Sc. Univ. Iassy. XXVII, (1941). 141-388.
41) Reichenbach L. – *Ic. Fl Germ. et Helv.* XII (1850), Lipsiae.
42) Reynaud-Beuverie M. A. – *Le milieu et la vie en commun des pl.* Paris, 1936.
43) Schlechtendal u. Langethal. – *Fl. v. Deutschl.* Bd. 27, 28. Gera-Untermhaus, 1886.
44) Săvulescu Tr. – *Die Veget. v Bessarabien.* Beil. Bulet. Agric. III (1927). XXX.
„ – *Der biogeographische Raum Rumäniens.* Ann. Fac. Agron. Bucarest, I (1939 281-330.
45) Simionkai L. – *Enum. Fl. Tanssilv.* Budapest, 1886.
46) Todor I. dans Borza A.: – *Schedae ad „Fl. Rom. Exsic." No. 2446.* Bul. Gr. bot. Cluj, XXIII (1943).
47) Topa E. – *Observ. și date floristice relat. la jud. Iași.* Bul. Gr. bot. Cluj. XXV (1945) 121-127.
48) „ – *Lupta contra sp. Iva xanthiifolia Nutt...* Rev. „V. Adamachi", Jassy, XXXII (1946) 52-53.

COMPTES RENDUS DES LIVRES REÇUS

Fernand Dacos - *Electricité théorique.* Editions Desoer, Liège, 1947, 412 pages.

L'auteur, professeur à l'Institut Electrotechnique Montefiore de l'Université de Liège, présente son cours d'Electricité théorique.

La partie nouvelle de ce cours consiste dans l'utilisation du calcul tensoriel.

Une partie des leçons contenues dans ce cours ont été données à l'Association des Ingénieurs électriciens sortis de l'Institut Montefiore.

Dans le premier chapitre contenant 68 pages l'auteur rappelle les éléments d'analyse vectorielle et tensorielle, en donnant toutes les notions nécessaires pour comprendre le cours : analyse vectorielle, introduction à l'analyse tensorielle, coordonnées de Gauss, algèbre tensorielle, tenseur métrique, tenseurs associés, étude des champs dérivant d'un scalaire, propriétés des champs, potentiel vecteur, symboles de Christoffel.

Le chapitre suivant, en 59 pages, s'occupe de l'Electrostatique : étude du champ, énergie potentielle d'un système de charges électriques, couche simple et double, théorème de Coulomb, condensateurs, théorie des images, induction, polarisation, vecteur de Maxwell.

Le 3ème chapitre de 30 pages est consacré à l'électrocinétique. On étudie les lois d'Ohm et de Kirchhof, l'énergie du courant, le courant de déplacement de Maxwell, etc.

Ensuite, le magnétisme, occupe les 23 pages suivantes constituant le 4e chapitre, avec l'étude de l'induction, de la force portante d'un aimant, du hystérésis et la représentation conforme des champs.

Le 5e chapitre est consacré à l'électromagnétisme avec 49 pages. Sont exposés : le champ magnétique créé par un courant, la loi de Laplace, le potentiel vecteur, la loi de Rowland, le travail électromagnétique, l'induction électromagnétique et la loi de Lenz, l'équation de Maxwell, le théorème de Poynting, la self induction et l'induction mutuelle, l'étude moléculaire du magnétisme et la théorie de Langevin et de Weiss.

Les applications de l'électromagnétisme sont passées en revue en

19 pages dans le chapitre 6. Sont examinés : le circuit magnétique, la réluctance, la période variable du courant électrique, les machines unipolaires, la roue de Barlow et ensuite le principe des alternateurs, des dynamos et des transformateurs.

Le 7-e chapitre, en 26 pages, s'occupe de l'étude des courants alternatifs (quasi stationnaires) avec la représentation graphique et symbolique d'un circuit à courant alternatif. On expose la décharge oscillante, l'extension de la loi d'Ohm, les circuits équivalents avec les quadripôles.

Le chapitre suivant, en 50 pages, traite le calcul symbolique d'Heaveside avec des applications aux circuits électriques.

Le 9-ème chapitre consacre 58 pages aux applications de l'analyse tensorielle aux machines électriques. On étudie les combinaisons des circuits, les matrices de transformation et ensuite la machine synthétique. L'auteur donne en quatre tableaux les schémas et la représentation tensorielle d'une série entière de machines fonctionnant seules ou combinées entre elles.

Le dernier chapitre, le 10-ème, en 25 pages, se rapporte aux réseaux à courants alternatifs. Ensuite sont passées en revue les champs courants, les pertes par hystérésis et par courants de Foucault.

L'exposé est clair et quoique la manière de présenter les questions est toute différente de celle classique, on peut assez facilement suivre les différentes questions étudiées. Il est nécessaire, bien entendu, d'être un peu au courant avec les mathématiques qu'on les emploient dans l'exposé.

Ce livre est très intéressant et il répond à une nécessité, parce que les applications des tenseurs dans l'électrotechnique trouvent de plus en plus une place plus importante.

CÊSAR PARTENI ANTONI

* * *

Karl Jellinek – *Kurzes Lehrbuch des physikalischen Chemie*. I-er et II-ème fascicules. 1938/1939. Edition Kluwer. Deventer (Pays Bas).

Après la deuxième édition du grand ouvrage „Traité de Chimie physique" paru, en 5 volumes, de 1927 à 1937, l'auteur s'est proposé de faire imprimer un précis de chimie physique en 4 fascicules. Dont 2 ont déjà parus.

Dans le premier fascicule sont exposés les principes fondamentaux de la chimie physique : la théorie cinétique des gaz et d'une façon

très soignée les lois de la thermodynamique. Les substances pures, les mélanges gazeux, les solutions des non-électrolytes, ainsi que les transformations physiques et chimiques sont envisagées au point de vue cinétique et thermodynamique. Cette dernière indique quantitativement les possibilités de réalisation de tel processus théorique.

Bien souvent les transformations ont été traitées par deux méthodes : la méthode du cycle reversible et la méthode de l'énergie libre.

Le seconde fascicule est consacré à l'électrochimie, au système hétérogène et à la cinétique chimique Dans le chapitre sur l'électrochimie il faut surtout souligner les passages sur les électrolytes forts, l'activité des ions, la théorie de Debye et Hückel, ainsi que l'entropie relative des ions, grandeurs extrêmement importantes dans les calculs thermodynamiques. Au paragraphe sur les équilibres chimiques des électrolytes l'auteur n'a pas oublié les sels fondus, domaine dans lequel il est connu par ses propres travaux.

Dans le chapitre sur les systèmes hétérogènes après un exposé sommaire des systèmes à 1 ou 2 composants indépendants le lecteur est mis au courant des progrès récents des phénomènes de surface : à savoir, sur les couches monomoléculaires (Langmuir), sur les potentiels des surfaces de séparation métaux-solutions (Lange) et aussi sur la formation des germes de condensation dans les vapeurs (Volmer). Le dernier chapitre est réservé à la cinetique chimique des systèmes homogènes et hétérogènes. La partie classique y est exposée d'une façon remarquable. Ou regrette, cependant, que l'auteur a laissé de côté la théorie des réactions en chaîne, dont on tient si souvent compte dans le mécanisme des transformations chimiques.

Dans les deux livres il y a un grand nombre d'exercices numériques. L'auteur, qui a enseigné long temps s'est bien rendu compte qu'on n'a bien compris une question que si on a été jusqu'au bout d'une application numérique. Les deux livres sont d'une lecture très agréable ; on aurait préféré cependant, une notation plus simple des grandeurs physiques. Au point de vue de la bibliographie, l'auteur a fait une selection en se bornant à citer les livres et les mémoires qu'il a jugé les plus fondamentaux. Noux attendons avec impatience les deux derniers fascicules de ce précis de chimie physique.

G. COSTEANU

* * *

Robert Franklin Mehl – *Metalurgia do ferro e do aço.* Edition de l'Ecole Polytechnique de l'Université de São-Paulo, Brésil. Traduit de l'anglais en portugais par : V. Chiaverini, H. Col-

paert, J. Haenel, M. Grinberg, T. S. Santos. Une volume de 296 pages, 1945.

Le volume contient une série de leçons faites par le Prof. R. F. Mehl entre le 1-er mars et le 12 mai 1944 à l'Ecole Polytechnique de São-Paulo. Il comprend une description générale de l'industrie du fer et de l'acier, limitée forcément par le temps dédié au cours et par l'étendue de la matière.

La traduction falte en collaboration, pour que les meilleurs expressions techniques en langue portugaise puissent être trouvées, s'adresse aussi bien aux étudiants qu'aux techniciens de spécialité. Elle contribue à l'enrichissement du vocabulaire et de la littérature techniques des pays de langue portugaise.

Le volume est divisé en 4 parties avec 17 chapitres.

Dans la première partie (qui a 8 chapitres) il s'agit des méthodes concernant la fabrication de l'acier.

Le premier chapitre contient, en dehors d'une classification des méthodes employées à la fabrication de l'acier, une description quelque peu détaillée du système Siemens-Martin basique. Le deuxième chapitre comprend les opérations du four Siemens-Martin et le procès chimique respectif. Du troisième au huitième chapitre y compri, on passe en revue le procédé Siemens-Martin acide, le procédé Bessemer, le four électrique en arc, le procédé duplex, le four à nduction et le four au creuset.

La deuxième partie (chapitres IX et X) contient les méthodes de transformation de l'acier : le laminage et le forgeage.

Dans la troisième partie (chapitre XI) on trouve une analyse schématique du prix de la production.

La dernière partie (chapitres XII-XVII) s'occupe de la constitution, des propriétés, traitements thermiques et applications de l'acier. On passe rapidement sur la manière dont se comportent le fer et l'acier avec un petit pourcentage de charbon au XII-ème chapitre et sur la constitution des alliages Fe-C au XIII-ème chapitre. Dans le XIV-ème chapitre on trouve une description detaillée de la courbe TTT et de la courbe S, qui présentent une grande importance du point de vue scientifique et pratique, en facilitant la compréhension des traitements thermiques de l'acier.

Les derniers chapitres contiennent des données sur la trempe, la recuit et le revenu.

Ce qui caractérise ce volume c'est la présentation systématique et claire du matériel. De nombreux schémas suggestifs des différents

procès et opérations, donnent une très grande valeur didactique au volume.

Par la description de la pratique courante de la fabrication de l'acier du point de vue scientifique et didactique, le volume est d'une réelle utilité pour les étudiants comme pour les techniciens.

Je le recommande chaleureusement à nos étudiants.

V. ABABI.

* * *

Arthur Phillips - *Metais e ligas não ferrosos ; propriedades e empregos.* São Paulo, Brésil, 130 pages.

L'industrie métallurgique, ayant une importance considérable dans le développement de l'économie nationale, l'école Polytechnique de São Paulo a élaboré un programme spécial pour la préparation des futurs ingénieurs spécialisés en mines et métallurgie.

Le présent volume, est un résumé des leçons y tenues par le célébre professeur A. Phillips de l'Université de Yale (New Haven).

Ces leçons se rapportent à la composition, aux caractéristiques et aux principales applications des métaux et des alliages non ferreux.

Nous soulignons surtout la manière utilisée pour la description des a alliages de tous les points de vue et en lumière de nouvelles découvertes scientifiques.

Le volume se divise en 9 chapitres.

Les quatres premiers (I-IV), contiennent la description du cuivre et de ses alliages. L'auteur s'arrête spécialement sur les propriétés et es applications de diverses alliages. Les laitons et les bronzes y occupent une place importante. Le cas du plomb qui, additionné au laiton diminue la plasticité mais en même temps contribue beaucoup à grandir les possibilités d'usinage, est spécialement cité.

Pendant les dernières années, les savants on fait beaucoup de tentatives pour remplacer le plomb par *Se* et *Te*, mais leurs oeuvres sont encore en stade expérimental. Les bronzes avec le *Sn* résistent à la traction et à la corrosion, ceux avec *Al*, ont une grande ductilité et les bronzes avec *Be* ont des propriétés spéciales importantes pour la technique.

Dans le V-ème chapitre, l'auteur s'arrête sur les alliages de l'aluminium qu'il divise en trois types : les alliages pour laminage, pour forgeage et pour fondage.

Du premier type, l'auteur cite les alliages *2S*, *3S*, qui contiennent 1,2% *Mn*, et *52S* qui contient 2,5% *Mg* et 0,25% *Cr*.

Du type des alliages pour fondage il décrit les alliages d'allumi-nium avec : *Cu*, *Si* et *Mg*.

Il s'occupe aussi de l'action de fondre et des inconvénients qui dérivent de cette opération.

Les chapitres VI et VII s'occupent de *Mg* et *Zn*. L'alliage de *Mg* avec *Mn*, est utilisé pour confectionner des lettres d'imprimérie qui doivent résister à la corrosion.

Cet alliage est aussi utilisé pour confectionner des tancs à gaso-line, pour l'aviation et des pièces nécessaires aux canalisations de ga-soline *Zn*, est un métal qui se lamine avec légéreté et ses alliages sont utilisés spécialement dans la fonderie.

Dans le chapitre VIII, l'auteur décrit en détail le *Ni* et ses al-liages. Très importants sont les alliages de *Ni* avec le *Cr* Il suffit de citer l'alliage nommé „Elinvar" qui contient 36% *Ni*, 12% *Cr*. et le reste *Fe*. Cet alliage possède un module d'élasticité presque constant dans une zone donnée de la température. Cet alliage est utilisé pour la confection des cables et des appareils de syncronisation, etc.

Un autre alliage „Hypernic", est un alliage de *Fe* avec *Ni* et se caractérise par une grande perméabilité de grandes intensités du champ. Dans le dernier chapitre, l'auteur s'occupe des alliages utilisés pour confectionner des pièces avec un petit coefficient de frottement. Ces alliages possèdent un grand pourcentage de *Sn* et sont divisés en trois classes: A, B et C. Les alliages de la classe A, sont formés de *Sn*, *Cu* et *Sb*. Dans les alliages de la classe B, prédomine le plomb ; les alliages de la classe C sont nommés aussi *bronzes plastiques* et à côté de *Sn* et *Cu* ils contiennent encore du plomb et du *Zn*.

En général, on peut dire que ce livre est utile pour la science et pour la pratique. On y remarque en outre la variété des tableaux et des diagrammes qui complètent l'étude de Mr. A. Phillips, très nécessaires pour l industrie et pour la technique.

VASILE ABABI

* * *

A Collection of Papers in Memory of Sir William Rowan Hamilton. The Scripta Mathematica Studies Number two. Scripta Mathematica, Yeshiva College, New York, 1945.

Ce volume est publié à l'occasion du centenaire de la découverte des quaternions. On aurait dû célébrer cette découverte en 1943, mais alors, à cause de l'état de tension causé par la guerre, on ne l'a fait qu'en Irlande, la patrie de Hamilton.

Voici d'abord le sommaire du volume:

page
Editorial Note 7
Sir William Rowan Hamilton, by David Eugene Smith 9
The Life and Early work of Sir William Rowan Hamilton by J. L. Synge 13
Algebra's Debt to Hamilton by C. C. MacDuffee 25
An Elementary Presentation of the Theory of Quaternions by F. D. Murnaghan 37
Two Poems by Hamilton 50
Hamiltons's Work in Dynamics and its Influence on Modern Thought by H. Bateman 51
Hamilton's Contribution to Mechanics by Edwin B. Wilson 64
The Constancy of the Velocity of Light by Vladimir Karapetoff 65
The Hamilton Postage Stamp 81.

La biographie de Sir W. R. Hamilton est exposée dans les articles de D. E. Smith, de J. L. Synge et dans le communiqué du ministère irlandais des postes par lequel il annonce l'issue d'un timbre poste commémoratif.

M. J. L. Synge présente aussi une histoire des travaux de Hamilton en Mécanique et en Optique géométrique et une histoire du rôle que ces travaux ont joué dans le développement de ces sciences. L'oeuvre entière est placée dans l'époque où elle a été créée et sa forme, ses succès et ses defauts du point de vue moderne — et par suite l'oubli de certaines de ses découvertes — sont subtilement expliqués par le changement intervenu dans l'„idéal scientifique" des mathématiciens depuis un siècle.

M Synge est spécialement indiqué pour une telle explication, par le fait qu'il a étudié en détail tous les manuscrits de H. à l'occasion de la publication de son oeuvre complète. C'est ainsi qu'il a eu longuement à méditer sur les buts, les réalisations et les „limitations humaines" du grand mathématicien: „We know very little of the psychology of mathematicians, who, of all scientists, present to their colleagues in public the most austere and unrevealing mask. Behind the mask, there are quick jumps of intuition and much mental stumbling and confusion. As a rule, the smooth presentation of a finished paper shows neither the one nor the other. It is only in the intimacy of conversation that the real secrets are revealed. The extraordinary thing in the case of Hamilton is that he proclaimed (one might even say, shouted) at the beginning of each paper the motivating essence of his work — the characteristic or principal function, but those who read his work found in it everything but its central idea. Which shows the rashness of any mathematician who tries to impose an unfamiliar mental pattern on his age".

Hamilton faisait partie de l'age héroïque des mathématiciens. On cherchait alors encore des lois mathématiques simples et univer-

selles pour expliquer tous les mouvements du monde et il y avait dans ces recherches un certain mysticisme. „Mathematic in the heroic age was a religion". Le mathématicien était une sorte de prêtre, intermédiaire entre l'homme et la nature. C'est dans cet esprit que H. a cherché et trouvé la fonction caractéristique qui devait unifier les phénomènes de l'optique géométrique et ceux de la mécanique des systèmes conservatifs holonomes.

La fonction caractéristique devait satisfaire à un système de deux équations aux dérivées partielles. Jacobi a montré l'usage qu'on peut faire de la découverte de Hamilton et a observé qu'il n'est besoin que d'une seule équation aux dérivées partielles. La seconde ne fait qu'obscurcir la théorie.

Jacobi, bien que contemporain de Hamilton, appartenait moins à l'age héroïque que celui-ci. Il avait en vue plutôt l'intégration des équations et pour cela il est plus simple de ne considérer qu'une équation. Si l'on a en vue le but de H., il en est besoin d'une seconde. Comme aujourd'hui on a eu vue surtout le point de vue de Jacobi, il y a une tendance injuste de négliger un peu Hamilton.

Pareillement, en optique géométrique, l'eikonal n'est que la troisième fonction caractéristique de Hamilton, mais on a généralement oublié son premier auteur. Il en est de même de la théorie des congruences de droites qui a été pour la première fois élaborée par Hamilton.

L'oeuvre de Hamilton a été pleine de conséquences. Comme le remarque expressivement M. Synge „cet homme extraordinaire qui vécut dans le XIX-e siècle, a écrit en partie pour le XVIII-e et en partie pour le XX-e".

M. H. Batemann expose dans un article très documenté les conséquences de l'œuvre de Hamilton en dynamique. On a étudié le rôle du principe variationnel de H. dans les systèmes non holonomes et aussi dans les systèmes non conservatifs. Ce principe est considéré comme base de toute théorie unitaire des champs.

L'importance des équations canoniques et des méthodes qui en découlent pour l'intégration des équations de la dynamique est aussi analysée et ensuite leur utilité pour l'étude des transformations des problèmes dynamiques. Ces mêmes équations sont d'une aussi grande utilité en physique théorique et en mécanique céleste, comme en beaucoup d'autres problèmes. L'article contient une vaste bibliographie.

La contribution de Hamilton en algèbre est exposée par M. Mc-Duffee.

H. croyait que sa théorie des quaternions était d'une grande importance en géomérie et en physique. L'histoire a montré qu'il se trompait sur ce point. Le calcul des quaternions a été dépassé par le calcul vectoriel et par le calcul tensoriel.

Cependant, cette théorie a été pleine de conséquences en algèbre. Il arrive très souvent que l'importance d'une découverte n'est pas là où on la suppose d'abord. A son époque, vu le but de ses recherches, H. ne pouvait prévoir la portée de son œuvre.

Par sa façon de considérer l'algèbre, H. est le précurseur de l'algèbre abstraite moderne. Voilà ce qu'il écrit dans l'introduction de son mémoire de 1933:

„It requires no peculiar scepticism to doubt, or even to disbelieve, the doctrine of negatives or immaginaries, when set forth (as it has commonly been), with principles like these: that a *greater magnitude may be substracted from a less*, and that the remaider is *less than nothing;* that *two negative numbers*, or numbers denoting magnitudes each less than nothing, may be *multiplied* the one by the other, and that the product will be a *positive* number, or a number denoting a magnitude greater than nothing; and that the *square* of a number, or the product obtained by multiplying that number by itself, is therefore *always positive*, whether the number is positive or negative, yet that numbers, called immaginary, can be found or conceived or determined, and operated on by all the rules of positive and negative numbers, as if they were subject to those rules, *although they have negative squares*, and must therefore be supposed to be theme selves neither positive nor negative, nor yet null numbers, so that the magnitudes which they are supposed to denote can neither be greater than nothing, nor less than nothing, nor even equal to nothing. It must be hard to found a science on such grounds as these..."

Dans le mémoire intitulé: „Conjugate functions and on Algebra as a Science of pure time", H. définit les quantités négatives à l'aide d'une suite „de moments" illimitée dans les deux sens et ensuite, dans la deuxième partie, intitulée „Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples" il définit les nombres complexes comme des couples de nombres réels, comme on le fait d'habitude aujourd'hui.

Il a cherché ensuite à généraliser la question et cela l'a conduit dix ans plus tard à sa théorie des quaternions.

D'après un témoignage de son fils, ce problème l'a préoccupé longtemps, au point de le faire oublier toutes ses autres occupations.

On se pose naturellement le problème de savoir comment lui est venue l'idée de chercher une algèbre à quatre unités après qu'il lui devint clair qu'il n'y en a pas une à trois unités. L'auteur de l'article

croit trouver la réponse : „Euler had discovered that the product of two sums of four squares can be written as a sum of four squares. Now the corresponding theorem concerning the product of sums of two squares is equivalent to the fact that the norm of the product of two complex numbers is equal to the product of their norms. Without much doubt, Hamilton caught the hint that there might exist an algebra in four units possessing the same norm property".

„Even after he had come thus far, Hamilton had serious problems before him. A non commutative multiplication was in that day unthinkable, mainly because the „ordinary operations" were taken for granted and such fundamental ideas as the commutative law had not even been formulated. Hamilton's ability to proceed in the face of the failure of this law must be considered a mark of genius".

L'article de M. Murnaghan contient le matériel d'une conférence faite à Harvard en Avril 1944. Il donne une méthode pour définir les quaternions à l'aide du calcul des matrices. Cette méthode présente les quaternions comme une généralisation simple et naturelle des nombres complexes.

Un nombre complexe peut être considéré comme une matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. On peut le considérer aussi comme une matrice quadratique.

$$\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 E_2 + x_2 I .$$

où

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a la formule

$$O = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \cos\theta E_2 + \sin\theta I = e^{\theta I}$$

où

$$e^A = E_2 + \frac{A}{1} + \ldots$$

A étant une matrice quadratique. Si A est une matrice symétrique gauche, $e^A = O$ sera la matrice d'une rotation.

Si A est une matrice symétrique gauche du III-e ordre, on est conduit à la formule

$$O = E_3 + \sin\theta J + (1 - \cos\theta) J^2 , \quad J^3 + J = 0$$

où E_3 est la matrice unité et $A = \theta J$ est la matrice d'une rotation.

On obtient le quaternion lorsque l'on considère une matrice sy-

métrique gauche du IV-e ordre. En considérant la matrice spéciale

$$A = p\ I_1 + q\ J_1 + r\ K_1$$

où

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0\ 0 & 0\ 1 \\ 0\ 0 & -1\ 0 \\ 0\ 1 & 0\ 0 \\ -1\ 0 & 0\ 0 \end{pmatrix},\quad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0\ 1\ 0 \\ 0 & 0\ 0\ 1 \\ -1 & 0\ 0\ 0 \\ 0 & -1\ 0\ 0 \end{pmatrix},$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\ 0 \\ 1 & 0 & 0\ 0 \\ 0 & 0 & 0\ 1 \\ 0 & 0 & -1\ 0 \end{pmatrix}$$

satisfont aux relations

$$I_1^2 + E_4 = J_1^2 + E_4 = K_1^2 + E_4 = 0;$$

$$I_1 J_1 = -J_1 I_1 = K_1, \quad J_1 K_1 = -K_1 J_1 = I_1, \quad K_1 I_1 = -I_1 K_1 = J_1,$$

(E_4 = matrice unité du IV-e ordre)

on a

$$O_1 = \cos\theta\, E_4 + \sin\theta\ (\alpha I_1 + \beta J_1 + \gamma K_1) = e^{\theta A_1}$$

avec

$$\theta^2 = p^2 + q^2 + r^2, \quad p = \theta\alpha, \quad q = \theta\beta, \quad r = \theta\gamma$$

O_1 étant une matrice orthogonale. Les matrices orthogonales obtenues de cette façon (matrices spéciales de I-ère classe) forment un groupe.

De la même manière on peut considérer la matrice spéciale

$$A_2 = p\, I_2 + q\, J_2 + r K_2$$

où

$$I_2 = F I_1 F, \quad J_2 = F J_1 F, \quad K_2 = F K_1 F,$$

$$F = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0 & 0 \\ 0\ 1\ 0 & 0 \\ 0\ 0\ 1 & 0 \\ 0\ 0\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

satisfont aux relations

$$I_2^2 + E_4 = J^2_2 + E_4 = K^2_2 + E_4 = 0;\ I_2 J_2 = -J_2 I_2 = K_2,$$

$$J_2 K_2 = -K_2 J_2 = I_2, \quad K_2 I_2 = -I_2 K_2 = J_2\ .$$

On a dans ce cas

$$O_2 = \cos\theta\, E_4 + \sin\theta\ (\alpha I_2 + \beta J_2 + \gamma K_2) = e^{\theta A_2}$$

Les matrices O_2 (spéciales de II-e classe) forment aussi un groupe. Une matrice quelconque d'une rotation est le produit de deux matrices spéciales une de I-ère classe, l'autre de II-e classe.

Un quaternion quelconque $t + ix + jy + hz$ sera représenté, soit par la matrice $tE_4 + xI_1 + yJ_1 + zK_1$ soit par la matrice $tE_4 + xI_2 + yJ_2 + zK_2$.

L'auteur montre encore comment les propriétés des matrices symétriques gauches du III-e ordre s'encadrent dans celles des matrices du IV-e ordre. Enfin, il montre comment les quaternions peuvent servir à traiter d'une manière simple et expressive l'équation relativiste des ondes de Dirac.

L'article de M. Vladimir Karapetoff n'est pas dédié à une oeuvre de Hamilton.

L'auteur y donne d'abord l'interprétation des équations de Maxwell dans un espace à quatre dimensions doué de la métrique $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + (ic\,dt)^2$. Désignons les vecteurs unités sur les axes par K_1, K_2, K_3, K_4. Un bivecteur quelconque K est décomposé en deux bivecteurs C et D le premier parallèle à l'espace xyz le second parallèle à l'axe ct. Le vecteur directement normal à C dans l'espace parallèle à xyz est H. Le vecteur E est dans D et parallèle à $Oxyz$ et tel que $D = k_4 \wedge E$. Il est évident que $H \perp E$, et ces vecteurs sont interprétés comme le vecteur champs magnétique et éléctrostatique. Il est montré par des considérations géométriques élémentaires que les équations de Maxwell s'expriment

$$\square \wedge K = 0, \qquad \square . K = J = \varrho_4 k_4 + J_3$$

où $\wedge$ désigne le produit extérieur, . le produit intérier, $\square$ l'opérateur $k_1 \partial/\partial x + k_2 \partial/\partial y + k_3 \partial/\partial z - k_4 \partial/(c\partial t)$, ϱ_4 la densité de la charge électrostatique et J_3 le vecteur densité de courant (en unités électromagnétiques).

L'opérateur $\square$ est invariant pour des rotations parallèles au plan Ox, ct. Puisqu'une telle rotation représente en relativité restreinte une transformation entre deux repères en translation uniforme l'un par rapport à l'autre (le long de l'axe Ox dans l'espace à trois dimensions) il suit que les équations de Maxwell sont invariantes.

M. HAIMOVICI

* * *

Fabio Conforto – *Meccanica Razionale.* C. E. Giuseppe Principato, Milano-Messina, 1946, IV+316 pp.

Ce petit traité pourra être utile à tous ceux qui désirent s'initier aux notions et problèmes fondamentaux de la Mécanique rationnelle, c'est-à-dire aux élèves des écoles techniques et militaires, sans pouvoir y consacrer trop de temps, mais sans vouloir faire des concessions quant à la précision des définitions ou à la rigueur des démonstrations. L'exposition claire et concise, beaucoup d'exemples et un nombre d'exercices seront un aide précieux au lecteur.

Après un chapitre introductif traitant les éléments de la théorie des vecteurs et les propriétés des courbes gauches, l'auteur expose en trois chapitres succesifs les notions fondamentales de la cinématique du point, des systèmes rigides et du mouvement relatif. Une attention spéciale est donnée aux mouvements plans et à leurs propriétés géométriques.

Dans le V-e chapitre sont exposés les notions et principes fondamentaux de la mécanique : l'inertie, la force, la masse, le travail, la formule fondamentale de la mécanique, les champs de force, le principe de l'action et de la réaction, les unités de mesure des grandeurs et les équations aux dimensions. Y est exposée aussi la loi de la gravitation universelle.

Dans le chapitre suivant, consacré à la dynamique du point, est traité le mouvement d'un point soumis à une force élastique dans le vide ou dans un milieu résistant et ensuite la théorie de chute des graves dans l'air et le pendule sphérique.

Les VII-e et VIII-e chapitres sont consacrés resp. à la théorie des systémes de vecteurs appliqués et à la théorie des moments d'inertie : théorie des moments, réduction des systèmes de vecteurs, centres des masses, moments d'inertie relatifs à un axe, variation de ce moment avec l'axe, ellipsoïde d'inertie, calcul graphique du moment d'inertie d'un système plan.

Dans le IX-e chapitre est traité l'équilibre du point matériel, des solides et enfin l'équilibre d'un fil soumis à un nombre discret de forces ou à une force continue.

La dynamique des systèmes est exposée dans les deux derniers chapitres. D'abord les notions fondamentales, les équations cardinales, leur application à la dynamique des solides ensuite les équations de Lagrange.

M. H.

* * *

Gerrit Mannoury - *Les fondements psycho-linguistiques des mathématiques.* Collection Synthèse, 3. F. G. Kronder, Bussum Pays-Bas et Editions du Griffon, Neuchatel, Suisse, 1947, 64 pp.

C'est la traduction en français d'une étude parue dans la revue allemande „Erkenntniss" (T. IV, 1934) et publiée à l'occasion du quatre-vingtième anniversaire de l'auteur.

Pour le contenu du travail, nous citons de l'introduction :

„Dans ce travail, je me propose d'envisager les sciences mathématiques comme une manifestation de la vie qu'il faut étudier dans ses relations avec d'autres phénomènes vitaux..."

„Le point de vue que nous venons de définir nous impose une méthode empirique d'investigation"...

„La première partie de notre étude sera consacrée à la méthode qu'à la fin du siècle passé Lady Welby a dénommée „significs". Nous préciserons en quoi cette méthode se distingue de méthodes habituelles de la philologie. Nous attirerons spécialement l'attention sur la *valeur indicative* et la *valeur émotive* d'une communication verbale ou écrite (grossièrement dit, il s'agit de l'influence que nos *souvenirs* et nos *attentes* exercent sur les phénomènes linguistiques). Nous examinerons également comment les phénomènes linguistiques s'ordonnent dans leurs rapports avec les phénomènes psychiques de nature non linguistique. Cette analyse nous incitera à compléter la terminologie psychologique usuelle en distinguant notamment les éléments indicatifs et les éléments émotifs d'un acte de volonté. Nous pourrons alors définir de façon plus précise la méthode psycho-linguistique".

„Dans la seconde partie, nous appliquerons la méthode psycho-linguistique à l'intuition et au formalisme mathématiques et nous étudierons en particulier quelques notions essentielles des sciences mathématiques et physiques, comme la causalité, la probabilité, la vérité, la contradiction. Nous conclurons qu'il est possible, par gradations et systématisations successives, de déduire les mathématiques formalisées de systèmes d'expression plus généraux. Nous montrerons également le rôle essentiel que les associations sub-conscientes (principalement les réseaux partiels d'associations que nous nommerons sub-complexes physique et logique) jouent dans l'édification formelle de la pensée mathématique. Nos réflexions nous amèneront à serrer de plus près les concepts mathématiques et leurs signification psychologique".

„Les conceptions philosophiques que complète la présente étude ont été développées par l'auteur dans ses cours, professées à l'Université d'Amsterdam de 1903 à 1910 et de 1917 jusqu'à présent".

* * *

M. H.

D. R. Hartree, F. R. S., *Calculating Machines, Recent & Prospective Developments and their impact on Mathematical Physics*, Inaugural Lecture, Cambridge University Press, 1947, 40 pp.

Les problèmes posés par les diverses sciences à l'analyse mathématique, nécessitent parfois des calculs numériques inextricables. Même si la solution de ces problèmes est connue du point de vue théorique le résultat numérique ne peut être trouvé qu'au prix d'un travail énorme — quelque fois irréalisable — de calcul.

C'est pourquoi on utilise aujourd'hui des machines à calculer qui sont de véritables usines.

M. Hartree est un spécialiste dans cette branche d'activité. La brochure que nous présentons contient une leçon inaugurale faite à l'Université de Cambridge. L'auteur a eu l'occasion de travailler avec l'ENIAC (Electronic numerical integrator and calculator) de l'Université Pennsylvania ; il en donne une description sommaire et expose ses possibilités présentes et ses perspectives dans l'avenir.

Cette machine emploie 18.000 valves et une puissance de 150 kw. et elle effectue des suites très longues d'opérations à partir des données initiales, suivant un programme qu'on lui a fixé. On peut voir ses possibilités par l'exemple que cite l'auteur d'un système d'equations différentielles avec des conditions aux limites dont l'intégration à l'aide de la machine demande 4 min., tandis que, rien qu'à écrire tous les résultats partiels de l'opération sans compter les calculs, aurait demandé seize heures de travail d'un calculateur.

Le défaut principal de la machine est sa capacité de mémoriser trop restreinte (20 nombres, tandis qu'il en faudrait 5000 pour satisfaire à tous les besoins). D'autres machines sont en étude, qui remédieront, au moins en partie, à ce défaut.

Bien entendu, les machines, quelque perfectionnées qu'elles soient ne pourront jamais remplacer le cerveau humain. Elles n'effectuent que les opérations qu'on leur commande. Cependant leur développement aura certainement une influence sur les recherches d'analyse, en posant le problème de trouver les méthodes de résolution les plus propres pour leur travail. L'auteur cite quelques exemples, dont nous reproduisons un : Etant donné un système d'équations linéaires $\Sigma a_{ij} x_j - b_i = 0$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$ (n pratiquement grand), la méthode la plus propre pour le résoudre est de former le polynome du second degré $\Sigma (\Sigma a_i x_i - b_i)^2$ et de chercher les valeurs des variables qui le rendent minimum. (Ce minimum sera nul).

Beaucoup de problèmes intéressant les applications de la science,

hier encore insolubles le sont aujourd'hui et d'autres le seront demain grâce à ces machines qui peuvent effectuer dans une heure jusqu'à un million de multiplications de grands nombres.

M. H.

* * *

Albert Pérard, *Les mesures physiques*, Collection „Que sais-je" ? Presse Universitaire de France, Paris, 1947.

Il est à peine besoin de souligner l'importance des mesures précises pour le développement de la science et de la technique modernes Tout le magnifique échafaudage de la physique et de l'astronomie est fondé sur la précision des mesures qui on fourni matériel pour l'élaboration des théories et ont permis de vérifier celles-ci.

L'opuscule de M. Albert Pérard pourra être utile à tous ceux qui - sans pouvoir y consacrer beaucoup de temps - désirent connaître l'état actuel de la métrologie, les principes et les méthodes en usage aujourd'hui.

Dans un espace restreint et sous une forme élémentaire sont exposés dans le premier chapitre les principes et les méthodes générales et une esquisse de théorie des erreurs d'observations, dans les cinq suivants les méthodes de mesure des longueurs, des masses, du temps, des grandeurs électroniques, des températures. On y définit les plus importants, les méthodes d'éviter et de corriger les erreurs.

Un dernier chapitre donne quelques brefs renseignements sur les unités et les principes de mesure de quelques autres grandeurs : angles, surfaces, densités, vitesses, accélérations, chaleur, dureté etc.

Enfin une annexe contient quelques tableaux d'équivalence des principales unités.

M. H.

* * *

Edmond R. Kiely, *Surveying Instruments, their History and Classroom Use*. 19th Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Bureau of Publications, Teachers College Columbia University, New York 1947.

C'est une histoire vivante du progrès des méthodes et des instruments d'arpentage depuis l'antiquité jusqu'aux temps modernes exposée pour servir aux enseignants des écoles moyennes qui doivent donner à leurs élèves une vue sur les applications pratiques des éléments de géométrie qu'on leur enseigne.

Les commencements en Egypte, Chine, Babylonie ; les développe-

ments en Grèce et à Rome ; la contribution de l'Europe médiévale de l'Islam et de l'Inde ; les progrès en Europe pendant la renaissance, tels sont les sujets des quatre premiers chapitres. Les descriptions des instruments sont parfaitement claires et attrayantes. Un grand nombre de clichés, beaucoup d'entre eux reproduisant des desseins de livres anciens contribuent à l'attrait et à la clarté du livre.

Le V-e chapitre contient une discussion sur l'enseignement pratique de la géométrie dans les écoles qui pourrait se servir des instruments simples decrits dans les premiers chapitres. Cet enseignement serait en même temps facile et attrayant pour les élèves des classes élémentaires, tandis que la géométrie exposée d'une façon logique et abstraite d'après le modèle d'Euclide est trop difficile et même leur paraît parfois vide de sens.

Le dernier chapitre expose un grand nombre de problèmes simples d'arpentage qui peuvent être traités pratiquement avec les élèves n'ayant que des connaissances très élémentaires de géométrie pratique, à l'aide de quelques instruments de fabrication très simple.

M. HAIMOVICI

* * *

A. Devresse — *Projection stéréographique. Trigonométrie sphérique. Détermination du triangle des éléments et du triangle dérivé de G. Cesàro.* — Maison d'édition A. de Boeck. Bruxelles. (1947). 22 pag.

Cette brochure, destinée à l'usage de l'enseignement moyen et des candidats à l'Université, l'Ecole Militaire et l'Ecole Polytechnique, présente, dans le domaine de la trigonométrie sphérique, l'étude de la transformation par projection stéréographique des figures tracées sur la sphère.

L'auteur a partagé l'exposition en trois parties. Dans la première sont clarifiées méthodiquement les propriétés de la projection stéréographique relatives à l'inversion, aux angles et aux distances. La seconde partie expose les deux théorèmes fondamentaux qui permettent d'établir stéréographiquement la correspondance entre un triangle sphérique (sur la sphère trigonométrique) et deux triangles rectilignes, semblables à ceux de Cesàro, appellés trangle des éléments et triangle dérivé. Enfin, la dernière partie est réservée à l'application de ces théorèmes à l'établissement de quelques formules de la trigonométrie sphérique, à partir de la trigonométrie plane.

Par la manière claire et méthodique, par les interprétations géométriques et par les exercices suggestifs choisis comme applications l'ouvrage est utile et présente beaucoup d'intérêt.

* * * **FLORICA CÂMPAN**

Max Landolt – *Grandeur, mesure et unité* Traduit de l'allemand par Emile Thomas. Bruxelles, Office International de Librairie et Editions Dunod, Paris. (1947). 91 pag.

Pour maîtriser le monde physique il faut pouvoir reconnaître quand deux phénomènes sont identiques et le seul moyen trouvé, moyen qui n'est peut-être lui-même qu'une convention, est de mesurer les différentes grandeurs qui entrent en jeu et de constater l'égalité des mesures des mêmes grandeurs dans les deux phénomènes.

Mais cet accouplement de la grandeur et du nombre, couramment pratiqué par tout le monde, engendre des êtres quelque peu bizarres que d'aucuns, mal intentionnés, pourraient même trouver tératologiques. Naturellement les expérimentateurs et même la plupart des théoriciens ne tiennent d'habitude aucun compte de cette bizarrerie et le succès justifie leur attitude. Il n'en reste pas moins vrai qu'il faut scruter de plus près l'opération de la mesure des grandeurs et c'est précisément la tâche de l'analyse dimensionnelle, science qui jouit actuellement d'un regain de faveur, du moins si l'on juge d'après le nombre des livres et des travaux originaux qui lui sont consacrés [1]).

Le livre de M. Landolt s'insère dans le mouvement de „revival" de l'analyse dimensionnelle, mais son caractère distinctif, sur lequel on ne saurait trop insister, est l'introduction dans ce domaine des idées et des méthodes de l'algèbre abstraite. Cette victoire des méthodes inspirées par le point de vue axiomatique est d'autant plus significative que l'éminent auteur provient du camp des techniciens (il est, en effet, professeur au Technicum du Canton de Zürich et en 1946 il a présidé le comité 25 du CES-Comité Electrotechnique Suisse qui a établi un projet de Règles pour les symboles littéraux, projet publié dans le *„Bulletin de l'Association Suisse des Electriciens"*, vol. 38, 1947, p. 519).

L'ouvrage est divisé en deux parties. La première, pendant laquelle l'auteur se souvient d'être un praticien, s'appelle „Méthode du Calcul des Grandeurs" est, en somme, un recueil de quelques problèmes

1) Citons les notes dans les C. R. (vol. 225) de MM. Riabouchinski et Esnault-Pelterie et les livres suivants: Porter, *The method of dimensions*, 3-ème éd. 1946; Bridgman, *Dimensional analysis*, 2.ème éd. 1946; Esnault-Pelterie, *L'analyse dimensionnelle*, ouvrage qui était annoncé à l'automne de 1947 comme étant sous presse à Lausanne.

L'opinion paraît avoir été différente il y a une quinzaine d'années quand par ex., un collaborateur du *„Jahrbuch"*, rendant compte de l'édition allemande du livre de Bridgman, écrivait: *„Die an sich trockene Materie wird durch die geistreichen Bemerkungen des Verfassers gewürzt"*.

simples se rapportant au calcul des grandeurs par rapport aux unités choisies. La seconde partie, intitulée „Fondement du Calcul des Grandeurs", est le vrai sujet du livre. L'auteur commence par résumer brièvement les opinions professées par certains de ses prédécesseurs en ce qui concerne l'interprétation à donner aux symboles littéraux qui représentent les mesures des grandeurs affectées de dimensions; pour une partie d'entre eux ces symboles représentent de purs nombres, tandis que pour l'autre partie un tel symbole représente réellement la grandeur par l'équation:

$$\text{grandeur} = \text{valeur numérique} \times \text{unité}.$$

Les partisans du premier point de vue objectent à cela que les (mesures des) grandeurs s'additionnent et se multiplient entre elles et que seuls les nombres purs peuvent être soumis à ces opérations.

Se ralliant au second point de vue, M. Landolt se propose de le justifier en recourant à certaines notions empruntées à l'algèbre. Il commence par délimiter le sujet en définissant ce qu'il entend par grandeurs de même espèce (ce sont celles qui peuvent être mesurées à l'aide des mêmes unités de mesure, c'est-à-dire celles qu'on appelle, dans le langage courant, grandeurs aux mêmes dimensions) et ce qu'il entend par l'égalité de deux grandeurs. Il passe ensuite à la définition de la composition intensive de deux grandeurs coexistantes et de même espèce qui donne comme résultat une grandeur de même espèce qui produit un effet identique à celui que produisent simultanément les deux grandeurs données. Le sens physique de la composition intensive montre sans peine que ces compositions forment un groupe abélien. De même les compositions entre deux grandeurs d'espèces différentes (compositions qualitatives) engendrent un groupe abélien. Par voie purement algébrique l'auteur tire quelques conséquences de ces fait, entre autres l'existence des éléments neutres des deux groupes et le fait que les puissances intensives de l'élément neutre intensif forment un groupe isomorphe au groupe additif des nombres réels et il se trouve que le groupe des compositions qualitatives est isomorphe au groupe multiplicatif des nombres réels, c'est-à-dire que le corps des compositions et le corps des nombres réels sont isomorphes et ce fait lui permet d'énoncer son résultat principal:

Une grandeur est le produit de sa mesure par son unité.

L'intense effort d'abstraction de l'auteur ne va pas sans quelques flottements de la pensée, ce qui est bien naturel quand on fait oeuvre de pionnier.

La voie suivie par M. Landolt est certainement la seule pos-

sible pour appuyer l'analyse dimensionnelle sur des bases inébranlables, mais il est clair qu'il faudra recourir à un plus grand nombre de notions pour élargir suffisamment les fondements de cette science et nous nous permettons de suggérer ici l'emploi de la notion de groupe à opérateurs.

Tout ce qui précède montre le grand intérêt de l'ouvrage de M. Landolt qui sera certainement suivi sur la route qu'il a si solidement jalonnée.

Terminons par une pensée de remerciement pour le traducteur et les éditeurs pour la bonne ponsée qu'il ont eue de mettre l'oeuvre de l'auteur à la portée du public scientifique de langue française.

AL. C. CLIMESCU

* * *

A. Ferrier – *Les nombres premiers.* Librairie Vuibert, Paris. (1947), 110 pag.

L'auteur se propose le but de mettre sous les yeux du lecteur quelques-uns des résultats obtenus depuis l'antiquité dans l'étude des nombres premiers. Les démonstrations ne sont que rarement esquissées, ce qui n'est pas étonnant étant donné qu'elles sont ou très simples, ou bien extrêmement compliquées. D'ailleurs même les démonstrations simples sont dans bien des cas assez subtiles, témoin les démonstrations de l'infinité des nombres premiers, aussi bien la très ancienne démonstration d'Euclide que celle, toute récente de M. Emile Borel (Cf Borel, *Les paradoxes de l'infini*, Paris 1946, Note 1).

L'ouvrage est émaillé de citations et de références bibliographiques qui en augmentent l'intérêt et s'achève par une table donnant les nombres premiers jusqu'à 100.000 et les nombres composés n'ayant pas de diviseur inférieur à 17, avec pour chacun d'eux, son plus petit diviseur.

En résumé un ouvrage „plaisant et délectable", que la Librairie Vuibert a bien fait d'éditer et qui peut rendre de réels services aux amateurs d'arithmétique.

On voudra bien nous permettre de faire remarquer que l'auteur aurait pu être moins timide sur un certain point. Il affirme ce qui suit (p. 15) :

„Les nombres premiers étant infinis, se pose la question de trouver... une formule qui les donne tous... En tout cas une telle expression ne serait pas simple".

Or, aujourd'hui la question est tranchée par la négative, d'après les opinions les plus qualifiées ; il suffit de citer Hardy et Wright

(*An introduction to the theory of numbers*, Oxford, 1938) qui s'expriment de la façon suivante:

„*The answer to this question* (c'est-à-dire celle de la recherche d'une expression simple donnant tous les nombres premiers) *is simply that, though natural enough, it is quite unreasonable*" (p. 6) et, plus loin:

„*We may ask for a simple function f(n) which assumes all prime values and only prime values, which is the question which we dismissed as unreasonable*" (p. 17).

Table des Matières.-I. Généralités.-II. Propriétés élémentaires III. Infinité des nombres premiers.-IV. Formes quadratiques $ax^2+bxy+cy^2$.-V. Recherche des nombres premiers.-VI. Reconnaître si un nombre est premier.-VII. Distribution.-VIII. Les nombres de Fermat.-IX. Les nombres de Mersenne.-X Quelques propriétés.-XI. Les diviseurs.-XII. Table.

AL. C. CLIMESCU

* * *

Georges Valiron - *Cours d'Analyse Mathématique I: Théorie des fonctions.* Deuxième édition. Masson et Cie Editeurs. Paris. (1948). II + 522 pag.

Tous les lecteurs qui connaissent les ouvrages antérieurs de l'auteur, par ex. „*Lectures on the general theory of integral functions*" ou les quelques fascicules du „*Mémorial des Sciences Mathématiques*" signés par lui, savent que l'auteur possède l'art entre tous difficile de l'exposition cohérente et serrée des doctrines qu'il se propose de présenter au public. Le „*Cours d'Analyse Mathématique I*" que l'analyste consommé qu'est M. Valiron fait paraître en seconde édition illustre pleinement ces qualités et montre en outre qu'il n'a pas craint d'introduire dans un ouvrage destiné en premier lieu aux étudians, certaines questions qui sont déjà classiques sans l'être encore ou pas tout à fait au sens étymologique du mot; parmi ces questions nous citerons les nombres transcendants de Liouville (no. 10), la courbe de Hilbert qui remplit un carré (no. 16), un théorème de Serge Bernstein donnant une condition suffisante pour qu'une fonction indéfiniment dérivable sur un segment symétrique par rapport à l'origine y soit développable en série de Mac Laurin (no. 49), la transcendance de e et π (no. 50), l'indicatrice de croissance de Phragmén et Lindelöf (no. 242), le théorème de Hadamard et de la

Vallée Poussin sur la valeur asymptotique du nombre $\pi(x)$ des nombres premiers $\leq x$ (no. 248 et 249).

On nous permettra encore de signaler particulièrement les Chapitres IV et V relatifs à l'intégration ; après un exposé succint mais clair et assez complet de l'intégrale de Riemann, exposé qui comprend entre autres l'inégalité de Schwarz et le théorème de Dini relatif à l'intégrabilité d'une fonction bornée sur un segment et n'y possédant que des discontinuités de première espèce (ce théorème prépare manifestement le lecteur à comprendre le rôle des ensembles de mesure L nulle dans la théorie de l'intégrale), l'auteur donne les quelques notions sur l'intégrale de Stieltjès qui à l'avenir devront appartenir au bagage intellectuel de quiconque aborde l'étude de la mécanique, du moins si, comme il est à présumer, le mouvement pour la réforme de l'exposition de la mécanique vaincra définitivement la routine et imposera l'emploi du puissant moyen d'unification et de clarification que constitue l'intégrale de Stieltjès (Cf. M. Brelot, *Les principes mathématiques de la mécanique classique*, 1945). Il passe ensuite à l'intégrale de Lebesgue, précédée par une brève étude de la mesure des ensembles linéaires. Il donne les propriétés fondamentales et immédiatement assimilables de l'intégrale de Lebesgue, ce qui permettra même aux débutants de la manier commodément.

Signalons encore que l'auteur s'est rallié à l'innovation terminologique de M. Denjoy („segment" remplaçant „intervalle fermé des deux côtés") et qu'il emploie de manière conséquente la notation vectorielle, si utile pour la théorie des intégrales curvilignes et multiples et la notation de Bachmann et Landau pour les quantités qui restent finies quand la variable mise en évidence tend vers sa limite.

En résumé, le livre de M. Valiron est, croyons-nous, destiné à remplacer sous beaucoup de rapports pour les jeunes générations actuelles les grands traités de naguère, si riches encore comme sources de renseigments mais devenus quelque peu „*obsolete*", et une preuve à l'appui nous est fournie par le fait qu'un étranger, Walter Habicht, voulant se rapporter à la théorie des indices, qu'il aurait pourtant trouvée dans n'importe quel autre traité, cite l'ouvrage de M. Valiron (Cf. Commentarii Mathematici Helvetici, volumen 21, 1948, p. 99, note en bas de la page).

Remarquons enfin, pour terminer, l'excellence du papier et la belle présentation graphique de la Maison Masson.

Table des matières. - Ch. I-Nombres, ensembles, limites.-Ch. II-II-Séries et produits infinis.-Ch. III-Généralités sur les fonctions continues. Fonctions d'une variable.-Ch. IV-Intégrale de Riemann. Appli-

cations et extensions.-Ch. V-Notion sur l'intégrale de Lebesgue.-Ch. VI-Fonctions d'une variable définies ou représentées par des séries ou des intégrales.-Ch. VII-Séries trigonométriques et généralisations.-Ch. VIII-Reduction et calcul mécanique des intégrales.-Ch. IX-Fonctions de plusieurs variables.-Ch. X-Intégrales doubles.-Ch. II-Intégrales triples et intégrales multiples.-Ch. XII-Fonctions élémentaires d'une variable complexe.-Ch. XIII-Théorie de Cauchy. Théorèmes fondamentaux et calcul des résidus.-Ch. XIV-Théorie de Weierstrass. Prolongement analytique. Fonctions analytiques et fonctions uniformes.-Ch. XV-Notions sur la représentation conforme.-Ch. XVI-Notions sur les fonctions elliptiques.-Ch. XVII-Fonctions holomorphes définies par des intégrales. Applications.

AL. C. CLIMESCU

* * *

G. M. Fichtengol'c[1]) (Fichtenholz) - *Cours de Calcul différentiel et intégral.* Tome I (en russe), OGIZ, Moscou, 1947, 690 pages.

La littérature moderne d'Analyse mathématique s'est enrichi tout récemment, grâce à la parution aux soins des Editions d'Etat pour les publications techniques et théoriques de Moscou, d'un très bon cours de calcul différentiel et intégral destiné aux étudiants ès sciences mathématiques, redigé en trois volumes par M. G. M. Fichtengol'c, l'insigne analyste de l'Université de Leningrade.

Le point remarquable de ce volume, réalisé magistralement pour les pays de langues latines par M. M. Picone (voix ses „Lezioni di Calcolo", Catania, 1923), constitue l'exposition claire et précise de la théorie des limites des *variantes*, c'est à dire des variables indépendantes ordonnées au sens de M. Ch. Méray. Tout en soulignant la difficulté que comporte la théorie générale concernant ce sujet, l'auteur renvoie le lecteur à l'appendice du second volume consacré à l'étude générale des limites.

Chemin faisant, l'auteur ne néglije pas d'en donner des indications historiques utiles et cherche toujours d'aboutir aux définitions abstraites en partant des considérations empruntées au monde physique. Des applications nombreuses du calcul différentiel à la géometrie, aux calculs des erreurs et des approximations tant qu'au problème des extrêmales pour les fonctions de plusieurs variables, attribuent un mérite pédagogique à cet ouvrage, tandisque l'appendice (pages 666-681),

1) Selon l'ortographie adoptée par J. C. Poggendorff's biogr.-liter. Handwörterbuch, Verlag Chemie G. M. B. H., Berlin, 1937, p. 734.

traitant sur un certain problème de prolongement des fonctions aux sens de MM. H. Whitney et M. R. Hestenes, permet aux étudiants avancés de faire connaissance avec des sujets nouveaux que tendent à devenir classiques.

L'introduction consacrée aux nombres réels (pages 11-49), les sept chapitres traitant de la théorie des limites (pages 50-110), des fonctions d'une seule variable (pages 111-129); des dérivées et des différentielles (pags 220-308; de l'étude des fonctions à l'aide des dérivées (pages 309-381); des fonctions de plusieurs variables indépendantes (pages 382-500); des déterminants fonctionnels et de leur applications (pages 501-573), des applications du calcul différentiel à la géométrie (pages 574-665) et de l'appendice déjà citée, représentent les étapes essentiels de ce volume.

Vu le développement donné aux différents chapitres de celui ci, nous attendons avec l'impatience la réception des tomes II et III dont la matière se prête encore plus à une mise au point renouvelé et élargi des instruments si parfaitement adaptés pour serrer de plus près la réalité physique tels qu'est l'intégrale de Stieltjès, Denjoy..., suites de fonctions sommables, séries trigonométriques et beaucoup d'autres.

Nombre de travaux originaux concernant l'étude de diverses propriétés de différentes classes de fonctions, publiés par M. Fichtengol'c dans divers recueils contribuera à un nouveau progrès dans la rédaction des traités modernes d'Analyse mathématique consistant dans la correction des longueurs, des insuffisances et même des imprécisions pas encore enlevés dans la littérature mathématique internationale.

D. I. MANGERON

* * *

Bruno Finzi et Paolo Udeschini. *Esercizi di Meccanica Razionale*. Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini, Milan, 1948, VIII+494 pages.

L'insigne analyste, M. Bruno Finzi, adepte enthousiaste des tendances modernes concernant les programmes de mathématiques pures et appliquées dans les établissements d'enseignement supérieur et l'auteur d'un traité récent de Mécanique rationnelle [1]) accueilli très favorablement par la critique internationale, fait paraître, en collaboration avec M. P. Udeschini, aux soins de la Libreria Editrice Politecnica

1) Voir ce „Bulletin", II$_1$, 1947, 241—242.

Cesare Tamburini, Milan, un admirable recueil de problèmes de mécanique théorique.

Depuis le debut de ce siècle, parallèlement à l'utilisation des collections de problèmes de mécanique rationnelle correspondant à la vue du passé sur cette matière, la littérature mathématique universelle s'est enrichi d'un nombre de recueils de problèmes de mécanique technique et appliquée.

C'est précisément au renouvellement de la matière des collections cités d'une part et au rapprochement aux besoins de la pratique des énoncés des problèmes formulés, de leur schémas et leur méthodes de résolution d'autre part, que répond pleinement ce recueil, constituant de la sorte un puissant instrument réalisé pour serrer de plus près la réalité physique.

En utilisant ce recueil pour les travaux pratiques avec nos étudiants pendant le second sémestre de l'année académique 1947/1948, nous nous sommes convaincu de son efficacité :

1) dans l'éducation de l'intuition physique et le développement du bon sens lorsqu'on tâche de surmonter les difficultés reliées à la première phase de la solution d'un problème de mécanique, son schéma, ou bien lorsqu'on veut interpréter les résultats du calcul déjà executé ;

2) dans la traduction du schéma physique en langage mathématique ;

3) dans la consolidation des méthodes de la technique du calcul acquises pendant l'étude de l'analyse, l'algèbre et la géométrie.

Le livre est divisé en 21 chapitres que voilà :

I. Cinématique d'un point matériel (64 exercices, pages 1-48), II. Cinématique d'un corp rigide (33 exerc., 49-77 pag.) ; III. Cinématique des systèmes (16 exerc., 78-89 pag.) ; IV. Cinématique des milieux continus (21 exerc., 90-110 pag.) ; V. Cinématique de la mécanique relativiste (22 exerc., 111-128 pag) ; VI. Statique d'un point (13 exerc., (129-136 pag.) ; VII. Statique d'un corp rigide (74 exerc., 137-178 pag.) ; VIII. Statique des systèmes articulés, des fils et des verges (54 exerc , 179-219 pag.) ; IX. Statique des corps continus déformables (23 exerc., 220-237 pag.) ; X. Principe des travaux virtuels (40 exerc., 238-261 pag.) ; XI. Lois fondamentales et force motrice (27 exerc., 262-275 pag.) ; XII. Quantités mécaniques (39 exerc., 276-292 pag.) ; XIII. Relations mécaniques (30 exerc., 293-310 pag.) ; XIV. Mécanique relativiste (25 exerc., 311-328 pag.) ; XV. Dimensions et unités de mesures (45 exerc., 329-344 pag.) ; XVI. Dynamique d'un point matériel (63 exerc., 345-384 pag.) ; XVII. Dynamique d'un corp rigide (44 exerc., 385-412 pag.) ; XVIII. Dynamique des systèmes (52

exerc., 413-454 pag.) ; XIX. Dynamique des milieux continues déformables (16 exerc, 455-467 pag.); XX. Chocs et percussions (18 exerc., 468-481 pag.) ; XXI. Problèmes recapitulatifs (45 exerc., 482-494 pag.).

Je souligne particulièrement l'extrême utilité du chapitre XV-e.

A la chaîne des qualités scientifiques de ce recueil on doit ajouter ses incontestables mérites pédagogiques et sa présentation typographique impéccable.

L'étudiant appliqué, auquel nous recommandons très très chaleureusement ce volume, parcourant cet ouvrage reçoit bien l'impression que la mécanique rationnelle est un champ énorme et prodigieusement fertile et important pour l'activité scientifique des hommes de sciences et des techniciens et touche une préparation bien solide et pareille à l'espérance que durant sa carrière d'ingénieur „les fruits surpasseront la promesse des fleurs".

D. I. MANGERON

* * *

W. R. Bloor - *Biochemistry of the fatty acids, and their compounds, the lipids*. American Chemical Society Monograph Series. The University of Rochester, New-York, 1 vol., 15,2x22,6, 388 pag. 1943, Reinhold Publishing Corporation, New York, Prix 7 doll.

Les protéines, les hydrates de carbone et les graisses constituent la plus grande partie des substances organiques alimentaires. Tandis que les protéines et les hydrates de carbone ont été assez largement étudiés par les biochimistes, les graisses et surtout les acides gras n'ont pas été suffisamment étudiés, quoiqu'ils jouent un rôle considérable dans la constitution de la matière vivante.

M. Bloor, professeur de Biochimie et Pharmacologie à l'Université de Rochester, qui a fait de belles recherches personnelles dans le domaine des acides gras nous présente une intéressante monographie, qui est une bonne mise au point des connaissances actuelles sur les acides gras et leur composés, les lipides.

Pour les graisses on a proposé jusqu'à présent beaucoup de noms, qui n'ont pas été universellement adoptés. Le plus récent nom est celui de „lipide", recomandé par le Congrès international de Chimie pure et appliquée. Les lipides constituent une groupe de substances naturelles, formées par les acides gras supérieurs avec d'autres substances. Ont peut les classer comme il suit: *Lipides simples*, esters des acides gras avec les divers alcools (les graisses, esters de la glycérine et les cires, esters des autres alcools que la glycérine); *Composés lipidiques*, contenant à côté des acides et d'alcools d'autres groupes en

liaison avec l'alcool (phospholipides, glycolipides, sulfolipides, amino-lipides) et *dérivés lipidiques*, substances dérivant des précédents et ayant en général les propriétés des lipides.

Dans le premier chapitre l'auteur étudie la chimie des graisses et leur dérivés, en passant en revue les propriétés et les différentes méthodes analytiques. Le second chapitre est consacré aux phénomènes de digestion et d'absorption des graisses. Une attention spéciale est donnée aux lipases, enzymes du suc gastrique de pancréas, de l'intestin, aux lipases végétales et aux esterases.

Dans le chapitre III, l'auteur étudie les lipides du sang, un tissu liquide contenant des cellules ou corpuscules suspendus dans le serum, le rôle des lipides dans les phénomènes de nutrition et les maladies causées par l'accumulation ou l'absence des lipides.

Le chapitre suivant est consacré aux lipides dans les tissus (graisse neutre, phosphatides et cholestérol). L'auteur y envisage successivement les maladies causées par le dépôt des lipides (maladie de Schüller-Christian, maladies de Gaucher et de Niemann-Pick, artériosclérose et athéromatoses, cystes, tumeurs), la nature et la formation des lipides dans les tissus, le rôle essentiel des phosphatides et des stérols parmi les constituants cellulaires, les lipides des microorganismes.

Enfin le chapitre V traite le métabolisme des lipides et le dernier chapitre les lipides des sécrétions et des excrétions.

On trouve dans ce livre beaucoup d'autres choses intéressantes, qui sont clairement indiquées dans les divers chapitres mais que l'on ne peut malheureusement citer dans ce bref compte rendu.

Une abondante bibliographie à la fin de chaque chapitre complète l'ouvrage et permet de remonter aux mémoires originaux, et une table alphabétique des matières font de ce livre un instrument particulièrement commode à manier.

C. V. GHEORGHIU

LIVRES REÇUS PAR LA RÊDACTION *)

dont les comptes rendus seront publiés dans les volumes à paraître de notre „Bulletin", dans les cahiers annexes, dans les prochains numéros de la „Revue Scientifique" (Revista Ştiinţifică „V. Adamachi"– Jassy) où bien dans d'autres revues scientifiques roumaines.

*) La rédaction de ce „Bulletin" renouvelle son invitation très chaleureuse adressée aux organismes scientifiques, universitaires, académiques et polytechniques tant qu'aux éditeurs, librairies et hommes de sciences ou techniciens spécialisés du monde entier de vouloir bien nous faire parvenir leurs publications. Ces publications seront réservées pour les comptes rendus dans une des revues scientifiques de notre pays et destinées pour combler les lacunes de l'Institut Mathématique et de la Bibliothèque centrale de l'Ecole Polytechnique (Polytechnic Institute, Technical University) de Jassy, détruits pendant cette terrible et cruelle guerre qui a assombri le monde pendant ces dernières années. Que tous les envoyeurs veuillent bien trouver ici l'expression de notre profonde gratitude!

1. N. I. Akhyeser – *Leçons sur la théorie de l'approximation* (en russe), OGIZ, Moscou, 1947, 323 pag.
2. Radu Bădescu et Cornelia Naneş – *Recueil de problèmes techniques proposés aux examens de Math. gén. et de Mécanique* (en roumain). Fac. d'Agronomie, Ec. Polyt. de Bucarest, 1946, 224 pag.
3. F. Brachet, J. Dumarqué et H. Pochard – *Algèbre*, Librairie Delagrave, Paris, 1948, 222 pag.
4. D-tru Brănişteanu – *Cours de pharmacologie* (en roumain), vol. I, II, III. Ed. U. N. S. R. Centre Universitaire de Jassy, 1948, 710 pag.
5. M. Brélot – *Les principes mathématiques de la mécanique classique*. Editions B. Arthaud, Grenoble, 1945, 62 pag.
6. L. Bruwier – *Leçons sur le Calcul Symbolique*. 2-è éd. Fac. Polyt. de Mons. Cercle d'éditions des étudiants, Mons, 1948, 50 pag.
7. C. V. L. Charlier – *Elements of Mathematical Statistics*. J. A. Greenwood, Cambridge, Mass., 1947, 115 pag.

8. Marg. Cordier - *Structure du noyau précédée d'une introduction à la Mécanique ondulatoire.* Leçons faites à l'Ecole Polytechnique de Bucarest, 1947, 130 pag.
9. E. Darmois - *Thermodynamique et rayonnement.* Soc. d'Edition d'enseignement supérieure, Paris, 1947, 258 pag.
10. W. A. Newnan Dorland & E. C. L. Miller - *The American Illustrated Medical Dictionary*, 20-th. Edition, W. B. Saunders Company Edit., Philadelphia, 1944, 1669 pag. 885 illustr. & 240 portraits.
11. Mario Dornig - *Trattato generale delle macchine termiche ed idrauliche.* Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini, Milano, Tome II, 1947, 304 pag.
12. Ulysse Filippi - *Connaissance du monde physique.* Préface de Louis de Broglie. Ed. Albin Michel, Paris, 1947, 342 pag.
13. A. G. Gaydon - *Dissociation Energies and Spectra of diatomic molecules.* Chapman & Hall Ltd., London, 1947, XI + 239 pag.
14. M. Hachtroudi - *Les espaces normaux.* Univ. de Téhéran, Fac. Sciences, Imprimérie, Téhéran, 1945, 80 pag.
15. Douglas W. Hill - *The Impact and Value of Science.* Ed. II, Hutchinson's Scientific & Technical Publications, London, 1946, 103 pag.
16. Jean Jalbert - *Destin du Monde.* J. & R. Sennac Edit., Paris, 1947, 350 pag.
17. Cassius J. Keyser - *Mathematics as a culture clue* (vol. I) *and other essays.* Scripta Mathematica, Yeshiva College, N. Y. C, 1947, 277 pag.
18. Karl Kutter - *Erde-Ihr Werdegang, nach neuesten Forschungsergebnissen.* M. Kutter-Keiser- Verlag, Basel, 1947, 195 pag.
19. Telemaco van Langendonck - *Vigas hiperestáticas.* Escola Polit. Universidad de São Paulo, Brésil, 1947, 114 pag.
20. J. F. Lincoln - *Hauts salaires, bas prix de revient* (Lincoln's Inventive System). Traduit par I. Renaud. Ed. Dunod, Paris, 1948, VI + 168 pag.
21. Livio Livi - *Elementi di Statistica.* 8-e éd., CEDAM, Casa Editrice Antonio Milani, Padova, 1948, 395 pag.
22. E. Morice, J. Reboul et M. Tisserand - *Méthodes Statistiques en médecine et en biologie*, Préface du Prof. A. Baudoin. Masson et C-ie Editeurs, Paris, 1947, 182 pag. + 53 fig.

23. G. Ribaud et Ed. Bruni – *Transmission de la chaleur.* Tome I, *Le Rayonnement thermique.* Ed. J. & R. Sennac, Paris, 1948, 160 pag.
24. Gilbert de B. Robinson – *The Foundations of Geometry.* 2-d Ed., Math. Expositions Nr. 1, The University of Toronto Press, Toronto, 1946, 156 pag.
25. Vincenzo Rubbo – *La Turbina a Gas.* Soc. Editrice Reviste Industrie Elettriche, Milano, 1948, 61 pag.
26. Francesco Severi – *Fondamenti di geometria Algebrica.* CEDAM, Casa Editrice Antonio Milani, Padova, 1948, 172 pag.
27. H. de Wolf Smyth – *Atomenergie und ihre Verwertung im Kriege.* Ernst Reinhardt Verlag A.G. Basel, 1947, 350 pag.
28. *The Svedberg* – Almquist & Wiksells Boktryckeri AB, Uppsala, 1944, 731 pag.
29. Sverdrup, Johnson et Fleming – *The Oceans, Their Physics, Chemistry and General Biology.* Prentice Hall. inc. Publishers, New York, 1942.
30. R. Tomaselli – *Stoppani.* „La Scuola" Editrice, Brescia, 1948, 143 pag.

Prof. Dr. D. I. MANGERON
Rédacteur du „Bulletin
de l'Ecole Polytechnique de Jassy"
Bibliothèque Centrale
et
Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique

Note de la Rédaction. La liste contenant les titres des 1200 publications périodiques reçues en échange sera publiée dans un des prochains volumes de notre „Bulletin".

Sommaire

du Tome III, fasc. 1. (Janvier à Juin 1948)

		Pages
Nicolae Negoescu (Assistant à l'Univ., Jassy)	Quelques précisions concernant le théorème de M. B. Segre sur les approximations asymétriques des nombres irrationnels par des rationnels	3
Antonio Signorini (Prof. Dr., Académie Nationale des Lincei, Rome)	Rapport sur mes travaux pendant la guerre	17
L. Fejes Tóth & (Dr., Prof. à l'Univ., Budapest) *H. Hadwiger* (Dr., Prof. à l'Univ., Berne)	Ueber Mittelwerte in einem Bereichsystem	21
Gh. Gheorghiev (Dr., Chef de Travaux à l'Univ., Jassy)	Etude des surfaces au voisinage d'une courbe	36
K. Reicheneder (Dr., Geodätisches Institut, Potsdam)	Der Indizes-Kalkul und seine Anwendung in der Algebra	48
Adolf Haimovici (Dr., Chef de Travaux à l'Univ., Jassy)	Sur une famille de surfaces en relation avec les développables d'une congruence de droites et sur les surfaces à réseau orthogonal de courbes planes	61
Mauro Picone (Prof. Dr., Académie Nationale des Lincei, Rome)	Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo. Attività svolta dal 10 Marzo 1945 al 30 Settembre 1947	78
Ion Irimescu (Assistant à l'Ec. Polyt., Jassy)	Etude des courbes définies par certaines relations entre leur éléments intrinsèques	87
A. Myller (Prof. Dr., Univ., Jassy)	Cordes orthoptiques	95
I. S. Gál (Dr., Prof. à l'Univ., Szeged)	A theorem concerning regular polygons	98
Lucien Godeaux (Prof. Dr., Académie des Sciences de Belgique)	Etude d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique	107
Lothar Heffter (Prof. Dr., Univ., Freiburg i. B.)	Differentiation und Integration bestimmter Integrale nach einem Parameter	113

Ilie Popa
(Dr., Prof. à l'Univ., Jassy) Transformations infinitésimales des surfaces conservant les aires 120

Lucretia Constantinescu M-me
(Assistant à l'Ec. Polyt., Jassy) Sur les transformations infinitésimales qui conservent les directions des normales 124

Ion Creangă
(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy) Sur la correspondance „T" entre deux surfaces réglées 131

Al. C. Climescu
(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy) Sur une matrice attachée à toute suite de nombres 141

D. I. Mangeron
(Dr., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy) Sur quelques problèmes du calcul des variations liés à la théorie d'une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur 153

Gr. C. Moisil
(Dr., Prof. à l'Univ., Bucarest) Sur une généralisation de la Fonction d'Airy 156

J. Horváth
(Dr., Prof. à l'Univ., Budapest) Note sur un problème de L. Fejer 164

César Parteni Antoni &
(Ing. Dr., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy)
Vasile Corlăteanu
(Dr. Ing., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt., Jassy) Sur la possibilité d'augmenter la puissance d'une machine à courant continu 169

Z. Horak
(Dr. Ing., Prof. à l'Univ. technique, Prague) Formule théorique des coefficients de restitution des corps imparfaitement élastiques 218

Cyp. Demars
(Dr. Ing., Prof. à l'Univ., Liége) Au sujet de la détermination des rayons des circonférences de tête des roues d'un engrenage cylindrique droit à odontoïdes en développante de circonférence 226

Domenico Gentiloni Silverj
(Dr. Ing., Institut Applic. Calcul, Rome) La integrazione della equazione in un problema elastico in tre dimensioni 254

Virgiliu G. Gheorghiu
(Dr., Prof. à l'Univ. Craiova) Un nouveau appareil pour la mesure des vitesses d'écoulement des liquides et des gaz 277

Emil Luca
(Dr. Ing., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy) La détermination des conditions où la mesure de l'intensité d'un faisceau de rayons X conduit à des résultats identiques, par les deux méthodes: ecran fluorescent-cellule photoélectrique et chambre d'ionisation 285

Haralambie Vasiliu
(Prof. Dr., Ec. Polyt. Jassy) Sur la propriété de phosphore d'émettre des rayons ultraviolets dans l'organisme animal et végétal. Les rayons vitaux 308

C. G. Bedreag
(Dr., Prof. à l'Univ., Jassy) Système harmonique des éléments 317

		Pages
Alex. Cişman & (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy) *Const. Ruscior* (Ing., Chef de Travaux à l'Ec. Polyt., Jassy)	La radioactivité des eaux minérales de Mangalia	344
Gastone Vecchi (Dr. Prof., Inst. Céramique, Faenza)	Nuovi indirizzi nel campo dell'analisi chimica dei silicati	353
Virgil Ianovici (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt. Jassy)	Les minérais sidérurgiques en Roumanie	362
Mircea Savul (Dr., Prof. à l'Univ., Jassy)	Les orientations des plans de Böhm dans les cristaux de quartz	375
Georges Mastacan (Dr., Chef de Travaux à l'Univ. de Jassy)	La région cristalline du sud-ouest de la Bucovine	398
Boris Arventi & (Dr., Maître de Conf. à l'Univ., Jassy) *Aurora Bordea (Mme)* (Assistant à l'Ec. Polyt., Jassy)	La vitesse de transformation des lactones des acides O-oxydiphénylacétiques en O-oxydiphénylacétates de sodium. L'influence du substituant CH_3	407
I. Matei & (Dr., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy) *Elena Cocea (Mlle)* (Dr., Maître de Conf. à l'Ec Polyt. Jassy)	Etude des huiles extraites des feuilles de conifères de Roumanie	416
G. Alexa & (Dr. Ing., Prof. à l'Ec. Polyt., Jassy) *Const. Strub* (Ing., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt., Jassy)	Contribution à la connaissance des matières tannantes végétales de Roumanie, I. Le Sumac	426
G. Alexa & *Const. Strub*	Contribution à la connaissance des matières tannantes végétales de Roumanie, II. Le Kermek	431
G. Alexa & *T. Săveanu* (Ing., Maître de Conf. à l'Ec. Polyt. Jassy)	Contribution à la connaissance des lessives bisulfitiques résiduaires	435
P. Babaleanu & (Dr. Ing., Maître de Conf. à l'Ec., Polyt., Jassy) *M. Celan (Mlle)* (Dr., Chef de Travaux à l'Ec. Polyt. Jassy)	Observations sur les effets de la gelée sur quelques variétés de poiriers	443
Ştefan Procopiu (Dr., Prof. à l'Univ. Jassy)	Champ magnétique d'une masse en rotation	453

		Pages
Serge Cărăuşu (Dr., Chef de Travaux à la Station Zoologique Maritime d'Agigéa)	Contribution à l'étude des amphipodes gammariens des eaux monégasques et françaises	459
Gh. Tudoranu & (Dr., Prof. à l'Univ., Jassy) *I. Foni &* (Dr., Assistant à l'Univ., Jassy) *Gh. Creţeanu* (Dr., Assistant à l'Univ., Jassy)	Action de l'uréthane et de la chaleur dans la coagulation du sang avec des systèmes vitaminiques	463
G. Strat & (Dr., Directeur de l'Hôpital Sf. Spiridon, Jassy) *G. Russu &* (Dr., Assistant à l'Univ., Jassy) *M. Casetti* (Dr., Assistant à l'Univ., Jassy)	Les intoxications par l'alcool méthylique	466
Const. Burduja (Dr., Chef de Travaux à l'Univ., Jassy)	Contribution floristique et chorologique à la Moldavie	474

COMPTES RENDUS DES LIVRES REÇUS 489

Fernand Dacos – Electricité théorique. Edition Desoer. Liège (1947). (Prof. Dr. Ing. César Parteni).

Karl Jellinek – Kurzes Lehrbuch des physikalischen Chemie, I & II-e fasc. Editions Kluwer, Deventer (1938-1939). (Prof. Dr. G. Costeanu).

Robert Franklin-Mehl – Metalurgia de ferro e de aço. Editions de l'Ecole Polytechnique de l'Université de São Paulo. (1945). (Ing. V. Ababi).

Arthur Phillips – Metais e ligas não forrosos ; proprietades e empregos. São Paulo. (1946). (Ing. V. Ababi).

W. R. Hamilton (in Memoriam) – A collection of Papers in Memory of Sir William Rowan Hamilton, The Scripta Mathematica Studies Number two. Scripta Mathematica, Yeshiva College, New-York. (1945). (Prof. Dr. M. Haimovici).

Fabio Conforto – Meccanica Razionale. C. E. Giuseppe Principato, Milan-Messina. (1946). (Prof. Dr. M. Haimovici).

Gerrit Mannoury – Les fondements psycho-linguistiques des mathématiques. Collection Syntèse, Bussum. (1947). (Prof. Dr. M. Haimovici).

D. R. Hartree – Calculating Machines. Recent & Prospective Developments and their impact on Mathematical Physics. Inaugural lecture. Cambridge University Press, London. (1947). (Prof. Dr. M. Haimovici).

Edmond R. Kiely – Surveying Instruments, their History and Classroom Use. 19-th Yearbook of the National Council of Theacher of Mathematics. Bureau of Publications. Teachers College, Columbia University. New-York. (1947). (Prof. Dr. M. Haimovici).

A. Devresse – Projection stéréographique. Trigonométrie sphérique. Détermination du triangle des éléments et du triangle dérivé de G. Cesàro. Maison d'édition A. de Boeck, Bruxelles. (1947). (Dr. Florica Câmpan).

Max Landolt – Grandeur, mesure et unité. Bruxelles, Office internationale de Librairie et Editions Dunod, Paris. (1947). (Prof. Dr. Al. C. Climescu).

A. Ferrier – Les nombres premiers. Librairie Vuibert. Paris. (1947). (Prof. Dr. Al. C. Climescu).

Georges Valiron – Cours d'Analyse Mathématique. I: Théorie des fonctions. 2-e éd. Masson & C-ie Editeurs. Paris. (1948). (Prof. Dr. Al. C. Climescu).

G. M. Fichtengol'c – Cours de Calcul différentiel et intégral (en russe). T. I. OGIZ, Moscou. (1947). (Prof Dr. D. I. Mangeron).

Bruno Finzi et Paolo Udeschini – Esercizi di Meccanica Razionale. Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini. Milan. (1948). (Prof. Dr. D. I. Mangeron).

W. B. Bloor – Biochemistry of the Fatty Acids and their compounds, the Lipids. The Reinhold Publishing Corporation, The Am. Chem. Society Monograph Series. Second Printing. New-York. (1943). (Prof. Dr. C. V. Gheorghiu).

LIVRES REÇUS PAR LA RÉDACTION 516

Le travail typographique concernant ce „Bulletin" a été executé par les soins de

MM. SAMUEL SAFIR, chef de travaux,
GEORGES RĂCHIȚEANU, assistant,
ADRIEN DOGARU, assistant,
IOSIF BERVIN, mécanicien en chef.

F II 12

BULETINUL
INSTITUTULUI POLITECHNIC
DIN IAŞI

BULLETIN
DE
L'INSTITUT POLYTECHNIQUE
DE JASSY

Tome 3

(Fasc. 2. Juillet à Décembre 1948)

MŰEGYETEM

Editeur – Institut Polytechnique de Jassy –
Institutul Politechnic din Iaşi
Iaşi – Jassy
1948

J/1-1~

Le présent „Bulletin" se compose des articles originaux de Technique, Mathématiques, Physique, Chimie et Sciences naturelles, pas encore publiés in extenso dans d'autres revues scientifiques,

Le Comité de Rédaction se propose de faire publier chaque année deux volumes du „Bulletin".

Les auteurs assument toute responsabilité en ce que regarde les articles publiés.

Les manuscrits, d'un style concis et correct, doivent être rédigés dans n'importe quelle langue d'usage international courant. On compte d'insérer dorénavant à la fin des articles un résumé en roumain. L'ordre de publication des travaux présentés correspond en principe à la classification décimale internationale.

Chaque auteur reçoit gratuitement 50 tirages à part. Le prix des clichés est à la charge des auteurs.

A la fin de chaque volume du „Bulletin" on trouve des comptes rendus des livres reçus par la Rédaction.

COMITÉ DE RÉDACTION

Prof. Dr. Ing. Gh. Alexa
Prof. Dr. Al. Cişman
Prof. Dr. D. I. Mangeron
Prof. Ing. Dr. César Parteni
Prof. Dr. Şt. Popesco

AVIS

Toutes le communications relatives à la rédaction et à l'administration du **Bulletin de l'Institut Polytechnique de Jassy** (envoi des manuscrits, abonnements, échanges, services des numéros, etc.) doivent être adressées à M. le Prof. **D. Mangeron,** Directeur du

Séminaire Mathématique de
L'Institut Polytechnique de Jassy
Jassy — Iaşi
(République Populaire Roumaine)

Prix de l'abonnement pour un an (2 volumes) à partir du 1-er Janvier 1949:

Etranger. Tarif international: 20 frs. suisses; le volume: 10 frs. suisses.
Abonamentul anual: 2 000 lei, un volum 1.000 lei.
Abonamentul pentru autorităţi: 5.000 lei.
Abonamentele se achită pînă la 1 Iunie 1949.

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE AL. A. ŢEREK, STR. DOBROGEANU GHEREA 8, - IAŞI
PRINTED IN R. P. ROMANIA

M. le Professeur **D. I. MANGERON,** Rédacteur du „Bulletin de l'Institut Polytechnique de Jassy", confirme la réception d'un nombre de manuscrits, envoyés pour l'insertion dans les volumes à paraître du „Bulletin", des professeurs suivants, étrangers à notre Institut :

M. *H. Beauvois*, Le Dorat, H. V.; M. *Marcel Berger*, Paris ; M. *Ioan G. Botez*, J. [1]) ; M. *Carra de Vaux*, Paris ; M. *F. Cantâr*, J. ; M-lle *M. Celan*, J. ; M. *C. de Champaux*, S. Pantaléon, S. & L. ; M. *N. Ciorănescu*, Bucarest ; M. *Luigi Conte*, Torino ; M. *Jacques Coulomb*, Paris ; M. *G. Cseke*, Cluj ; M. *R. Deaux*, Mons ; MM. *H. H. Dowling* et *S. J. Jasper*, Lexington, Ky ; M. *Gaetano Fichera*, Rome ; M. *M Germănescu*, Timişoara ; M. *A. Gloden*, Luxembourg ; M. *Béla Gyires*, Debrecen ; M. *Jean Hély*, Paris ; M. *Bruno Hodoreanu*, J. ; M. *G. Kutter*, Zürich ; M. *Victor Lalan*, Paris ; M. *Alfred Moessner*, Cunzenhausen ; M. *V Nadolschi*, J. ; M. *Gh. Năstase*, J. ; M. *B. d'Orgeval*, Grenoble ; M. *Gh. Pick*, Cluj ; M. *L. Poli*, Lyon ; M. *St. Popescu*, J. ; MM. *C. Sandu-Ville* et *I. Rădulescu*, J. ; M *Letterio Toscano*, Messina ; M *Har. Vasiliu*, J. ; M. *G. Viguier*, Maisons Alfort, Seine ; ...

La Direction du „Bulletin" s'excuse très vivement pour le retard concernant ces insertions.

LISTE DES COLLABORATEURS

des six premiers volumes (Tome I, fasc. 1-2, 1946; Tome II, fasc. 1-2, 1947 ; Tome III, fasc. 1-2, 1948) du „Bulletin de l'Institut Polytechnique de Jassy" :

M. *V. Ababii*, J. ; M. *G. d'Albon*, J. ; M. *Gh. Alexa*, J. ; M. *V. S. Ananthachar*, Mysore-India ; M. *B. Arventi*, J. ; M. *Herman T. R. Aude*, Hamilton, N. Y. ; M. *P. Babalean*, J. ; M. *C. G. Bedreag*, Ploeşti ; M. *C. P. Bogdan*, J. ; M. *Const. Borş*, Piatra-Neamţ ; M. *G. D. Borş*, Bucarest ; M-me *Aurora Bordea*, J. ; M. *Mihai P. Botez*, J. ; M. *M. St. Botez*, Bucarest ; M. *N. V. Botan*, J. ; M. *N. Botnariuc*, Bucarest ; M. *D. Brănişteanu*, J. ; M. *L. Bruwier*, Mons ; M. *C. Burduja*, J. ; M. *C. Budeanu*, J. , M. *E. Boldur*, Timişoara ; M. *N. Calinicenco*, J. ; M. *C. Calistru*, J. ; M-lle *Cleo. Catrinici*, Bucarest ; M-me *Florica Câmpan*, J ; M *Théodor Câmpan*, J. ; M-lle *M Celan*, J. ; M. *Gh. Ciobanu*, J. ; M. *I. N. Ciochină*, J. ; M. *Alex. Cişman*, J. ; M. *M. Casetti*, J ; M. *Serge Căraşu*, Agigea ; M *Al. C. Climescu*, J. ; M. *Walter Ciusa*, Bologna ; M. *V. Corlăteanu*, J. ; M. *G. Costeanu*, J. ; M-me *Lucrèce Constantinescu*, J. ; M *Aurel Cernătescu*, J. ; M. *Ion L Creangă*, J. ; M-lle *El Cocea*, J ; M. *R. Deaux*, Mons ; M. *M. Dima*, J ; M-me *El. Diaconescu*, J. ; M. *Cyp. Demars*, Liége ; M. *Etienne Fenyő*, Szeged ; M. *Gaetano Fichera*, Rome ; M. *E. Gaiginschi*, J. ; M. *I. S. Gál*, Szeged ; M. *Gh. Gheorghiev*, J. ; M. *C. V. Gheorghiu* J ; M. *Virgil Gheorghiu*, Craiova ; M. *I. S. Gheorghiu*, Bucarest ; M. *Lucien Godeaux*, Liége ; M *Victor Gomoiu*, Bucarest ; M-me *Viorica Gomoiu*, Bucarest ; M. *H. Hadwiger*, Berne ; M. *Adolf Haimovici*, J. ; M *Mendel Haimovici*, J. ; M. *V. Hanganu*, J. ; M. *G. Hasan*, J. ; M. *Lothar Hefter*, Freiburg i. Br. ; M. *J. Horváth*, Budapest ; M. *Zdének Horak*, Prague ; † *M. Konteschweller*, J. ; M. *Virgil Ianovici*, Bucarest ; M. *Gh. Iliescu*, J. ; M. *N. I. Ioanid*, Bucarest ; M. *N. Iosipescu*, J. ; M. *Ion Irimescu*, J. ; M. *S. J. Jasper*, Hamilton, Ky ; M. *Victor Lalan*, Paris ; M. *E. Luca*, J. ; M. *D. I. Mangeron*, J. ; M. *G. Mastacan*, J. ; M. *I. Matei*, J. ; M. *O. Mayer*, J. ; M. *F. Marcus*, Boto-

1. J. signifie Jassy.

şani; M. *Val. Moga*, Bucarest; M. *Gr. C. Moisil*, Bucarest; M. *Oct. Munteanu*, J.; M. *C. Motăş*, Bucarest; M. *Al. Myller*, J.; M. *Giorgio Nebbia*, Bari; Mlle *O. Necrasov*, J.; M. *N. Negoescu*, J.; M. *Miron Nicolescu*, Bucarest; M. *S. Oprişor* J.; M. *César Parteni Antoni*, J.; M. *Mauro Picone*, Rome; M. *V. Petrescu*, J.; M. *Ilie I. Popa*, J.; M. *St. Popescu*, J.; M. *N. Popinceanu*, J.; M. *Andrei Popovici*, Bucarest; M. *A. S. Potlog*, Timişoara; M. *St. Petrescu*, Cluj; M. *St. Procopiu*, J.; M. *F. D. Rădulescu*, Bucarest; M. *Fritz Reutter*, Karlsruhe; M. *K. Reicheneder*, Potsdam; Mme *Stefania Ruscior*, J.; M. *G. Russu*, J.; M. *C. Sandu-Ville*, J.; M. *Lucius N. Săveanu*, J.; M. *Th. Săveanu*, J.; M. *Mircea Saoul*, J.; M. *Antonio Signorini*, Rome; M. *Christofor Simionescu*, J.; M. *E. Gh. Scodigor*, Bucarest; M. *Domenico Gentiloni Silverj*, Rome; Mme *Léonie Stoicescu-Crivetz*, J.; M. *G. Strat*, J.; M. *C. Strub*, J.; M. *J. Tanasachi*, Bucarest; M. *N. Tănăsescu*, C. Lung Mold.; M. *Fejes Tóth*, Budapest; M. *Em. Topa*, Cluj; M. *G. Tudoranu*, J.; M. *Gh. Vasiliu*, J.; M. *M. Vasiliu*, J.; M. *Har. Vasiliu*, J.; M *Radu Vasiliu*, J.; M. *Gastone Vecchi* Faenza; M. *T. Vescan*, Cluj; M. *Aurel Wintner*, Baltimore, Md.; M. *N. Zamfirescu*, J.

Sommaire

du Tome III, fasc. 2 (Juillet à Décembre 1948)
du „Bulletin de l'Institut Polytechnique de Jassy"

		Pages
Al. C. Climescu (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy)	Notes D'Analyse II. L'interversion des dérivées partielles mixtes du second ordre	526
L. Brunier (Dr., Prof. Fac. Polyt. de Mons)	Sur l'intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires, à coefficients constants	532
Andrei Popovici (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. Bucarest)	La Physique d'Action. Une nouvelle physique unitaire	543
Cyp. Demars (Dr., Prof. à l'Univ. Liége)	Note sur le calcul du frettage des tuyaux en beton	683
N. Iosipescu (Ing., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)	Principes modernes employés à la construction des appareils de voie	698
Walter Ciusa & Dr., Prof à l'Univ. Bologna)		
Giorgio Nebbia (Dr., Prof. à l'Univ. Bari)	A new method for the identification of biological methyl donors	704
M. Dima & (Dr. Ing., Prof. à l'Inst. Polyt., Jassy)		
El. Diaconescu (Mme) (Assistant à l'Inst. Polyt. Jassy)	Sur la préparation des solutions injectables de sucre interverti	714
C. V. Gheorghiu & (Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy)		
C. Budeanu (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. de Jassy)	La condensation des isothiocyanates avec les oxymes. L'inversion optique d'une menthonoxime gauche sous l'action de l'isothiocyanate de benzoyle	721

. . . . . .

Le Sommaire complet se trouve à l'intérieur du volume.

1963
897/19
624

BULLETIN
DE L'INSTITUT POLYTECHNIQUE DE JASSY

Tome 3

Fasc. 1 (Janvier à Juin 1948)
et
Fasc. 2 (Juillet à Décembre 1948)

Editeur — INSTITUTUL POLITECHNIC din Iaşi —
— L'Institut Polytechnique de Jassy —
Iaşi — Jassy
1948

Copyright by Institutul Politechnic din Iaşi.
Nr. Agrementului Comisiei Aliate de Control din România 763 din 30.5.1946
Nr. Aprobării apariţiei Buletinului 663 din 1.6.1946
Nr. Reînoirii aprobării apariţiei Bulet. din 29.6.1948

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE ALEX. A. ŢEREK, STR. DOBROGEANU GHEREA, 9 - IAŞI
PRINTED IN R. P. ROMANIA

F
1812

INDEX DU TOME III
DU
BULLETIN DE L'INSTITUT POLYTECHNIQUE DE JASSY
- 1948 -

I. Index des Auteurs.

		Pages
V. Ababii (Ing., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	491
»	»	493
Georges Alexa & (Dr. Ing., Prof. Inst. Polyt. Jassy)		
Cristofor Simionescu (Dr. Ing. Maître de Conf. Inst. Polyt. Jassy)	Considérations sur l'huile de pépins de raisins	819
Georges Alexa &		
Const. Strub (Ing., Maître de Conf. à l'Inst. Polyt. Jassy)	Contribution à la connaissance des matières tannantes végétales de Roumanie I Le Sumac	426
»	» II Le Kermek	431
Georges Alexa &		
T. Săveanu (Ing., Prof. à l'Inst. Polyt., Jassy)	Contribution à la connaissance des lessives bisulfitiques résiduaires	435
V. S. Ananthachar (Dr., Prof. à l'Univ. de Mysore, India)	A sufficient condition for the existence of a derivative	775
Boris Arventi & (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. Jassy)		
Aurora Bodrea (Mme) (Assistant à l'Inst. Polyt. Jassy)	La vitesse de transformation des lactones des acides O-oxydiphénylacétiques en O-oxydiphénylacétates de sodium. L'influence du substituant CH_3	407
P. Babalean & (Dr. Ing., Maître de Conf. à l'Inst. Agrotechnique, Jassy)		
M. Celan (Mlle) (Dr., Prof. à l'Univ. Jassy)	Observations sur les effets de la gelée sur quelques variétés de poiriers	443
C. G. Bedreag (Dr., Prof. hon. à l'Univ. Jassy)	Système harmonique des éléments	317
C. P. Bogdan (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. Jassy)	Sur les surfaces lieu de coniques II	796

		Pages
Aurora Bordea (M-me)	(Voir : Boris Arventi)	407
Ioan G. Botez (Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	839
N. Botnariuc (Dr., Maître de Conf. Univ. Bucarest)	(Voir : C. Motăş)	747
D. Brănişteanu (Dr., Prof. à l'Inst. de Médecine, Jassy)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	852
L. Bruwier (Dr., Prof. Fac. Polyt. de Mons)	Sur l'intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires, à coefficients constants	532
C. Budeanu (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. Jassy)	(Voir : C. V. Gheorghiu)	721
C. Burduja (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. Jassy)	Contribution floristique et chorologique à la Moldavie	474
Florica Câmpan (M-me) (Dr., Maître de Conf. à l'Inst. de Topométrie, Jassy)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	505
M. Celan (M-lle)	(Voir : P. Babalean)	443
I. N. Ciochină (Dr. Ing., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	867
Alex. Cişman & (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)		
Const. Ruscior (Ing., Maître de Conf. à l'Inst. de Topométrie, Jassy)	La radioactivité des eaux minérales de Mangalia	344
M. Casetti (Dr., Assistant à l'Inst. de Méd. Jassy)	(Voir : G. Strat)	466
Serge Căraşu (Dr., Maître de Conf. à l'Inst. de Pisciculture, Constanţa)	Contribution à l'étude des amphipodes gammariens des eaux monégasques et françaises	459
Al. C. Climescu (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy)	Sur une matrice attachée à toute suite de nombres	141
"	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	506
"	" "	508
"	" "	509
"	Notes d'Analyse II. L'interversion des dérivées partielles mixtes du second ordre	526
"	Notes d'Analyse IV. Sur un développement analogue à la série de Lambert	790
"	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	840
"	" "	841
"	" "	842

		Pages
Al. C. Climescu (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	844
"	" "	847
Walter Ciusa & (Dr., Prof. à l'Univ. Bologna)		
Giorgio Nebbia (Dr., Prof. à l'Univ. Bari)	A new method for the identification of biological methyl donors	704
V. Corlăteanu (Dr. Ing., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)	(Voir : C. Parteni Antoni)	169
G. Costeanu (Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	490
"	" "	869
Lucreția Constantinescu (M•me) (Assistant à l'Inst. Polyt. Jassy)	Transformations infinitésimales qui conservent les directions des normales	124
Aurel Cernătescu (Ing., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	829
"	" "	838
Ion L. Creangă (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy)	Sur la correspondance „T" entre deux surfaces réglées	131
"	Sur une correspondance par plans tangents orthogonaux entre deux surfaces réglées	802
El. Cocea (M•lle) (Dr., Maître de Conf. à l'Inst. Polyt., Jassy)	(Voir : I. Matei)	416
Gh. Crețeanu (Dr., Maître de Conf. à l'Inst. Méd., Jassy)	(Voir : Gh. Tudoranu)	463
M. Dima & (Dr. Ing., Prof. à l'Inst. Polyt., Jassy)		
El. Diaconescu (M•me)	Sur la préparation des solutions injectables de sucre interverti	714
Cyp. Demars (Dr., Prof. à l'Univ. Liége)	Au sujet de la détermination des rayons des circonférences de tête des rous d'un engrenage cylindrique droit à odontoïdes en développante de circonférence	226
"	Note sur le calcul du frettage des tuyaux en beton	683
El. Diaconescu (M•me) (Assistant à l'Inst. Polyt. Jassy)	(Voir : M. Dima)	714
Ettenne Fenyő (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt., Budapest)	Sur une classe d'équations intégrales et intégro-différentielles	677

		Pages
I. Foni (Dr., Maître de Conf. à l'Inst. Méd. Jassy)	(Voir : Gh. Tudoranu)	463
E. Gaiginschi (Ing., Prof. à l'Inst. Polyt., Jassy)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	874
I. S. Gál (Dr., Prof. à l'Univ. Szeged)	A theorem concerning regular polygons	98
Gh. Gheorghiev (Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy)	Etude des surfaces au voisinage d'une courbe	36
C. V. Gheorghiu & (Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy)		
C. Budeanu	La condensation des isothiocyanates avec les oxymes. L'inversion optique d'une menthonoxime gauche sous l'action de l'isothiocyanate de benzoyle	721
C. V. Gheorghiu	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	514
»	» »	826
»	» »	828
Virgiliu G. Gheorghiu (Dr., Prof. à l'Inst. Agrotechnique, Craiova)	Un nouveau appareil pour la mesure des vitesses d'écoulement des liquides et des gaz	277
Lucien Godeaux (Dr., Prof. à l'Univ., Liége)	Etude d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique	107
»	Sur certains points unis isolés des involutions cycliques d'ordre 17 appartenant à une surface algébrique	782
Victor Gomoiu & (Dr., Prof. à l'Univ. de Bucarest)		
Viorica Gomoiu (Dr., Chef de Travaux à l'Univ., Bucarest)	L'histoire naturelle dans l'oeuvre „Danubius" de Marsil	740
H. Hadwiger & (Dr., Prof. à l'Univ. Berne)		
L. Fejes Tóth	Ueber Mittelwerte in einem Bereichsystem	21
Adolf Haimovici (Dr., Prof. à l'Univ., Jassy)	Sur une famille de surfaces en relation avec les développables d'une congruence de droites et sur les surfaces à réseau orthogonal de courbes planes	
»	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	855
Mendel Haimovici (Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	494
»	» »	501
»	» »	502
»	» »	503
»	» »	504
»	» »	504
»	» »	849

		Pages
G. Hasan (Assistant à l'Univ., Jassy)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	845
Lothar Heffter (Dr., Prof. Univ. Freiburg i. Br.)	Differentiation und Integration bestimmter Integrale nach einem Parameter	113
J. Horváth (Dr., Prof. à l'Univ. Budapest)	Note sur un problème de Féjer	164
Zdének Horak (Dr. Ing., Prof. à l'Univ. technique, Prague)	Formule théorique des coefficients de restitution des corps imparfaitement élastiques	218
Virgil Ianovici (Dr., Prof. à l'Univ. de Bucarest)	Les minérais sidérurgiques en Roumanie	362
E. Ionescu (Ing., Assistant à l'Univ. Jassy)	(Voir : St. Procopiu)	734
N. Iosipescu (Ing, Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)	Principes modernes employés à la construction des appareils de voie	698
Ion Irimescu (Maître de Conf. à l'Inst. Polyt. Jassy)	Étude des courbes définies par certaines relations entre leur éléments intrinsèques	87
Emil Luca (Dr. Ing., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)	La détermination des conditions où la mesure de l'intensité d'un faisceau de rayon X conduit à des résultats identiques, par deux méthodes : ecran fluorescent - cellule photoélectrique et chambre d'ionisation	285
"	(Voir : St. Petrescu)	808
D. I. Mangeron (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)	Sur quelques problèmes du calcul de variations liés à la théorie d'une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur	153
"	(Voir Comptes rendus des livres reçus)	511
"	" "	512
"	Quelques procédés de calcul dans la théorie des formules de majoration des systèmes différentiels	814
"	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	824
"	" "	830
"	" "	832
"	" "	833
"	" "	834
"	" "	835
"	" "	846
"	" "	850
"	" "	854
"	" "	857
"	" "	861
"	" "	864

		Pages
D. I. Mangeron	(Voir : Comptes rendus des livres reçus	866
»	» »	867
»	» »	868
»	» »	873
Georges Mastacan (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. Jassy)	La région cristalline du sud-ouest de la Bucovine	398
I. Matei & (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy)		
El. Cocea (M.lle)	Etude des huiles extraites des feuilles de conifères de Roumanie	416
Gr. C. Moisil (Dr., Prof. à l'Univ. de Bucarest)	Sur une généralisation de la fonction d'Airy	156
C. Motaș & (Dr., Prof. à l'Univ. Bucarest)		
J. Tanasachi (M.me) &		
N. Botnariuc	Sur quelques hydracariens recueillis en Yougoslavie dans le bassin de la Bosna	747
Al. Myller (Dr., de l'Académie des Sciences R. P. R., Section de Jassy)	Cordes orthoptiques	95
Victor L. Nadolschi (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. de Jassy)	Sur une méthode simple de réglage d'un équatorial	737
Giorgio Nebbia (Dr., Prof. à l'Univ. Bari)	(Voir : Walter Ciusa)	704
O. Necrasov (M.lle)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	870
Nicolae Negoescu (Maître de Conf. a l'Univ. de Jassy)	Quelques précisions concernant le théorème de M. B. Segre sur les approximations asymétriques des nombres irrationnels par des rationnels	3
Alex. Papp (Maître de Conf. à l'Inst. Polyt. Iass)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	836
César Parteni Antoni & (Dr. Ing., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy)		
Vasile Corlățeanu	Sur la possibilité d'augmenter la puissance d'une machine à courant continu	169
César Parteni Antoni	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	489
Mauro Picone (Dr., Académicien des „Lincei", Rome)	Istituto Nazionale par le Applicazioni del Calcolo. Attività svolta dal 10 Marzo 1945 al 30 Settembre 1947	78
V. Petrescu & (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)		
Emil Luca	Sur les conditions d'améliorer la mesure de l'induction magnétique à l'aide de la spirale de bismuth	808

		Pages
Ilie Popa (Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy)	Transformations infinitésimales des surfaces conservant les aires	120
Andrei Popovici (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. Bucarest)	La Physique d'Action. Une nouvelle physique unitaire	543
Şt. Procopiu (Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy)	Champ magnétique d'une masse en rotation	453
"	(Voir: Comptes rendus des livres reçus)	858
"	" "	859
Şt. Procopiu & *E. Ionescu*	Eléments du magnétisme terrestre à Jassy en 1948	734
K. Reicheneder (Dr., Geodätisches Instit. Potsdam)	Der Indizes-Kalkül und seine Anwendung in der Algebra	48
Const. Ruscior (Ing., Maître de Conf. à l'Inst. de Topométrie, Jass.)	(Voir: Alex. Cişman)	344
G. Russu (Dr., Assistant à l'Inst. de Méd. Jassy)	(Voir: C. Strat)	466
T. Săveanu (Ing., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)	(Voir: Gh. Alexa)	435
"	Méthode pratique pour le calcul de l'eau évaporée dans la station d'évaporation de l'industrie du sucre	731
Mircea Saoul (Dr., Prof. à l'Univ., Jassy)	Les orientations des plans de Böhm dans les cristaux de quartz	375
Antonio Signorini (Dr., Académicien des „Lincei", Rome)	Rapport sur mes travaux pendant la guerre	17
Cristofor Simionescu (Dr. Ing., Maître de Conf. Inst. Polyt. Jassy)	(Voir: Georges Alexa)	819
Domenico Gentiloni Silverj (Dr. Ing., Inst. Applic. Calcul, Rome)	La integrazione della equazione in un problema elastico in tre dimensioni	254
Léonie Stoicescu Crivetz (Même) (Dr., Assistant à l'Univ. de Jassy)	(Voir: Comptes rendus des livres reçus)	862
C. Strat & (Dr., Maître de Conf. à l'Inst. Méd. Jassy) *G. Russu* & *M. Casetti*	Les intoxications par l'alcool méthylique	466
Const. Strub (Ing., Maître de Conf. à l'Inst. Polyt. Jassy)	(Voir: G. Alexa)	426
"	"	431
J. Tanasachi (Même) (Dr., Maître de Conf. Univ. Bucarest)	(Voir: C. Motăş)	747

		Pages
L. Fejes Tóth (Dr., Prof. à l'Univ. Budapest)	(Voir : H. Hadwiger)	21
G. Tudoranu & (Dr., Prof. à l'Inst. de Médecine, Jassy) *I. Foni* & *Gh. Crefeanu*	Action de l'uréthane et de la chaleur dans la coagulation du sang avec des systèmes vitaminiques	463
Gh. Vasiliu (Dr. Ing., Prof. à l'Inst. Polyt., Jassy)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	871
M. Vasiliu (Dr. Ing., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)	» »	865
Haralambie Vasiliu (Dr., Prof. hon. Inst. Agrotechn. Jassy)	Sur la propriété du phosphore d'émettre des rayons ultraviolets dans l'organisme animal et végétal. Les rayons vitaux	308
Gastone Vecchi (Dr., Prof. Inst. Céramique, Faenza)	Nuovi indirizzi nel campo dell'analisi chimica dei silicati	344

II. Index des matières

A.

Aéronautique

E. Gaiginschi	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	874

Algèbre

Al. C. Climescu (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy)	Sur une matrice attachée à toute suite de nombres	141
D. I. Mangeron (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	868
K. Reicheneder (Prof. Dr., Geod. Institut. Potsdam)	Der Indizes-Kalkul und seine Anwendung in der Algebra	48

Analyse Mathémathique

V. S. Ananthachar (Dr., Prof. à l'Univ. de Mysore, India)	A sufficient condition for the existence of a derivative	775
Al C. Climescu	Sur une matrice attachée à toute suite de nombres	141
»	Notes d'Analyse II. L'interversion des dérivées partielles mixtes du second ordre	526
»	Notes d'Analyse IV. Sur un développement analogue à la série de Lambert	790
»	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	509

		Pages
Al. C. Climescu	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	840
»	» »	842
Etienne Fenyö (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt., Budapest)	Sur une classe d'équations intégrales et intégro-différentielles	776
Lothar Heffter (Dr., Prof. Univ. Freiburg i. Br.)	Differentiation und Integration bestimmter Integrale nach einem Parameter	113
J. Horváth (Dr., Prof. à l'Univ. Budapest)	Note sur un problème de Féjer	164
D. I. Mangeron (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)	Sur quelques problèmes du calcul des variations liés à la théorie d'une classe d'équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur	153
»	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	512
»	Quelques procédés de calcul dans la théorie des formules de majoration des systèmes différentiels	814
»	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	833
Gr. C. Moisil (Dr., Prof. à l'Univ. de Bucarest)	Sur une généralisation de la fonction d'Airy	156
Antibiotiques		
D. Brănişteanu (Dr., Prof. à l'Inst. de Médecine, Jassy)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	852
Appareils de voie		
N. Iosipescu (Ing., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)	Principes modernes employés à la construction des appareils de voie	698
Astronomie Appliquée		
Victor L. Nadolschi (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. de Jassy)	Sur une méthode simple de réglage d'un équatorial	737
Axiomatique		
D. I. Mangeron	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	857
B.		
Biologie animale		
Serge Cărăuşu (Dr., Maître de Conf. à l'Inst. de Pisciculture, Constanţa)	Contribution à l'étude des amphipodes gammariens des eaux monégasques et françaises	459
C. Motaş & (Dr., Prof. à l'Univ. Bucarest)		
J. Tanasachi (M.me) & (Dr., Maître de Conf. Univ. Bucarest)		
N. Botnariuc (Dr., Maître de Conf. Univ. Bucarest)	Sur quelques hydracariens recueillis en Yougoslavie dans le bassin de la Bosna	747

Pages

Biologie générale

Ioan G. Botez (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 839

Biologie végétale

P. Babalean &
(Dr. Ing., Maître de Conf. à l'Inst. Agrotechnique, Jassy)

M. Celan (Mlle)
(Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy) Observations sur les effets de la gelée sur quelques variétés de poiriers 443

Botanique

C. Burduja
(Dr., Maître de Conf. à l'Univ. Jassy) Contribution floristique et chorologique à la Moldavie 474

Bulletin Bibliographique (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 489-515 et 824-874
(Voir : Livres reçus par la rédaction) 516-518 et 875-878

C.

Calcul des variations

D. I. Mangeron
(Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy) Sur quelques problèmes du calcul des variations 151

Calcul symbolique

Al. C. Climescu (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 840

Calcul tensoriel et appl.

Mendel Haimovici (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 849
D. I. Mangeron " 864

Cartographie

Florica Câmpan (Mme)
(Dr., Maître de Conf. à l'Inst. de Topométrie, Jassy) (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 505

Chimie anorganique

Gastone Vecchi
(Dr., Prof. Inst. Céramique, Faenza) Nuovi indirizzi nel campo dell'analisi chimica dei silicati 344

Chimie biologique

D. Brănişteanu (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 852

Walter Ciusa &
(Dr., Prof. à l'Univ. Bologna)

Giorgio Nebbia
(Dr., Prof. à l'Univ. Bari) A new method for the identification of biological methyl donors 704

M. Dima &
(Dr. Ing., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)

El. Diaconescu (Mme)
(Assistant à l'Inst. Polyt. Jassy) Sur la préparation des solutions injectables de sucre interverti 714

		Pages
C. V. Gheorghiu	(Voir: Comptes rendus des livres reçus)	514
Haralambie Vasiliu (Dr., Prof. hon. Inst. Agrotechn. Jassy)	Sur la propriété du phosphore d'émettre des rayons ultraviolets dans l'organisme animal et végétal. Les rayons vitaux	308
G. Tudoranu & (Dr., Prof. l'Inst. Méd., Jassy)		
I. Foni & (Dr., Prof. l'Inst. Méd., Jassy)		
Gh. Creţeanu (Dr., Maître de Conf. à l'Inst. Méd., Jassy)	Action de l'uréthane et de la chaleur dans la coagulation du sang avec des systèmes vitaminiques	463
C. Strat & (Dr., Maître de Conf. à l'Inst. Méd. Jassy)		
G. Russu & (Dr., Assistant à l'Inst. de Méd. Jassy)		
M. Casetti (Dr., Assistant à l'Inst. Méd. Jassy)	Les intoxications par l'alcool méthylique	466
Chimie organique		
C. V. Gheorghiu & (Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy)		
C. Budeanu (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. Jassy)	La condensation des isothiocyanates avec les oxymes. L'inversion optique d'une menthonoxime gauche sous l'action de l'isothiocyanate de benzoyle	721
C. V. Gheorghiu	(Voir: Comptes rendus des livres reçus)	415
"	" "	826
Boris Arventi & (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. Jassy)		
Aurora Bodrea (Mme) (Assistant à l'Inst. Polyt. Jassy)	La vitesse de transformation des lactones des acides O-oxydiphénylacétiques en O-oxydiphénylacétates de sodium. L'influence du substituant CH_3	407
Chimie technologique organique		
Georges Alexa & (Dr. Ing., Prof. Inst. Polyt. Jassy)		
Cristofor Simionescu (Dr. Ing., Maître de Conf. Inst. Polyt. Jassy)	Considérations sur l'huile de pépins de raisins	819
Georges Alexa &		
Const. Strub (Ing., Maître de Conf à l'Inst. Polyt. Jassy)	Contribution à la connaissance des matières tannantes végétales de Roumanie. I Le Sumac	426
Georges Alexa & *C. Strub*	" II Le Kermek	431

Pages

Georges Alexa & T. Săveanu (Ing., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy) — Contribution à la connaissance des lessives bisulfitiques résiduaires — 435

I. Matei & (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy)

El. Cocea (M.lle) (Dr., Maître de Conf. à l'Inst. Polyt., Jassy) — Etude des huiles extraites des feuilles de conifères de Roumanie — 416

Chimie Physique

C. G. Bedreag (Dr., Prof. hon. à l'Univ. Jassy) — Système harmonique des éléments — 317

I. N. Ciochină — (Voir : Comptes rendus des livres reçus) — 867

G. Costeanu — " " — 490

Comptes rendus des livres reçus — 489-515 ; 824-874

Cristallographie

Al. C. Climescu — (Voir : Comptes rendus des livres reçus) — 847

E.

Elastomécanique

Zdének Horak (Dr. Ing., Prof. à l'Univ. technique, Prague) — Formule théorique des coefficients de restitution des corps imparfaitement élastiques — 218

D. I. Mangeron — (Voir : Comptes rendus des livres reçus) — 868

Electromagnétisme

V. Petrescu & (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy)

Emil Luca (Dr. Ing., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy) — Sur les conditions d'améliorer la mesure de l'induction magnétique à l'aide de la spirale de bismuth — 808

Şt. Procopiu — (Voir : Comptes rendus des livres reçus) — 858

Domenico Gentiloni Silverj (Dr. Ing., Inst. Applic. Calcul, Rome) — La integrazione della equazione in un problema elastico in tre dimensioni — 254

Electrotechnique

Gh. Vasiliu (Dr. Ing., Prof. à l'Inst. Polyt., Jassy) — (Voir : Comptes rendus des livres reçus) — 871

Engrenages

Cyp. Demars (Dr., Prof. à l'Univ. Liége) — (Voir : Mécanique appliquée) — 226

Pages

F.

Frettage

Cyp. Demars (Voir : Mécanique appliquée) 683

G.

Géodésie

Mendel Haimovici (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 503

Géologie

G. Hasan
(Assistant à l'Univ. Jassy) (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 845

Géomagnétisme

St. Procopiu &
(Dr., Prof. à l'Univ., Jassy)

E. Ionescu
(Ing., Assistant à l'Univ. de Jassy) Eléments du magnétisme terrestre à Jassy en 1948 734

Géométrie (alg., diff.)

C. P. Bogdan
(Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy) Sur les surfaces lieu de coniques II 796

Lucretia Constantinescu (M.me)
(Assistant à l'Inst. Polyt. Jassy) Transformations infinitésimales qui conservent les directions des normales 124

Ion L. Creangă
(Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy) Sur la correspondance „T" entre deux surfaces réglées 131

" Sur une correspondance par plans tangents orthogonaux entre deux surfaces réglées 802

I. S. Gál
(Dr., Prof. à l'Univ. Szeged) A theorem concerning regular polygons 98

Gh. Gheorghiev
(Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy) Etude des surfaces au voisinage d'une courbe 36

Lucien Godeaux
(Dr., Prof. à l'Univ., Liége) Etude d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique 107

" Sur certains points unis isolés des involutions cycliques d'ordre 17 appartenant à une surface algébrique 782

Adolf Haimovici
(Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy) Sur une famille de surfaces en relation avec les développables d'une congruence de droites et sur les surfaces à réseau orthogonal de courbes planes 855

Ion Irimescu
(Maître de Conf. à l'Inst. Polyt. Jassy) Etude des courbes définies par certaines relations entre leur éléments intrinsèques 87

Al. Myller
(Dr., de l'Académie des Sciences R. P. R., Section de Jassy) Cordes orthoptiques 95

Pages

Nicolae Negoescu
(Maître de Conf. a l'Univ. de Jassy) Quelques précisions concernant le théorème de M. B. Segre sur les approximations asymétriques des nombres irrationnels par des rationnels 3

Ilie Popa
(Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy) Transformations infinitésimales des surfaces conservant les aires 120

Gisements métallifères

Virgil Ianovici
(Dr., Prof. à l'Univ. de Bucarest) Les minérais sidérurgiques en Roumanie 362

H.

Histoire des Sciences

Adolf Haimovici (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 855

Victor Gomoiu &
(Dr., Prof. à l'Univ. de Bucarest)

Viorica Gomoiu
(Dr., Chef de Travaux à l'Univ. Bucarest) L'histoire naturelle dans l'oeuvre „Danubius" de Marsil 740

Hydromécanique

D. I. Mangeron (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 830

I.

Inégalités

D. I. Mangeron
(Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy) Quelques procédés de calcul dans la théorie des formules de majoration des systèmes différentiels 814

Industrie des corps gras

I. Matei &
(Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy)

El. Cocea (Mlle)
(Dr., Maître de Conf. à l'Inst. Polyt., Jassy) Etude des huiles extraites des feuilles de conifères de Roumanie 416

Georges Alexa &

Cristofor Simionescu (Voir : Chimie technologique)

Industrie des matières colorantes

C. V. Gheorghiu (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 828

L.

Livres reçus par la rédaction (Voir : Bulletin bibliographique)

Locomotives électriques

D. I. Mangeron (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 857

Pages

M.

Machines électriques

César Parteni Antoni &
(Dr. Ing. Prof. à l'Inst Polyt. de Jassy)
Vasile Corlăteanu
(Dr. Ing., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy) Sur la possibilité d'augmenter la puissance d'une machine à courant continu 169

Magnétisme

St. Procopiu (Voir : Géomagnétisme) 859

Mathématiques appliquées

Florica Câmpan (M.me) (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 505
Mendel Haimovici (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 502
D. I. Mangeron " 832
Mauro Picone
(Dr., Académicien des „Lincei", Rome) Istituto Nazionale par le Applicazioni del Calcolo. Attività svolta dal 10 Marzo 1945 al 30 Settembre 1947 78

Mécanique

D. I. Mangeron (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 532
" " " 880

Mécanique appliquée

Cyp. Demars (Voir : Engrenages) 226
" (Voir : Frettage) 683
Virgiliu G. Gheorghiu
(Dr., Prof. à l'Inst. Agrotechnique, Craiova) Un nouveau appareil pour la mesure des vitesses d'écoulement des liquides et des gaz 277
Mendel Haimovici (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 503
D. I. Mangeron " " 832
" " " 846
" " " 867
" " " 834
Antonio Signorini
(Dr., Prof. à l'Univ. de Rome) Rapport sur mes travaux pendant la guerre 17

Mécanique du sol

Aurel Cernătescu (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 829
" " " 838

Médicine appliquée

M. Casetti &
G. Russu &
C. Strat (Voir : Chimie biologique) 466

Pages

Mesures électriques et physiques

V. Petrescu & *Emil Luca* (Voir : Elecromagnétisme)

" La détermination des conditions où la mesure de l'intensité d'un faisceau de rayon X conduit à des résultats identiques, par deux méthodes : ecran fluorescent – cellule photoélectrique et chambre d'ionisation 285

Métallurgie

V. Ababii (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 491

" " 493

Microbiologie

D. Brănişteanu (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 852

Microchimie

Léonie Stoicescu Crivetz (Mme) (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 862

N.

Nomenclature chimique

C. V. Gheorghiu (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 415

P.

Phénomènes oscillatoires

D. I. Mangeron (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 814

Philosophie des Sciences

Adolf Haimovici (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 874

Phototropie

C. V. Gheorghiu & *C. Budeanu* (Voir : Chimie organique)

Physique appliquée

Alex. Cişman & (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy)

Const. Ruscior (Ing., Maître de Conf. à l'Inst. de Topométrie, Jassy) La radioactivité des eaux minérales de Mangalia 344

D. I. Mangeron (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 830

Physique atomique

D. I. Mangeron (Voir : Comptes rendus des livres reçus) 870

Physique théorique

Andrei Popovici Dr., Maître de Conf. Univ. Bucarest) La Physique d'Action. Une nouvelle physique unitaire 543

		Pages
St. Procopiu (Dr., Prof. à l'Univ., Jassy)	Champ magnétique d'une masse en rotation	453
Principes de la Mécanique		
D. I. Mangeron	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	857
R.		
Radioactivité		
Alex. Cisman & Const. Ruscior	(Voir : Physique appliquée)	344
Radiotechnique		
Alex. Papp	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	836
Rayons X		
Emil Luca	(Voir : Mesures électriques)	285
S.		
Statistique		
D. I. Mangeron	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	846
"	" "	873
T.		
Technique	(Voir : Machines électriques, Industrie, Locomotive, ...)	
Technologie mécanique		
M. Vasiliu	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	847
Tératologie		
O. Necrasov (Mlle)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	870
Thermodynamique		
G. Costeanu	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	869
Théorie des fonctions		
Al. C. Climescu	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	844
"	" "	841
Théorie des groupes		
Al. C. Climescu	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	847
Théorie des nombres		
Al. C. Climescu (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)	(Voir : Comptes rendus des livres reçus)	508
"	Sur une matrice attachée à toute suite de nombres	141

Pages

Topologie

H. Hadwiger &
(Dr, Prof. à l'Univ. Berne)
L. Fejes Tóth
(Dr., Prof. à l'Univ. Budapest) Ueber Mittelwerte in einem Bereichsystem 21

BULETINUL
POLITECHNICII „GH. ASACHI"
DIN IAŞI

BULLETIN
DE
L'ECOLE POLYTECHNIQUE
DE JASSY

Tome 3

(Fasc. 2. Juillet à Décembre 1948)

Editeur — POLITECHNICA „Gh. Asachi" din Iaşi —
— L'École Polytechnique de Jassy —
Iaşi — Jassy
1948

Copyright by Polytechnic Institute of Jassy

Nr. Agrementului Comisiei Aliate de Control din România 763 din 30. 5. 1946.

Nr. Aprobării apariţiei Buletinului 663 din 1. 6. 1946.

Nr. Reînoirii aprobării apariţiei Buletinului din 29. 6. 1948.

INSTITUTUL DE ARTE GRAFICE ALEX. A. ŢEREK, STR. DOBROGEANU GHEREA 9 – IAŞI
PRINTED IN R. P. ROUMANIA

Buletinul Politechnicii „Gh. Asachi" din Iaşi
Bulletin de l'École Polytechnique de Jassy
Tome III. Fasc. 2. (Juillet à Décembre 1948)

NOTES D'ANALYSE

II.

L'INTERVERSION DES DÉRIVÉES PARTIELLES MIXTES DU SECOND ORDRE

par

AL. C. CLIMESCU

1. Nous avons consulté un certain nombre de traités d'analyse, mais nous n'avons trouvé nulle part l'explicitation des conditions nécessaires et suffisantes assurant la légitimité de l'interversion des dérivées partielles mixtes en un point donné, ce qui tient probablement au peu d'intérêt de ces conditions, dont voici l'énoncé pour deux variables et pour l'origine des axes (les modifications à apporter pour un plus grand nombre de variables ou pour un autre point étant évidentes) :

Pour que l'égalité

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

ait lieu au point $(0,0)$, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :*

1°. $f'_x(0,y)$ et $f'_y(x,0)$ *existent dans un voisinage de* $(0,0)$;

2°. *Les deux limites*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'_x(0,h) - f'_x(0,0)}{h} \qquad \lim_{k \to 0} \frac{f'_y(k,0) - f'_y(0,0)}{k}$$

existent et soient égales entre elles.

D'habitude on ne donne que des systèmes de conditions suffisantes, dont voici quelques exemples :

1. *Il suffit que* $f''_{xy}(0,0)$, ou $f''_{yx}(0,0)$, *existe dans un voisinage de l'origine et qu'elle y soit continue par rapport aux deux variables* (th. de Schwarz, Cf. 3, Bd. II, p. 125).

2. *Il suffit que* f''_{xy} et f''_{yx} *existent au point donné et qu'elles y soient obtenues uniformément* (th. de Ostrowski, Cf. 4).

Rappelons que M. Ostrowski dit qu'une dérivée partielle f'_{x_1} est obtenue uniformément au point $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ si

$$\lim_{x_1 \to a_1} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, x_2, \ldots, x_n)}{x_1 - a_1}$$

existe pour $|x_1 - a_1| \to 0$, $|x_i - a_i| \leq |x_1 - a_1|$, $(i = 2, 3, \ldots, n)$ et qu'il a démontré (loc. cit.) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit différentiable au sens de Stolz en un point donné est que les dérivées partielles au point soient finies et obtenues uniformément.

Le théorème suivant (Young) en est une conséquence:

2'. *Il suffit que* f'_x et f'_y *soient différentiables au point donné.*

3. *Si* $f(x,y)$, $p(x,y) = f'_x$, $q(x,y) = f'_y$, *existent et sont finies dans un rectangle* R *et si* $g(x,y) = p'_y$ *existe, est bornée et continue par rapport à chaque variable prise séparément, alors* q'_x *existe et on a*

$$g(x,y) = p'_y = q'_x$$

pour tous les points de R. (Cf. 2, p. 650).

Les démonstrations des conditions 1, 2, 2', se font par application répétée du théorème des accroissements finis, tandis que le théorème 3 est démontré par des considérations plus délicates de calcul intégral.

2. Commençons par transformer la condition nécessaire et suffisante et supposons que $f'_x(0, y)$, $f'_y(x,0)$ existent dans un voisinage de l'origine.

I. *Si* $f''_{xy}(0,0)$ *existe et si*

$$\lim_{a \to 0} \frac{f'_x(0,a) - f'_y(a,0) - f'_x(0,0) + f'_y(0,0)}{a} = 0$$

alors $f''_{yx}(0,0)$ *existe et est égale à* $f''_{xy}(0,0)$.

Posons $f''_{xy}(0,0) = u$ et

$$\frac{f'_x(0,a) - f'_x(0,0)}{a} = g(a), \quad \frac{f'_y(a,0) - f'_y(0,0)}{a} = h(a).$$

On a

$|g(a) - h(a)| < \varepsilon$ ou $g(a) - \varepsilon < h(a) < g(a) + \varepsilon$ pour $|a| < \eta$

et

$|g(a) - u| < \varepsilon$ ou $u - \varepsilon < g(a) < u + \varepsilon$ pour $|a| < \varkappa$

d'où

$$u - 2\varepsilon < h(a) < u + 2\varepsilon \quad \text{pour } |a| < \min(\eta, \varkappa)$$

ou

$$|h(u) - u| < 2\varepsilon \quad \text{donc} \quad \lim_{a \to 0} h(a) = f''_{yx}(0,0) = u .$$

II. *Si* $f''_{xy}(0,0)$ et $f''_{yx}(0,0)$ *existent et si*

$$\lim_{a \to 0} \frac{f'_x(0,a) - f'_x(0,-a) - f'_y(a,0) + f'_y(-a,0)}{a} = 0$$

alors les deux dérivées mixtes sont égales.

On a

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{a \to 0} \frac{f'_x(0,a) - f'_x(0,0)}{a} = \lim_{a \to 0} \frac{f'_x(0,-a) - f'_x(0,0)}{-a}$$

donc

$$2 f''_{xy}(0,0) = \lim_{a \to 0} \frac{f'_x(0,a) - f'_x(0,-a)}{a}$$

et de même

$$2 f''_{yx}(0,0) = \lim_{a \to 0} \frac{f'_y(a,0) - f'_y(-a,0)}{a}$$

ce qui, vu l'hypothèse, entraîne

$$f''_{xy}(0,0) = f''_{xy}(0,0) .$$

Soit maintenant $f(x,y)$ continue dans un voisinage de $(0,0)$. On sait alors que $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$, si elles existent, sont des fonctions mesurables (Cf. 3, Bd. III, p. 116) et $f'_x(0,y)$, $f'_y(x,0)$ sont de même mesurables (ibid. p. 91).

Avec ces explications préliminaires nous pouvons énoncer le théorème suivant.

III. *Supposons que les conditions suivantes sont remplies :*

1°. $f(x,y)$ *est continue et* $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ *existent dans un voisinage de l'origine ;*

2°. $f''_{xy}(0,0)$, $f''_{yx}(0,0)$ *existent et sont finies ;*

Alors la condition nécessaire et suffisante pour l'égalité des deux dérivées secondes mixtes s'exprime par l'égalité suivante :

$$\lim \frac{1}{a} \int_{C_n} f'_x(0,y)\, dx + f'_y(x,0)\, dy = 0$$

où C_n *sont des courbes fermées suffisamment régulières* (par ex. $x(t)$, $y(t)$ étant leurs coordonnées, $x'(t)$, $y'(t)$, sont finies et continues à l'exception d'un nombre fini de discontinuités de première espèce) *qui*

entourent l'origine et qui tendent à la limite vers ce point, a_n étant l'aire enclose par C_n .

Remarque. L'intégrale curviligne est naturellement à interpréter comme une intégrale de Lebesgue.

Démonstration. Dans un voisinage de $(0,0)$ $f'_x(0,y)$, $f'_y(x,0)$ existent, sont mesurables et bornées (cette dernière propriété à cause de l'existence des dérivées mixtes finies) par conséquent, en tenant compte des hypothèses auxquelles satisfont les courbes C_n, les intégrales

$$\int_{C_n} f'_x(0,y)\,dx, \qquad \int_{C_n} f'_y(x,0)\,dy$$

existent; on ajoute l'intégrale nulle

$$-\int_{C_n} f'_x(0,0)\,dx + f'_y(0,0)\,dy$$

et on remarque que l'égalité:

$$\lim_{y \to 0} \frac{f_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = \alpha$$

implique

$$f'_x(0,y) - f'_x(0,0) < \alpha y \pm \varepsilon y \quad \text{(selon que } y \text{ est } > 0 \text{ ou } < 0\text{)}$$

ce qui donne

$$\int_{C_n} [f'_x(0,y) - f'_x(0,0)]\,dx = \alpha \int_{C_n} y\,dx + \varepsilon K \int_{C_n} y\,dx = \alpha\, a_n - \varepsilon K a_n$$

avec K borné. De même

$$\int_{C_n} [f'_y(x,0) - f'_y(0,0)]\,dy = \beta\, a_n + \varepsilon\, a_n L$$

avec L borné, donc

$$\lim \frac{1}{a_n} \int_{C_n} f'_x(0,y)\,dx + f'(x,0)\,dy = \beta - \alpha$$

et cette égalité démontre le théorème.

On démontre de la même manière le th. suivant, qui constitue une sorte de réciproque d'un certain résultat dû à Artin (Cf. 1, th. II et III).

IV. *Si* $P(0,y)$, $Q(x,0)$ *sont bornées et mesurables dans un voisinage de* $(0,0)$, *si* $P'_y(0,0)$, $Q_x(0,0)$ *existent et sont finies et si*

$$\lim \frac{1}{a_n} \int_{C_n} P(0,y)\, dx + Q(x,0)\, dy = \alpha$$

alors

$P'_y(0,0) = Q'_x(0,0)$ *si* $\alpha = 0$ *et réciproquement.*

Remarque. On peut encore affaiblir les hypothèses du théorème IV et énoncer le théorème suivant :

V. *Supposons que* $f'_x(0,y)$, $f'_y(x,0)$ *existent dans un voisinage de l'origine et que* $f''_{xy}, f''_{yx}(0,0)$, *existent et sont finies. La condition nécessaire et suffisante pour leur égalité s'exprime alors par l'égalité suivante :*

$$\lim \frac{1}{a_n} \overline{\int_{C_n}} f'_x(0,y)\, dx + f'_y(x,0)\, dy = 0$$

l'intégrale supérieure étant prise au sens de Riemann.

En effet, $f'_x(0,y)$, $f'_y(x,0)$ étant bornées dans un certain voisinage de l'origine, les intégrales supérieures existent en vertu d'un théorème connu (Cf. 5, p. 54-55) et sont représentables comme des intégrales pe Lebesgue et la démonstration s'achève, à peu de chose près comme celle du théorème IV.

Appliquons le th. IV à l'exemple suivant, considéré par Osrowski:

$$f(xy) = xy \frac{|x|^h - |y|^h}{|x|^h + |y|^h}, \quad \left[h = (x^2+y^2)^{-1}\right], \text{ si } x^2+y^2 \neq 0$$

et

$$f(0,0) = 0 .$$

On a

$$f'_x(0,y) = -y, \quad f'_y(x,0) = x$$

$$\int_{C_n} f'_x(0,y)\, dx + f'_y(x,0)\, dy = \int_{C_n} -y\, dx + x\, dy = 2a_n$$

donc

$$\lim \frac{1}{a_n} \int_{C_n} f'_x(0,y)\, dx + f'_y(x,0)\, dy = 2.$$

Les dérivées secondes mixtes, si elles existent, seront inégales. En fait on a

$$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = -1,$$

$$f''_{yx}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = 1.$$

Séminaire Mathématique
de l'Ecole Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 15 Juin 1948).

Travaux cités.

1. Artin, E. – *On the independence of line integrals on the path.* Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A. vol. 27, 1941, p. 489.
2. Carathéodory, Constantin – *Vorlesungen über reelle Funktionen* Leipzig und Berlin, 1918.
3. Haupt-Aumann – *Differential-und Integralrechnung.* 3 Bände. Berlin 1938.
4. Ostrowski, A. – *Note sur l'interversion des dérivations et les différentielles totales.* Commentarii Mathematici Helvetici, vol. 15, 1942, p. 222.
5. Vallée-Poussin, Ch. de la – *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire.* Paris, 1916 (1-ère édition).

SUR L'INTÉGRATION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES, À COEFFICIENTS CONSTANTS

par

L. BRUWIER

1. L'intégrale générale du système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_r}{dt} + \sum_{s=1}^{n} a_{rs} \cdot x_s = 0 \\ (r = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

est une fonction linéaire de n nombres arbitrairement choisis, les valeurs initiales x_r^0 $(r = 1, 2, \ldots, n)$ prises par les fonctions inconnues x_r au point $t = 0$.

MŰEGYETEM TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET

Le calcul symbolique ramène la recherche d'une pareille solution à la résolution du système d'équations algébriques, linéaires en les nouvelles inconnues $\mathcal{X}_r$,

$$(2)\qquad \begin{cases} p\,\mathcal{X}_r + \sum_{s=1}^{n} a_{rs}\,\mathcal{X}_s = p\,x_r^0 \\ (r = 1, 2, \ldots, n)\,. \end{cases}$$

La lettre p désigne un paramètre indéterminé, assez grand en valeur absolue ; les inconnues $\mathcal{X}_r$ sont des fonctions rationnelles de ce paramètre que l'on associe d'une façon convenable aux fonctions $x_r(t)$ définies par les équations différentielles (1) et les valeurs initiales x_r^0.

La manière de définir la correspondance entre les fonctions $x_r(t)$ et $\mathcal{X}_r(p)$ varie avec les auteurs Elles est choisie de façon à permettre à l'aide de règles simples, le retour de la fonction transformée $\mathcal{X}$ à la fonction originale x. L'étude de pareilles correspondances – et d'autres

correspondances plus générales [1]) – fait l'objet du calcul symbolique.

Notre intention n'est pas d'exposer les principes de ce calcul, mais de montrer, sans y faire appel et par une voie élémentaire, comment l'intégration du système différentiel (1) se ramène à la résolution des équations algébriques (2). Le cas des systèmes linéaires non homogènes et celui des systèmes plus généraux contenant les dérivées successives des fonctions inconnues seront brièvement envisagés. Nous rappellerons pour terminer que la transformation de Laplace effectuée dans le plan de la variable complexe permet aussi d'obtenir directement, par l'intermédiaire d'un système d'équations algébriques, celle des solutions du système (1), astreinte à vérifier les conditions initiales données.

2. La remarque essentielle dont il sera fait usage pour passer de (1) à (2) est celle-ci: *si les séries entières, convergentes dans un cercle de rayon différent de zéro,*

$$U=\sum_{\nu=0}^{\infty} l_\nu . t^\nu \ , \quad V=\sum_{\nu=0}^{\infty} m_\nu . t^\nu \ , \quad W=\sum_{\nu=0}^{\infty} n_\nu . t^\nu , \ldots \qquad (I)$$

constituent une solution de l'équation algébrique

$$U+t\,(AU+BV+CW+\ldots)=x_0 \qquad (II)$$

les séries associées

$$x=\sum_{\nu=0}^{\infty} l_\nu \frac{t^\nu}{\nu!}, \quad y=\sum_{\nu=0}^{\infty} m_\nu \frac{t^\nu}{\nu!}, \quad z=\sum_{\nu=0}^{\infty} n_\nu \frac{t^\nu}{\nu!}, \ldots \qquad (III)$$

vérifient l'équation différentielle,

$$\frac{dx}{dt}+Ax+By+Cz+\ldots=0 \ ; \qquad (IV)$$

de plus la fonction x se réduit à x_0 pour $t=0$.

Les lettres l, m, n, . . . , A, B, C, . . . désignent des constantes réelles ou complexes. Nous conviendrons de dire que les fonctions de la variable t, x et U, y et V, . . . qui sont les sommes des séries associées, sont des fonctions associées.

Démonstration. Il résulte de l'hypothèse que l'égalité

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} l_\nu t^\nu+\sum_{\nu=0}^{\infty}(Al_\nu+Bm_\nu+Cn_\nu+\ldots)\,t^{\nu+1}=x_0 \ ,$$

1) Voir, par exemple, *Formulaire pour le Calcul Symbolique* par M M. N.W. Mc. Lachlan et Pierre Humbert (Mémorial des Sciences Mathématiques, Fascicule C ; 1941).

obtenue en remplaçant dans l'équation (II) les inconnues $U, V, W, \ldots$, en nombre fini, par les séries (I), est une identité par rapport à la variable t ; par suite, eu égard à une propriété des séries entières,

$$\left.\begin{aligned} l_0 &= x_0 \\ l_{\nu+1} + Al_\nu + Bm_\nu + Cn_\nu + \ldots &= 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right\} \qquad (V)$$

D'autre part les séries (III) sont convergentes, pour toute valeur de t, parce que chacune des séries (I) a un rayon de convergence différent de zéro.

Les sommes $x, y, z, \ldots$ de ces séries vérifient l'équation

$$x + A\int_0^t x\,du + B\int_0^t y\,du + C\int_0^t z\,du + \ldots = x_0. \qquad (VI)$$

En effet, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait identiquement,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} l_\nu \frac{t^\nu}{\nu\,!} + \sum_{\nu=0}^{\infty} (A\,l_\nu + B\,m_\nu + C\,n_\nu + \ldots)\frac{t^{\nu+1}}{(\nu+1)\,!} = x_0\,,$$

identité visiblement satisfaite à cause des formules (V).

La fonction x se réduit manifestement à x_0 pour $t = 0$; c'est ce qui résulte de la formule (VI) ; de plus, celle-ci, dérivée membre à membre, conduit à la relation (IV) à établir.

La réciproque du théorème précédent est exacte ; si les fonctions x, y, $z, \ldots$ satisfont à l'équation différentielle (IV) et si $l_0 = x_0$ les fonctions associées U, V, $W, \ldots$ constituent une solution de l'équation algébrique (II).

3. Deux fonctions associées, par exemple x et U, sont liées par la relation fonctionnelle

$$(3) \qquad x(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_C e^{zt}\,\frac{U\left(\frac{1}{z}\right)}{z}\,dz$$

le contour d'intégration étant décrit dans le sens direct de la circonférence C centrée à l'origine et de rayon assez grand.

Le démonstration est immédiate. La fonction analytique

$$U\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{l_\nu}{z^\nu}$$

est holomorphe à l'infini et la série du second membre converge uniformément le long du contour C ; de plus, le long de celui-ci, la

fonction de variable z, $\frac{e^{zt}}{z}$, est bornée ; conséquemment,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_C e^{zt}\,\frac{U\left(\frac{1}{z}\right)}{z}\,dz = \sum_{\nu=0}^{\infty} l_\nu \cdot \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{e^{tz}}{z^{\nu+1}}\,dz\ ;$$

d'après le théorème des résidus, la dernière intégrale vaut $\frac{t^\nu}{\nu!}\cdot 2i\pi$; d'où la formule annoncée (3).

4. Le système des n équations linéaires

$$(4)\qquad \begin{cases} Y_r + t\sum_{s=1}^{n} a_{rs} Y_s = x_r^0 \\ (r = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

permet d'exprimer rationnellement les fonctions Y_r en fonction du paramètre t, supposé assez petit ; car le déterminant formé avec les coefficients des inconnues est égal à l'unité pour $t = 0$; il est donc différent de zéro pour $|t|$ assez voisin de zéro.

Les fonctions rationnelles $Y_r(t)$ sont développables en série entière, du moins pour les valeurs de t inférieures, en valeur absolue, à un nombre positif convenablement choisi.

La remarque développée au n° 2 prouve que les fonctions associées aux fonctions $Y_r(t)$ constituent une solution du système différentiel (1), la solution qui se réduit aux nombres $x_1^0, \ldots, x_n^0$ pour $t = 0$.

Posons $t = \frac{1}{p}$; le système (4) s'écrit, après multiplication par p,

$$\begin{cases} pY_r\left(\frac{1}{p}\right) + \sum_{s=1}^{n} a_{rs}\, Y_s\left(\frac{1}{p}\right) = px_r^0 \\ (r = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Si l'on compare avec les équations (2), il vient

$$\begin{cases} X_r(p) = Y_r\left(\frac{1}{p}\right) \\ (r = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

par suite (n° 3)

$$(5)\qquad \begin{cases} x_r(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_C e^{zt}\cdot\frac{X_r(z)}{z}\cdot dz \\ (r = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Cette dernière intégrale se calcule aisément par le théorème des résidus ; le cercle C est pris assez grand, de manière à contenir tous les pôles de la fonction $\mathcal{X}_r(z)$.

Un autre procédé pour passer de $\mathcal{X}_r$ à x_r, plus élémentaire en ce sens qu'il évite d'avoir recours à la théorie des fonctions analytiques, consiste à mettre la fraction rationnelle $\mathcal{X}_r(p)$ sous la forme d'une somme de fractions simples analogues à la suivante,

$$G(p) = \frac{A\,p}{(p-a)^{\alpha}};$$

en développant cette dernière fraction suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{p}$, on trouve que la fonction associée à cette série en $\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} = t\right)$ est, à un facteur près, le produit d'une puissance de t par exponentielle,

$$g(t) = A\frac{t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}\cdot e^{at};$$

a et A désignent des constantes, α nombre entier positif.

La fonction $x_r(t)$ est une somme de fonctions $g(t)$.

Les fonctions $\mathcal{X}_r(p)$, qui sont définies par les équations (2), s'expriment linéairement en fonction des valeurs initiales $x_r^0 (r = 1,2,\ldots,n)$,

$$\begin{cases} \mathcal{X}_r(p) = \sum_{s=1}^{n} x_s^0 H_{rs}(p) \\ (r = 1,2,\ldots,n). \end{cases}$$

Soient $h_{rs}(t)$ les fonctions associées aux fonctions $H_{rs}(p)$. On a alors les formules

$$(6) \qquad \begin{cases} x_r(t) = \sum_{s=1}^{n} x_s^0 h_{rs}(t) \\ (r = 1,2,\ldots,n) \end{cases}$$

qui définissent l'intégrale générale du système homogène (1) si l'on y considère les valeurs initiales, x_s^0, comme des constantes arbitraires.

L'avantage du procédé d'intégration du système différentiel (1) à l'aide du système différentiel (2), réside surtout dans le fait que les constantes d'intégration sont les valeurs initiales elles-mêmes ; dès que celles-ci ont été choisies, on obtient directement la solution particulière correspondante.

Au surplus, il existe des formulaires de calcul symbolique et des règles de calcul qui facilitent le retour des transformées $\mathcal{X}(p)$ aux fonctions originales $x(t)$ [n° 1, loc. cit.] ; leur emploi est commode ; il n'est indispensable ; la correspondance fondamentale est celle des deux fonctions associées, $G(p)$ et $g(t)$, introduites plus haut.

Le cas le plus simple est celui de l'équation du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} + a\,x = 0.$$

L'équation algébrique correspondante est

$$p\mathcal{X} + a\mathcal{X} = px_0\,,$$

x_0 désigne la valeur initiale de la fonction inconnue x.

Elle définit la fonction $\mathcal{X}$,

$$\mathcal{X} = \frac{p \cdot x_0}{p+a}.$$

La formule (5) fournit la solution cherchée

$$x = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{x_0\, e^{zt}}{z+a}\,dz,$$

c'est-à-dire d'après la formule de l'intégrale de Cauchy,

$$x = x_0\, e^{-at}.$$

On aurait pu encore développer la fraction $\frac{p\,x_0}{p+a}$ en série entière de $\frac{1}{p}$

$$\frac{p\,x_0}{p+a} = x_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{a^{\nu}}{p^{\nu}},$$

et observer que la fonction associée à la série du second membre est l'exponentielle e^{-at}.

5. Un système linéaire non homogène

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_r}{dt} + \sum_{s=1}^{n} a_{rs}\, x_s = f_r(t) \\ (r = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

dans lequel les seconds membres sont des fonctions continues de la variable t, développables ou non en série entière, admet aussi une solution caractérisée par ses valeurs initiales x_r^0 $(r = 1, 2, \ldots, n)$.

Cette intégrale s'obtient en ajoutant à l'intégrale du système ho-

mogène mise sous la forme (6) [n° 4] la solution du système non homogène qui s'annule pour $t = 0$. Il s'agit d'obtenir cette dernière solution. Soit $\theta_r(t,\alpha)$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ l'intégrale du système homogène qui se réduit à $f_r(\alpha)$ pour $t = \alpha$; si l'on fait jouer à $(t - \alpha)$ le rôle de la variable indépendante la forme du système homogène n'est pas modifiée ; on a (n° 4, formule (6))

$$\begin{cases} \theta_r(t,\alpha) = \sum_{s=1}^{n} f_s(\alpha)\, h_{rs}(t-\alpha) \\ (r = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

D'après un théorème de Cauchy, l'ensemble des n intégrales définies

$$\begin{cases} \omega_r(t) = \int_0^t \theta_r(t,\alpha)\, f_r(\alpha)\, d\alpha \\ (r = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

est la solution particulière du système non homogène qui s'annule pour $t = o$.

L'intégrale du système (7) caractérisée par les valeurs initiales x_r^0 est définie par les formules

$$(8) \qquad \begin{cases} x_r = \sum_{s=1}^{n} x_s^0\, h_{rs}(t) + \omega_r(t) \\ (r = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Quand les fonctions $f_r(t)$ sont des fonctions entières associées à des fonctions $F_r(p)$ holomorphes à l'infini, l'intégration du système non homogène (7) se ramène à la résolution des équations algébriques

$$\begin{cases} p\,X_r + \sum_{s=1}^{n} a_{rs} X_s = p\,x_r^0 + F_r(p) \\ (p = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

On le prouve encore à l'aide de la remarque développée au n° 2.

6. Considérons maintenant un système différentiel de n équations linéaires, à coefficients constants, à n inconnues, qui contient les dérivées successives des fonctions inconnues jusqu'à un certain ordre,

$$(9) \qquad \begin{cases} \sum_{s=1}^{n} f_{rs}\left(\frac{d}{dt}\right) x_s = 0 \\ (r = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

les symboles $f_{rs}\left(\frac{d}{dt}\right)$ désignent des formes différentielles linéaires, à coefficients constants

$$f_{rs}\left(\frac{d}{dt}\right) = \sum_{p=0}^{p=n_s} A_{rp} \cdot \frac{d^{n_s-p}}{dt^{n_s-p}}.$$

On suppose que le système (9) est résoluble par rapport aux plus hautes dérivées qui y figurent. Conséquemment, si l'on prend comme inconnues auxiliaires les dérivées jusqu'à un certain ordre des fonctions cherchées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le système (9) se réduit à un système normal (N), à plus de n inconnues, analogue aux équations simultanées (1).

La réduction n'est pas nécessaire. Il est possible, comme nous allons le montrer, d'écrire d'emblée le système algébrique en les inconnues $\mathcal{X}_r(p)$ correspondant au système différentiel (9).

Revenons à la remarque faite au n° 2. Il est manifeste que les fonctions

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{l_\nu\, t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \quad \text{et} \quad \frac{U-x_0}{t} = \sum_{\nu=1}^{\infty} l_\nu t^{\nu-1}; \quad (x_0 = l_0)$$

sont associées.

L'équation (I) du n° 2, peut s'écrire

$$\frac{U-x_0}{t} + AU + BV + CW + \ldots = 0;$$

par suite elle se déduit de l'équation différentielle (IV) en remplaçant dans celle-ci $\frac{dx}{dt}$, x, y, z, ... par leurs fonctions associées.

On obtiendra donc le système algébrique correspondant au système normal, désigné par (N), en remplaçant dans ce dernier les dérivées et les fonctions inconnues (les inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les inconnues introduites à titre auxiliaire) par leurs fonctions associées.

Mais les inconnues auxiliaires sont les dérivées successives jusqu'à un certain ordre des fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Il revient au même de dire que les équations algébriques qui correspondent aux équations différentielles (9) s'obtiennent en substituant dans celles-ci, aux inconnues et à leurs dérivées, les fonctions associées.*

7. Si les fonctions $x(t)$ et $U(t)$ sont associées (n° 2), il en est de même des séries

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{l_\nu\, t^{\nu-k}}{(\nu-k)!} \quad \text{et} \quad \frac{U-(l_0+l_1 t+\ldots+l_{k-1}t^{k-1})}{t^k} = \sum_{\nu=k}^{\infty} l_\nu\, t^{\nu-k};$$

soit $x^{(\nu)}(0)$ la valeur pour $t=0$ de la dérivée d'ordre ν de la fonction x; on a, pour un indice quelconque ν,

$$x^{(\nu)}(0) = l_\nu \ ;$$

par suite la fonction

$$\frac{U - [x(0) + t\,x'(0) + \ldots + t^{k-1} x^{(k-1)}(0)]}{t^k}$$

est associée à la dérivée $\frac{d^k x}{dt^k}$.

Posons encore (cf. n° 4) $\frac{1}{t} = p$ et $\mathcal{X}(p) = U\left(\frac{1}{p}\right)$. La fonction du paramètre p associée à la dérivée $\frac{d^k x}{dt^k}$ s'écrit :

$$p^k \mathcal{X}(p) - [p^k x(0) + p^{k-1} x'(0) + \ldots + p\, x^{(k-1)}(0)].$$

Ainsi l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = 0$$

correspond à l'équation algébrique en l'inconnue $\mathcal{X}$,

$$p^2 \mathcal{X} - [p^2 x(0) + p\, x'(0)] + a\{p\mathcal{X} - [p\, x(0)]\} + b\mathcal{X} = 0.$$

Il eut été tout aussi simple d'écrire le système différentiel normal équivalent à l'équation proposée

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + ay + bx = 0 \\ \dfrac{dx}{dt} - y \qquad\quad = 0 \end{cases}$$

puis (n° 1) le système algébrique correspondant

$$\begin{cases} pY + aY + b\mathcal{X} = p\,.\,x'(0) \\ p\mathcal{X} - Y \qquad\quad = p\,.\,x(0). \end{cases}$$

L'élimination de l'inconnue auxiliaire Y conduit encore à l'équation obtenue plus haut en l'inconnue $\mathcal{X}$.

8. L'exposé précédent repose uniquement sur la méthode de résolution des équations par les séries entières et sur la correspondance établie entre les séries entières associées [1]).

1) *Note.*—La présentation peut se faire de diverses façons. Nous aurions pu notamment commencer par le cas le plus général du système (9) et arriver à la conclusion, qui est fondamentale, énoncée à la fin du n° 6. Il aurait suffi pour cela d'utiliser la linéarité de la correspondance établie entre une série et sa série associée.

Le champ d'application du calcul symbolique est plus vaste [1]). Il sert à résoudre divers types d'équations fonctionnelles et il utilise des correspondances variées. Pour intégrer les équations différentielles linéaires à l'aide de ce mode de calcul, de nombreux auteurs font correspondre à la fonction $x(t)$ la fonction $F(p)$ définie par la transformation de Laplace, effectuée le long de l'axe réel,

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} x(t)\, dt$$

ou bien la fonction $p \,.\, F(p)$, de manière à retrouver les correspondances établies dans le d'Heaviside envisagé comme un calcul d'opérateurs. La seconde transformation permet encore de passer de (1) à (2) [n° 1]; la première conduit au système algébrique en les inconnues $F_r(p)$,

$$(10) \qquad \begin{cases} p \,.\, F_r(p) + \sum_{s=1}^{n} a_{rs} \,.\, F_s(p) = x_r^0 \\ (r = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Il nous paraît utile de rappeler qu'une transformation de Laplace effectuée le long d'un contour fermé du plan de la variable complexe, fournit directement le système précédent, sans qu'il soit nécessaire de faire appel aux règles du calcul symbolique. Le procédé est connu [E. Goursat, Cours d'Analyse Mathématique, T. II, p. 453 de la 3e éd].

On pose

$$(11) \qquad x_r = \frac{1}{2i\pi} \int_C e^{pt} F_r(p)\, dp$$

l'intégrale étant prise le long d'une circonférence centrée à l'origine et de rayon assez grand.

Moyennant ce changement d'inconnues, F_r au lieu de x_r, le système (1) devient

$$\begin{cases} \frac{1}{2i\pi} \int_C e^{pt} \left[p\, F_r(p) + \sum_{s=1}^{n} a_{rs} F_s(p) \right] dp = 0 \\ (r = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Les équations précédentes sont vérifiées, en vertu du théorème fondamental de Cauchy, dès que les fonctions de la variable complexe p,

1) Lévy (P) [Paris]. *Le calcul symbolique et ses principales applications.* Ann. Univ. Grenoble (1945), 21, 41-56.

$$p\,F_r(p) + \sum_{s=1}^{n} a_{rs}\,F_s(p)\,,$$

sont holomorphes dans la région limitée par le contour C. On trouve la solution particulière qui se réduit aux nombres $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ pour $t = 0$ en prenant pour ces fonctions les constantes x_r^0; la vérification est simple et se fait rapidement.

D'où, pour déterminer les fonctions $F_r(p)$, les n équations simultanées (10).

Les inconnues $x_r(t)$ se calculent à l'aide des formules (11), identiques à la notation près, aux formules (5); la comparaison des systèmes (2) et (10) montre en effet que l'on a

$$F_r(p) = \frac{\mathcal{X}_r(p)}{p}\,.$$

Faculté Polytechnique
de Mons

(Reçu le 9 Avril 1948).

Travaux cités

1) *Theorie und Anwendung der Laplace - Transformation* par G. Doetsch (1937). V. Teil - p. 334.
2) *Operatorenrechnung* par K. W. Wagner (1940). Kap. IV, p. 82.
3) *Le Calcul symbolique et quelques applications à la Physique et à l'Electricité* par R. Potier et J. Laplume (1943). (Actualités scientifiques et industrielles, n° 947).
4) *Methods of Mathematical Physics* par H. Jeffreys (1946), (p. 204 de la 2e éd.).

LA PHYSIQUE D'ACTION *)
Une nouvelle physique unitaire

par

ANDREI POPOVICI

INTRODUCTION

1. *Les bases de la physique d'action.* L'évolution de la physique théorique unifie d'une manière toujours plus profonde temps et espace, électromagnétisme et gravitation, matière et métrique. L'unité du temps et espace est mise en évidence par l'espace quadridimensionel (univers absolu de Einstein-Minkowski) de la relativité restreinte. Les théories unitaires du champ, de Weyl et Eddington (fondées sur la „géométrie infinitésimale pure"), Kaluza et Einstein (théories du monde à 5 dimensions) Veblen (géométrie relativiste projective) et Vrânceanu (théorie unitaire des espaces non holonomes) ont réalisé une synthèse de l'électromagnétisme et de la gravitation. De même, la théorie de la relativité générale et les théories unitaires ont réalisé sinon une unité, mais au moins une synthèse entre métrique et matière.

A chaque des trois couples, le second terme (espace, gravitation, métrique) représente une réalité géométrique, le premier terme (temps, électromagnétisme, matière) représente une réalité physique. La tendance fondamentale de la physique moderne, c'est donc l'unité des contraires géométrie et physique, leur interpénétration : physicalisation (matérialisation) de la géométrie et géométrisation (spatialisation) de la physique.

La physique d'action, une nouvelle théorie relativiste et unitaire que je viens développer à travers des dernières années, tend vers une unité totale de la matière et de la métrique, de l'électromagnétisme et de la gravitation, du temps et de l'espace, unité réalisée par un espace hypercomplexe à 12 dimensions, l'espace bisextique ou l'espace d'action S_{12}. En physique relativiste comme en physique quantique, l'action, produit d'une énergie et d'une durée (ou encore d'un impuls et d'une longueur) s'est évidenciée comme réalité physique fondamentale, unité de la matière (énergie-impuls) et métrique (temps-espace).

Cette unité est fondée sur la primauté du premier terme, sur la primauté de la physique vis-à-vis de la géométrie, donc sur fonde-

*) Thèse de doctorat ès Sciences Mathématiques soutenue à la Faculté des Sciences de Bucarest.

ments matérialistes. La métrique (espace et temps) ne constitue pas une cadre apriorique de la matière, mais c'est la matière, la réalité physique qui va déterminer le temps et l'espace comme formes de son existence.

2. *Construction inductive du groupe* R_6. La physique d'action est fondée surtout sur la théorie des *groupes finis*, posée ainsi pour la première fois, aux fondements mêmes de la physique relativiste. Le point de départ est bien simple : les grandeurs géométriques et physiques relativistes, gravifiques et électromagnétiques, statiques (spacielles) d'un champ sphérique créé par un électron d'un centre 0, considérées comme fonctions du rayon vecteur ($r = r_1$) en constituent un groupe R_6. Ce groupe est exactement le groupe diédrique cubique des 6 valeurs du rapport des 4 points, exprimées en fonction de r.

a) En relativité générale, m_0 étant la masse d'un électron, k_0 une constante universelle, ($\sim 10^{-27}$ cgs) des dimensions lm_0^{-1}, la longueur $m = k_0 m_0$ est „le rayon gravifique de la masse m_0" (Weyl) ou la masse homogénéisée. De même, e_0 étant la charge électrique de l'électron, c la vitesse de la lumière dans le vide, la longueur $e = e_0 \sqrt{k_0}/c$ est „le rayon vecteur de la charge e_0" (Weyl). En théorie classique, l'énergie potentielle électromagnétique d'un champ sphérique a la valeur

$$r'_2 = e^2/2r,$$

tel que le potentiel électromagnétique coulombien (maxwellien) est $-e/r$, tandis que le potentiel gravifique newtonien est $2m/r$.

En relativité générale, le potentiel gravifique se trouve égal à

$$\frac{2m}{r} - \frac{e^2}{r^2} = \frac{2r'_3}{r}.$$

Cette formule correspond au double caractère (gravifique et électromagnétique) du champ. Au lieu de la masse constante m, se présente ici la masse gravifique généralisée

$$r'_3 = m - e^2/2r = m - r'_2.$$

Le rayon classique de l'électron considéré comme petite sphère étant

$$a = e^2/2m,$$

posons

$$a_2 = m, \quad a_3 = m.$$

r'_2 et r'_3 deviennent

$$r'_2 = a_2 a/r_1, \quad r'_3 = a_3 \left(1 - \frac{a}{r}\right).$$

b) En physique classique, l'électron se comporte comme une petite sphère de rayon $a=e^2/2m$, chargée de l'électricité. En relativité générale et théorie unitaire, cette charge sphérique doit être remplacée par une charge distribuée en tous les points de l'espace (par analogie avec la masse généralisée gravifique r'_3). La charge doit atteignir une densité maximum (infinie) pour $r = a$ (Weyl). Les plus simples fonctions homographiques avec une singularité pour $r = a$ sont

$$r'_4 = a_4\left(\frac{r}{r-a}\right),\quad r'_5 = a_5\left(\frac{a^2}{a-r}\right),$$

a_4 et a_5 étant des longueurs constantes arbitraires.

c) Introduisons, par raisons de symétrie de groupe, à côté de rayon vecteur $r_1 = r$, la grandeur

$$r'_6 = a_6\,(1-\frac{r}{a}),$$

fonction linéaire du rayon vecteur, a_6 étant une longueur constante.

Pour ramener les 6 grandeurs r'_s $(s = 1, 2, \ldots, 6)$ à un groupe posons le rayon classique $a = a_1$ et en général

$$\frac{r'_s}{a_s} = r^0_s, \text{ à savoir}$$

$$r'_1 = r,\ r'_3 = a_3\,(1-\frac{a}{r}),\ r'_5 = a_5\left(\frac{a}{a-r}\right)$$

$$r'_6 = a_6(1-\frac{r}{a}),\ r'_2 = a_2\left(\frac{a}{r}\right),\ r'_4 = a_4\left(\frac{r}{r-a}\right).$$

Donc

$$r^0_1 = r^0,\ r^0_3 = 1-\frac{1}{r^0},\ r^0_5 = \frac{1}{1-r^0}$$

$$r^0_6 = 1-r^0,\ r^0_2 = \frac{1}{r^0},\ r^0_4 = \frac{r^0}{r^0-1}.$$

Les grandeurs r^0_s, fonctions du rayon vecteur omogénéisé $r^0 = r/a$ et invariantes vis-à-vis de l'étalon (unité de mesure) en constituent le groupe diedrique cubique R_3. Par le choix d'un r^0_s arbitraire comme variable fondamentale, les fonctions r^0_s se permutent. Il en résulte la symétrie fondamentale du monde physique spatiale.

Il en existe de même un groupe Q_6 isomorphe à R_6, formé des 6 grandeurs q^0_s, obtenu en substituant le rayon vecteur spatial $r_1 = r$ par la variable temporelle $q_1 = q$. On doit de même remplacer les

constantes spatielles a_a par d'autres constantes b_s correspondantes aux grandeurs temporelles, donc $r_s^0 = r_s/a_s$ par $q_s^0 = q_s/b_s$. Il en résulte donc aussi la symétrie fondamentale des grandeurs temporelles (cinétiques).

3. *La structure de cet ouvrage.* D'une part, la physique d'action est une théorie relativiste et unitaire ; elle doit mener d'autre part vers une unité de la physique relativiste (physique du continu) et de la physique quantique (physique du discontinu), unité qui sera partiellement réalisée par le présent ouvrage et dont le développement reste une tâche future. Nous avons renoncé à l'introduction de la mécanique ondulatoire et de la théorie du photon, comme aux développemets détaillées en matière de géométrie différentielle, surtout aux équations générales du champ. Quand aux ces dernières nous étudiérons surtout le cas d'un champ du symétrie sphérique produit par la corpuscule – étude qui reste seule en mesure mettre en évidence le groupe fondamentale des coordonnées et les discontinuités correspondantes. Ce mémoire est donc en premier lieu une théorie mathématique *structurelle* du corpuscule élémentaire. La déduction des équations générales du champ (continue et quantifié) gravifique, électromagnétique et ondulatoire, valables pour une distribution *quelconque* de la matière reste comme tâche des autres mémoires,

La première partie contient une interprétation critique des conséquences théoriques des théories relativistes et unitaires classiques. La deuxième section, principale, est l'exposé mathématique de la physique d'action, à la lumière des groupes abstraits et du système hypercomplexe C_{12} (algèbre groupale) qui forme la base de l'espace S_{12}.

NOTATIONS

Dans le texte, les indications par rapport aux notations du présent paragraphe seront notés par *N*.

I. *Indices.* Les indices adoptant des valeurs de 1 à 6 ou de 7 à 12 seront désignés par lettres latines, les indices variant de 1 à 12 par des lettres grecs. Cas particuliers :

1. $s, r = 1 \ldots 6$; $t, u = 7 \ldots 12$; $\tau, \varrho = 1 \ldots 12$

2. ι = indices impairs $1 \ldots 11$; $i = 1 \ldots 5$ $j = 7 \ldots 11$

3. π = indices pairs $2 \ldots 12$; $p = 2 \ldots 6$; $q = 8 \ldots 12$

4. τ = étant l'index d'unité bisextique e_τ, notons par τ_ϱ l'index

du produit $e_\tau e_\rho$. Comme cas particulier, pour les indices $\rho = i$, notons les permutations cycliques:

$$i_1 = 1, 3, 5 \qquad p = p_1 = 6, 2, 4$$
$$i_3 = 3, 5, 1 \qquad p_3 = 4, 6, 2$$
$$i_5 = 5, 3, 1 \qquad p_5 = 2, 4, 6$$

et d'une façon analogue $j_{1,3,5}$ et $q_{1,3,5}$; de même pour ι, π.

5. $f = 1, 2, 3, 4$; $\psi = f + 6$. Notons par γ, δ des indices des certaines valeurs entre 1 et 12 (suivant le cas).

II. *Signes spéciaux.*

1. Vecteurs: petites lettres barrées... $\bar{a}$; $(\bar{v}, \bar{v}')$ = produits scalaires.

2. Conjugués hypercomplexes: sextiques... a^+, matériels (relatifs à e'_1)... â, imaginaires... a^*. Conjugués d'ordre s... $a^{(s)}$.

3. Dérivées $\dot{a}$, $\dot{b}$ etc.

4. Accents (' , " , etc.): dedoublent lettres ou indices variant dans les mêmes limites. (ex. i, i').

5. Produit des transformations projectives t_τ, t_ρ: $(t_\tau\ t_\rho)$.

III. *Groupes*: notés par grandes lettres suivies d'un index indiquant l'ordre (G_{12}, sous-groupes invariants I_δ, groupes-facteurs $J_n = G_{12}/I_\delta$, sous-groupes non invariants L_γ). Par E_{12}, M, T, P notons les groupes bisextiques, groupes des matrices, des transformations projectives, des permutations. C_{12} = système bisextique, S_{12} = espace bisextique.

IV. *Formes linéaires:* petites lettres latines: $v\,(e_\tau)$; vecteurs $\bar{v}\,(e_\tau)$; de même unités bisextiques: e_τ, m_τ, n_τ, p_τ.

V. *Longueurs* (variables ou constantes) ou provenant des longueurs: petites lettres latines.

VI. *Rapports:* petites lettres grecs; pour les coordonnées r, q, on va noter $r^0 = r/d$, $q^0 = q/b$.

VII. *Formes quadratiques:* grandes lettres latines: $V\,(a_s)$, $F(dx_\tau)$.

VIII. *Figures:* grandes lettres.

PREMIÈRE SECTION:

Les théories relativistes et unitaires classiques.

L'évolution de la physique moderne, de la théorie relativiste et des théories unitaires du champ, de la théorie des quanta et de la mé-

canique ondulatoire, a révolutionné la physique classique et donc la pensée humaine. Elle a mis en évidence le caractère dialectique et matériel du monde physique : elle signifie une introduction croissante du matérialisme dialectique en physique théorique – conception qui a reçu de nouveaux essors et de nouvelles formes avec chaque progrès fondamental de la science.

La méthode dialectique s'oppose à la métaphysique, à la conception mécanique ; l'interprétation matérialiste s'oppose à l'idéalisme philosophique.

La méthode dialectique peut être formulée en 4 principes essentiels, dont chacun présente 2 aspects : la coexistence (l'aspect spatial) et la succession (l'aspect temporel). Nous séparons ces principes seulement du point de vue didactique ; en réalité ils sont indissolublement liés.

I. *Le principe de l'interdépendance :* les objets et les phénomèns sont organiquement liés entre eux dans le temps et dans l'espace, dans un procès de l'interdépendance (connexion) universel ; ils ne peuvent donc être considérés isolés, mais conditionnés par tout le reste de l'univers.

II. *Le principe de la transformation :* La nature est en éternel mouvement ou transformation ; il n'y a rien de fixe, rien de statique.

III. *Le principe de la transformation des changements quantitatifs en changements qualitatifs.* La quantité et la qualité ne peuvent pas être séparées, mais s'enchaînent l'une à l'autre et se transforment réciproquement. Le principe présente deux aspects essentiels.

a) *Synthèse qualitative des éléments.* La jonction quantitative de quelques éléments peut donner un entier à nouvelles qualités, supérieures, qui ne reviennent pas aux éléments constitutifs. L'accumulation quantitative des éléments se transforme en qualité (synthèse créatrice).

b) *La transformation par sauts.* Le procès de transformation présente des passages des changements quantitatifs, lents (évolution) aux changements qualitatifs, brusques (par sauts), d'après des lois déterminées et inversement (transformation continue et discontinue).

IV. *Le principe de l'unité des contraires.* Des contradictions internes, jointes dans une unité supérieure dialectique, sont caractéristiques aux objets. Le double aspect d'unique et l'unité des ses parties contradictoires est l'essence de la dialectique.

a) *Interpénétration des contraires.* Les 2 contraires (thèse et antithèse) s'interpénètrent, s'influencent réciproquement, et leur lutte est la force motrice de la transformation.

MŰSZAKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET

b) *La transformation par contradictions = La négation de la négation (aspect temporel)* : L'apparition et la disparition successive des contraires, leur développement, c'est le contenu interne du procès de transformation, de la transformation des changements cantitatifs en changements qualitatifs .

En opposition avec la dialectique, la métaphysique considère les objets d'une manière isolée et statique, elle ignore les transformations qualitatives, elle ignore l'unité des contraires, en considérant la transformation comme un procès lent, quantitatif et harmonieux.

Le matérialisme philosophique dialectique conçoit le monde d'après sa nature comme matériel, comme matière en éternel mouvement. Elle existe objectivement, en dehors et indépendamment de la conscience, qui est le produit de l'évolution de la matière. Par la jonction de la théorie à l'expérience pratique, les lois du monde peuvent être connues. Cela en opposition avec l'idéalisme. Le matérialisme dialectique est l'unité de la méthode dialectique et de l'interprétation (théorie) matérialiste.

Je montrerai que l'évolution de théories relativistes et unitaires tend vers une unité dialectique 1. du temps et de l'espace (en monde relativiste à 4 dimensions) ; 2. de l'électromagnétisme et de la gravitation (en monde unitaire) ; 3. de la matière et de la métrique (espace + temps) (en monde d'action).

L'évolution de la physique signifie la géométrisation (la spatialisation) du temps, de l'électricité et de la matière et inversement, matérialisation (physicalisation) de l'espace, de la gravitation et de la métrique, donc jonction dialectique et matérialiste des contraires, leur dépassement dialectique matérialiste dans une unité supérieure (voir les classiques du matérialisme dialectique et Bachelard : 31, 32 ; Vescan 30, Broglie 26).

I. La relativité restreinte

La structure de la théorie de la relativité restreinte est essentiellement matérialiste-dialectique. Elle signifie par rapport à la physique classique une étape essentielle dans la formulation matérialiste-dialectique des lois physiques.

A) *L'espace et le temps.*

(Voir en outre Bachelard, 31, 32 et V. Novacu 35).

a) *La méthode dialectique et le problème de l'espace et du temps.*

1. *Le principe de l'interdépendance.*

La physique classique en considère l'espace et le temps (respecti-

vement énergie et impulsion) comme des réalités distinctes, indépendantes. La théorie restreinte de la relativité remplace cette conception métaphysique (mécanique) par une conception dialectique. Le temps et l'espace ne sont plus indépendants, mais s'enchaînent indissolublement, en trouvant leur unité dans „le monde absolu" à 4 dimensions de Minkowski-Einstein (Weyl, 11). La cinématique (l'étude du mouvement) devient géométrie à 4 dimensions. Aussi l'impulsion et l'énergie s'enchaînent étant des composantes spatielles, resp. temporelles de l'énergie totale.

2. *Le principe de la transformation.*

1) Ne pas séparer le temps de l'espace, ceci signifie considére, tout phénomène physique dans le temps, donc dans son mouvement dans sa transformation. Ceci résume le caractère dynamique, transformiste de la théorie de la relativité (Weyl, 11).

2). Relatif et absolu : la relativisation des dimensions spatio-temporelles, leur dépendance dynamique de mouvement de l'observateur, ne signifie point leur réduction totale aux relations entre l'objet et l'observateur. Par rapport à lui même (= en repos) tout observateur (tout objet) a des dimensions spatielles déterminées (longueur propre ou longueur de repos) et des durées déterminées (durée propre). La longueur et la durée propre sont déterminées par la structure *matérielle* de la réalité physique même. Par rapport à un autre observateur en mouvement, les dimensions respectives se déforment en rapport avec sa vitesse. La transformation de Lorentz apparaît ainsi comme une sorte perspective dynamique (perspective qui en dehors de l'espace comprend le temps) (Weyl, 11). Les dimensions spatielles et temporelles propres sont donc „absolues" (c'est à dire determinées non pas l'observateur mais par la structure de l'objet même). Elles se relativisent seulement par rapport aux observateurs en mouvement. La relativisation des dimensions spatio-temporelles est elle-même relative (limitée). La théorie de la relativité ne signifie donc pas un relativisme extremiste, absolu, mais un relativisme relatif, limité – unité et interpénétration dialectique des contraires „relatif" et „absolu" ; ils doivent se limiter et se conditionner d'une façon réciproque.

3. *Le principe de la transformation des changements quantitatifs en changements qualitatifs.*

1) *La synthèse qualitative des éléments.* En physique classique, l'espace et le temps présentent des qualités irreductiblement opposées. Elles se différencient par le nombre des dimensions (3 resp. 1), par la

courbure (l'espace est plan ou courbe, le temps rectiligne) et surtout par la réversibilité de l'espace et l'irreversibilité du temps (différence entre passé et futur). En théorie de la relativité, la différence qualitative entre temps et espace dérive de l'opposition entre nombres réels et nombres imaginaires. Ce principe peut aussi être énoncé de cette manière : Un vecteur cosmique x est spatiel ou temporel, d'après que $x^2 \gtrless 0$. La différence mathématique entre quantités réelles et imaginaires s'est transformée dialectiquement en différence physique qualitative, entre espace et temps.

2). *La transformation par sauts.* En physique classique, la vitesse d'un corps peut augmenter, théoriquement, au delà de toute limite ; les vitesses s'additionnent directement ($v = v_1 + v_2$). En théorie de la relativité, le principe de l'addition des vitesses se modifie. La vitesse de la lumière est la vitesse maximum, où l'augmentation des vitesses présente un saut.

4. *Le principe de l'unité des contraires.*

1) En physique classique, le temps et l'espace sont des réalités irréductibles et isolées. Le monde physique est étendu en espace et il évolue en temps ; le temps est le cadre des transformations matérielles et apparaît comme une réalité physique (à savoir comme un paramètre physique indépendant, absolu) et l'espace apparaît comme cadre géométrique. En théorie de la relativité, grâce à la constante universelle c, le temps prend la forme spatielle $x_0 = ict$. L'espace et le temps s'homogénéisent ($i^2 = -1$).

2) Cette homogénéisation (spatialisation ou géométrisation) n'élimine pas le caractère contradictoire de l'espace et du temps (contradiction entre reversibilité et irréversibilité), mais d'une opposition mécanique (métaphysique, absolue), elle la transforme en unité dialectique des contraires. Elle crée le cadre du mouvement (du développement) de cette contradiction ; l'unité dialectique est une réalité supérieure, le monde „absolue" (quadridimensionel) espace - temps.

3) L'interpénétration dialectique des contraires : „espace"-„temps", signifie : spatialisation (géométrisation) du temps - sa transformation en dimension de type spatial et réciproquement : la dynamisation (physicalisation) de l'espace - sa transformation en nombre de dimensions indussolublement liées à la transformation, au mouvement. La géométrisation du temps représente l'aspect dialectique tandis que la dynamisation de l'espace représente l'aspect matérialiste de la théorie relativiste (d'où l'unité matérialiste - dialectique des contraires espace - temps). Les deux aspects sont inséparables, comme la méthode dialectique et la théorie matérialiste elles - mêmes.

b) *L'interprétation matérialiste de l'espace et du temps.*

1. *Les théories idéalistes en philosophie :*

1) L'idéalisme objectif (Leibniz); l'idéalisme subjectif (Berkeley), l'idéalisme absolu (Hegel), nient la matérialité du monde. Les théories idéalistes masquées sous une forme réaliste (le réalisme critique de Kant, les neo-kantiens, la phénoménologie de Husserl, le conventionnalisme de Poincaré, l'école de Vienne de Carnap) reconnaissent en apparence l'existence réelle, objective, indépendante de la conscience, du monde; mais elles considèrent les catégories surtout la causalité) comme formes pures de la pensée et le temps et l'espace comme formes de l'expérience sensible. L'idéalisme sous n'importe quelle forme, nie donc la réalité du temps, de l'espace et de la causalité (plus exactement : il nie donc la réalité du temps, de l'espace (et de l'interdépendance).

2) Les courants idéalistes modernes ressuscités dans le cadre de la crise structurelle d'après la première guerre mondiale, interprètent la théorie de la relativité comme un retour à Kant, comme une vérification de l'idéalisme en théorie de la connaissance. L'opposition temps – espace, se réduit en réalité à l'opposition entre nombres réels et imaginaires, donc, argumentent les idéalistes, cet antagonisme est une apparence subjective, donc le temps et l'espace n'existent pas.

3) En réalité, la théorie de la relativité est nettement matérialiste : elle considère les phénomènes physiques comme des réalités objectives Or, le seul critère d'une théorie matérialiste, c'est la reconnaissance d'une réalité objective. En opposition avec l'idéalisme philosophique, le temps et l'espace relativistes sont des formes de l'existence de la matière.

2. *La différence entre temps et espace* n'est point épuisée par la contradiction entre nombres réels et imaginaires : la réalité physique qui est „inépuisable" (Lénine), dépasse l'expression mathématique, justement par la transformation dialectique des différences quantitatives en différences qualitatives – véritable synthèse créatrice.

En particulier :

1) Les quantités imaginaires et réelles synthétisées sous la forme du nombre complexe présentent non seulement des différences quantitatives, mais encore des profondes différences qualitatives. Pourtant par rapport à la profonde différence physique entre temps et espace, cette contradiction entre réel et imaginaire apparaît avant tout comme quantitative. Les quantités imaginaires et réelles ne sont point des

formes pures de la connaissance, mais des formes de l'existence réelle, matérielle.

2) La différence physique entre temps et espace et la différence psychologique (expérimentelle) correspondante ne se réduisent point à la différence mathématique entre réel et imaginaire. La différence entre temps et espace est conditionnée par l'existence d'une vitesse limite (la vitesse de la lumière) – donc par l'augmentation de la masse en même temps que de la vitesse – fait matériel. D'ici l'impossibilité d'inverser le rôle des axes temps et espace, d'ici la différence entre temps et espace, la transformation des différences mathématiques en différence physique.

3) La longueur de repos et la durée propre d'un objet sont déterminées par la stucture matérielle de la réalité physique. C'est sur cette base matérielle seulement qu'on détermine les dimensions spatio – temporelles correspondantes à un observateur avec une vitesse quelconque (transformation de L o r e n t z).

3. *La causalité.* En opposition avec l'idéalisme, la succession en temps de la cause et de l'effet (forme spéciale de l'interdépendance de deux objets, liée à l'existence du temps) est liée à l'existence de la matière. Le principe de la causalité reçoit en théorie restreinte de la relativité un fondement physique concret. La théorie de la relativité donne donc au principe de l'interdépendance une forme matérialiste plus prononcée par rapport à la physique classique, à savoir :

1) *En sens objectif:* toute intéraction se propage de proche en proche, avec une vitesse égale à la vitesse de la lumière. La vitesse infinie comme l'action à distance deviennent des notions irréelles, métaphysiques.

2) *Dans le sens de la théorie de la connaissance* (de la vérification expérimentelle du principe de la causalité) : l'impossibilité d'observer l'effet avant la cause se rattache en relativité restreinte à l'existence d'une vitesse maximum. (V. B o r e l, Temps et espace).

B) *Métrique et matière en relativité restreinte.*

a) La métrique

1. *La méthode dialectique dans l'étude de la métrique relativiste restreinte.*

1) *Le principe de l'interdépendance.*

α) La dépendance des dimensions spatio-temporelles de la vitesse de l'observateur, implique l'étude de tout phénomène physique en rap-

port avec l'observateur, en rapport avec le système de coordonnées choisi (W e y l). Semblablement en ce qui concerne les composantes de la masse (de l'énergie et de l'impulsion décomposées par rapport à l'espace et le temps). La relativisation des dimensions spatio - temporelles et la relativisation de la masse (de l'énergie) signifie interdépendance universelle.

β) Relatif et absolu. La physique classique était mécanique ; elle considérait les dimensions d'un objet donné comme absolues. La théorie de la relativité, qui vient relativiser ces dimensions et les dynamiser, est dialectique. Mais l'idéalisme philosophique réduit cettes dimensions aux simples relations entre l'objet et l'observateur ; l'idéalisme philosophique est un relativisme extremiste absolu. Il réduit le monde aux relations et transformations abstraites, en ignorant le substrat matériel. En réalité, la relativisation des dimensions ne signifie point leur réduction totale aux relations entre l'objet et l'observateur. A savoir :

β_1) Les distances spatielles et temporelles de deux événements s'unifient dans un invariant (la distance absolue = intervalle) indépendant de l'observateur. Les coordonnées (spatielles ou temporelles) sont relatives (géométriques, dépendantes du mouvement de l'observateur, du système de coordonnées), mais l'intervalle = leur unité (somme des carrées) n'est point relative, mais „absolue", indépendante de l'observateur : l'intervalle est déterminé par la structure matérielle de l'objet physique même, par la totalité de l'univers matériel. En mathématique nous pouvons remplacer le mot „absolu" par l'expression „invariant". Plus encore : les coordonnées supposent l'intervalle. Les coordonnées sont secondaires, l'intervalle primaire. Toute géométrie métrique est la théorie de l'invariance d'une forme métrique fondamentale, par rapport à un groupe de transformations (dans notre cas, les transformations de L o r e n t z). En partant de l'intervalle invariant, on déduit par rapport au système de coordonnées choisi les coordonnées et point inversement ; tel qu'en économie politique, en partant de la loi de la valeur (déterminée par le travail social nécessaire, concrétisée en marchandise) on déduit les oscillations de prix autour de la valeur (dues à la demande et à l'offerte) et point inversement.

Au point de vue fonctionnel (géométrique, dialectique) l'intervalle invariant est l'unité absolu (invariante) des variables (des coordonnées) relatives à l'observateur, mais au point de vue réel (physique, matérielle) les coordonnées sont des reflexes de l'intervalle, des projections de l'intervalle dans un système déterminé de coordonnées.

β_2) Pour deux observateurs nous avons des dimensions du parallélépipède infinitésimale $dx_1' = \alpha\, dx$, $dx_2' = dx_2$, $dx_3' = dx_3$, $dx'_0 = \frac{1}{\alpha}\, dx_0$, $\alpha^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2}$, donc invariance du hypervolume infinitesimal $dv' = dv = dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_0$.

2. *Le principe de la transformation.*

α) La dépendance par rapport à l'observateur des dimensions spatio-temporelles, de l'énergie et de l'impulsion, n'est point une interdépendance quelconque, mais dépendance vis-à-vis du mouvement (de la vitesse) de l'observateur, donc interdépendance dynamique.

β) *Relatif et absolu*.

La physique classique admet le principe de la relativité des vitesses (leur dépendance du mouvement de l'observateur) sans aucune exception ; la physique relativiste l'admet pour toute les vitesses la vitesse de la lumière exceptée, qui devient une constante universelle, absolue. La *relativisation* des dimensions spatio-temporelles, par rapport à la physique classique est la conséquence de l'existence d'une constante *absolue*. Loin d'être un relativisme absolu, ce qui constituerait une déviation métaphysique idéaliste, le relativisme einsteinien est lui-même relatif. relativisation (variation) des grandeurs spatio-temporelles et invariance (caractère absolu) de la vitesse de la lumière, l'interpénétration dialectique des contraires „relatif" et „absolu". Au point de vue fonctionnel (géométrique, dialectique) la notion de mouvement (vitesse) dépend de l'espace et du temps en constituant leur unité dialectique ; au point de vue réel (physique, matériel) les dimensions spatio-temporelles supposent le mouvement. Leur relativisation est la conséquence du caractère absolu de la vitesse de la lumière.

3. *Le principe de la transformation des changements quantitatifs en changements qualitatifs.*

Si la vitesse de l'observateur (ou du système observé) tend vers la vitesse de la lumière, les durées tendent vers l'infini et les longueurs vers zero. Leur variation quantitative se transforme en variation qualitative.

4. *Le principe de l'unité des contraires*

La contradiction relativiste entre simultanéité et non-simultanéité de deux événements, l'égalité et l'inégalité des deux grandeurs, trouve son unité (solution dialectique) dans l'existence de l'intervalle et dans la relativisation correspondante des dimensions.

2. *L'interprétation matérialiste de la métrique en relativité restreinte.*

L'idéalisme philosophique interprète la relativisation des dimensions spatio-temporelles comme un retour à Kant. Les dimensions métriques dépendent de l'observateur ; donc - argumentent les idéalistes, - elles constituent simplement des formes de la connaissance, étant étrangères à la réalité physique. En réalité la relativisation des dimensions est de nature matérialiste.

1) La dépendance des dimensions métriques vis-à-vis de l'observateur n'est point totale, mais subordonnée à l'existence objective de l'intervalle indépendant de l'observation, déterminé par la structure matérielle de la réalité.

2) Le temps et l'espace relativistes sont liés à la vitesse de la lumière (phénomène physique, matériel, dont la constance en constitue le fait fondamental). Le temps et l'espace se déterminent pour chaque observateur de manière que la vitesse de la lumière soit constante. Ce n'est pas le temps et l'espace qui déterminent la vitesse de la lumière, mais inversement.

3) La théorie de la relativité relativise tout mouvement par rapport à la physique classique. Il n'y a pas de répère absolu (espace abstrait ou éther) ; tout mouvement doit être rapporté à un objet (observateur) physique, matériel. (Weyl, 11). La relativisation du mouvement est donc de nature matérialiste.

4) La dépendance des dimensions spatio-temporelles vis-à-vis de l'observateur n'est point dépendante de la structure psychologique de l'observateur (conçue par l'idéalisme en sens apriorique kantien), mais dépendance matérielle de la vitesse de l'observateur (égale à la vitesse de l'objet observé). L'interprétation idéaliste de la théorie restreinte de la relativité, confonde relativisme et subjectivisme (apriorisme).

b. *La matière.*

1. *La conception dialectique de la matière (géométrisation de la matière).*

1) *Le principe de l'interdépendance.*

α) En physique classique la matière ou l'énergie (potentielle ou cinétique) est un simple scalair. En théorie de la relativité, l'énergie se géométrise ; elle devient un tenseur (symétrique) ; comme cas particulier, l'énergie cinétique devient un vecteur à 4 dimensions. Il en résulte :

La relativisation des composantes de l'énergie.

MENDKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET MŰEGYETEM

β) Le caractère limité de cette relativisation résulte de l'existence de l'intervalle (ici l'énergie) totale indépendante de l'observateur (interpénétration du relatif et obsolu).

2. *Le principe de la transformation.* α) Le principe est donné par la dynamisation de l'énergie, par sa relativisation par rapport aux mouvements de l'observateur.

β) Le caractère limité de la relativisation de l'énergie en relativité restreinte résulte ici de l'existence de la loi de la conservation : La transformation de l'énergie se rattache à l'invariance de la quantité totale (interpénétration du relatif et absolu).

3) *Le principe de la transformation des changements quantitatifs en changements qualitatifs.*

L'augmentation de la masse avec la vitesse atteint une singularité (pôle) quand la vitesse tend vers la vitesse de la lumière ; l'augmentation quantitative devient qualitative.

4) *Le principe de l'unité des contraires.*

α) *L'interpénétration des contraires.* La masse ou l'énergie d'un corps peut présenter diverses valeurs ; la contradiction se résout dialectiquement par la relativisation des composantes (=leur dépendance vis-à-vis de l'observateur) et l'invariance de l'énergie totale.

β) *L'évolution par contradictions.* A mesure que l'accélération (la vitesse) augmente la masse augmente aussi (donc résistence antagoniste croissante contre l'accroissement de la vitesse).

2. *L'interprétation matérialiste de l'énergie dans la relativité restreinte (Matérialisation de l'énergie).*

En physique classique, le corpuscule (= matière en sens restreint, sous forme d'électrons ou de protons) et le champ (l'énergie diffuse) ou autrement dit : le discontinu et le continu sont des réalités irréductibles et isolées. La matière est considérée comme rigide, d'une forme bien déterminée (électron ou proton ponctuel ou spérique) encadrée au continu spatial et temporel (l'espace vide de la physique anique et newtonienne, l'éther de la théorie ondulatoire classique, le champ maxwellien électromagnétique). L'énergie maxwellienne du champ était considérée comme expression purement algébrique, immatérielle.

En relativité restreinte, en vertu de la constante universelle c (ou c^2), la masse (matière en sens restreint) et l'énergie diffuse – autrement dit le continu et le discontinu – vont s'homogénéiser. Cette homogénéisation n'élimine point la contradiction continu – discontinu ; elle ne résout ni le problème de l'existence ; ni celui de la persistance relative des noeuds corpusculaires discontinus dans le cadre du champ continu

(Weyl, 11). Mais l'homogénéisation de la masse et de l'énergie va créer le cadre du mouvement (du développement) de ces contraires, leur unité dialectique dans une réalité supérieure qui les dépasse : c'est l'énergie en sens relativiste (= la matière en sens général). L'interpénétration dialectique des contraires : „discontinu" (corp matériel) et „continu" (énergie du champ) basée sur l'interdépendance et la transformation de la quantité en qualité en signifie : la dynamisation du corpuscule matériel (= sa conception dialectique - opposée aux concepts de la „substance" du matérialisme mécanique) et inversement : la matérialisation de l'énergie du champ (= sa conception matérialiste - opposée aux conceptions" énergétiques pures" de l'idéalisme philosophique). Les deux aspects présentent un double sens : métrique (spatio-temporel) et matériel (énergétique). Il résulte ainsi l'interpénétration des deux couples de contraires dialectiques : „métrique" et „énergie", „continu" et „discontinu".

1) *La dynamisation métrique du corpuscule* : la notion : „lieu invariable" du corpuscule matériel perd tout sens. Dans le cas du repos spatiel même, l'électron se meut dans la direction de l'axe (imaginaire) du temps avec la vitesse de la lumière, comme l'onde sur la surface de l'eau (Weyl, 11).

2) *La dynamisation matérielle (énergétique) du corpuscule ;* Le corpuscule est une quantité d'énergie (matière) du champ concentrée, d'une forme relativement stable (Weyl, 11).

3) *La matérialisation métrique du champ* : la loi de la conservation de l'énergie du champ (la composante temporelle de l'énergie cinétique se rattache à la loi de la conservation de l'impulsion (la composante spatielle de l'énergie cinétique). (Weyl, 11).

4. *La matérialisation énergétique du champ* : Toute énergie y compris l'énergie diffuse du champ, a une masse ; elle oppose donc une résistance à chaque changement de la vitesse (Weyl, 11).

En synthèse : l'électron qui apparait en physique classique comme un corps substantiel et rigide plongé en champ vide de substance (matière), devient une région du champ, sans limitation précise, dans laquelle les constantes du champ (et surtout la densité énergétique = matérielle) atteignent des valeurs extrêmement grandes (Weyl, 11). L'électron est en éternel mouvement, dans un éternel échange de matière (énergie) avec le champ : la matière (le corpuscule discontinu) est matière (énergie) du champ concentrée. La conception mécanique de la matière et la conception idéaliste de l'énergie de la physique

classique se remplacent par une conception matérialiste - dialectique ; en particulier une théorie dialectique de la matière et une théorie matérialiste de l'énergie, en comparaison avec la physique classique. La conception énergétique du relativisme n'est point de nature idéaliste, mais de nature matérialiste. Au lieu de la notion „d'énergie", nous pouvons maintenir le terme „matière" (comme réalité objective; comme synthèse du corpuscule discontinu (matière concentrée) et de l'énergie du champ continu (matière diffuse).

c. *Métrique et matière (la matérialisation de la métrique et la géométrisation de la matière).*

1. On a vu que la relativité restreinte signifie un progrès essentiel dans la conception matérialiste-dialectique du temps et de l'espace, de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, par rapport à la physique classique. Les contraires temps et espace s'interpénètrent (dynamisation de l'espace, géométrisation du temps) et trouvent leur unité dans le monde à 4 dimensions. D'une manière semblable l'énergie cinétique (la composante temporelle) et l'énergie potentielle (la composante spatielle) s'unifient dialectiquement en l'énergie totale. Les unités des deux couples de contraires, la métrique (espace + temps) et l'énergie ou la matière (énergie cinétique + potentielle) s'interpénètrent : la métrisation (géométrisation) de matière et la matérialisation de la métrique. Il en résulte l'interpénétration matérialiste-dialectique des deux couples de contraires : espace-temps, métrique-matière.

2. En théorie restreinte de la relativité, l'unité dialectique du temps et de l'espace dans la métrique est une unité véritable (basée sur l'homogénéisation). Au contraire, la synthèse entre métrique et la matière est unité formelle ; la matière devient un tenseur (vecteur), mais pas un tenseur géométrique, mais un tenseur encadré dans le monde géométrique (dans la métrique spatio-temporelle) ; la matière et la métrique restent des qualités hétérogènes (Weyl, 11).

II. La relativité générale.

(Voir en outre, Bachelard 31 et 32, Langevin).

A. *Le temps et l'espace de la relativité générale.*

a. *La méthode dialectique dans l'étude de l'espace et du temps.*

1. *Le principe de l'interdépendance.*

1) La théorie restreinte de la relativité en unifie le temps et l'espace dans une forme quadratique indéfinie, pseudo-euclidienne („espace plan"). La théorie générale unit le temps et l'espace dans une forme

quadratique riemannienne à 4 dimensions (espace courbe) ; elle généralise donc l'interdépendance entre le temps et l'espace.

2) Les notions „temps propre" et „longueur propre" se généralisent en relativité générale ; elles sont indépendantes de l'observateur, absolues.

2. *Le principe de la transformation.*

1) La théorie générale signifie aussi la généralisation de l'interdépendance dynamique de l'espace et du temps. Seulement en cas du champ gravitationel „statique" produit par des masses en repos et invariables, le monde se décompose exactement en temps et espace (disparition des coefficients g_{i0} $(i = 1, 2, 3)$. En cas général, dynamique, apparaissent aussi les termes mixtes „spatio-temporels" $g_{i0}\, dx^i\, dx^0$. L'interpénétration des contraires : „temps" ~ „espace", leur unité dialectique, apparait ici sous une forme généralisée ; les contraires se développent justement dans le cas du monde „statique".

2) L'expansion de l'univers constitue le dernier coup donné à la conception statique (mécanique).

α) En relativité restreinte, le repos spatiel se rattache nécessairement au mouvement dans la direction de l'axe du temps. En théorie de l'expansion, la notion du repos spatiel est éliminée (la dynamisation totale de l'univers !).

β) D'autre part la théorie de l'espace infini et la théorie de l'espace fini constituent les deux étapes antagonistes dans l'évolution cosmologique de la théorie. La conception de l'espace fini, considérée absolument, constitue une théorie idéaliste ; tout espace fini va s'encadrer en espace infini, respectivement en autre espace fini. La limitation a un sens relatif (s'applique à „notre univers") et aucunement absolu (contrairement à la conception idéaliste, qui va encadrer l'espace fini dans le néant métaphysique). La théorie de l'expansion c'est la synthèse dynamique des deux conceptions de l'espace infini et de l'espace (relativement) fini. Il n'y a point de l'infini tout fait, mais il naît de notre fini spatiel, encadré dans un espace d'ordre supérieur et inversement : le fini naît par la contraction de l'infini (la conception dynamique de l'infini).

γ) La théorie de l'expansion de l'univers renverse aussi définitivement la conception statique du champ (gravitationel et électromagnétique). Au lieu des conditions à limite dans l'infini spatiel apparaît la dépendance du potentiel de l'infini temporel ~ l'origine du potentiel dans le passé infiniment lointain (Weyl, 11).

3. *Le principe de la transformation des changements quantitatifs en changements qualitatifs.*

1) *La synthèse qualitative des éléments* apparaît en relativité générale par la généralisation des dimensions réelles et imaginaires, desquelles dérive la différence qualitative entre espace et temps.

2) *La transformation par sauts :* α) l'existence d'une vitesse maximum (la vitesse de la lumière va se généraliser sous la forme de la vitesse f, variable par rapport au lieu).

β) En certains points déterminés, les potentiels présentent des singularités (discontinuités).

4. *Le principe de l'unité des contraires.*

a. *L'interpénétration des contraires :* En relativité générale, l'interpénétration des contraires „espace"-„temps" se généralise par l'homogénéisation de l'espace et du temps, due à la vitesse (variable) f.

b. *L'interprétation matérialiste de l'espace et du temps.*

1. *Le temps et l'espace.* En relativité restreinte la contradiction physique entre temps et espace est fondée sur l'existence d'une vitesse limite, la vitesse de la lumière. Cette interprétation matérialiste va se généraliser pour une forme différentielle riemannienne en chaque point de l'univers. A l'échelle des proportions plus grandes, l'antagonisme entre temps et espace s'efface, en certains conditions déterminées, à la courbure du temps (Langevin).

2. La courbure du temps se présente comme une double synthèse qualitative des éléments : la synthèse intégrale des éléments différentiels ; les phénomènes supérieurs comme synthèse des phénomènes simples.

a_1) Soit s le temps propre, x_0 le temps cosmique, appartenant à un observateur donné O. Une représentation paramétrique de la courbe respective est $x_i = f_i(s)$ Si pour $s_1 \neq s_2$, nous avons $x_0(s_1) = x_0(s_2)$ les événements correspondants aux valeurs s_1 et s_2 ne sont pas simultanés par rapport au paramètre (temps propre) s et sont simultanés pour l'observateur O (temps cosmique x_0). A l'échelle différentielle donc en chaque point de la courbe, le temps est irréversible, a donc un sens univoque orienté, du passé vers le futur, donné par la tangente tracée dans le point respectif. A l'échelle intégrale (donc à l'échelle grande) apparaît la courbure, donc la possibilité de la réversibilité du temps. Le temps propre correspond à l'échelle différentielle, le temps cosmique à l'échelle intégrale. La synthèse qualitative des éléments différentielles d'une courbe par intégration transforme l'irréversibilité en réversibilité.

a_2) En certaines conditions dans lesquelles le temps serait courbe, des éléments physiques élémentaires déterminés (présents ou futurs) peuvent influencer sur le passé (réversibilité du temps). Ce raisonnement ne s'applique plus aux procès physiques (ou biologiques, sociales) complexes, auxquels ne s'appliquent plus des raisonnements purement mathématiques. Pour eux le temps est irréversible. La synthèse des éléments temporels simples, réversibles, en procès complexes, donne un temps irréversible.

Dans le cas de la courbure du temps, la contradiction entre réversibilité et irréversibilité trouve son unité (sa solution), qui la dépasse, en l'invariance générale, relativiste, dans l'indépendance de la métrique totale ds^2 de l'observateur (interpénétration des contraires) La possibilité de la courbure et de la réversibilité du temps mise en évidence par la théorie de la relativité générale est donc de nature dialectique.

2. *L'interdépendance (et la causalité en particulier).* L'interprétation idéaliste de la courbure et de la réversibilité du temps nie toute différence physique entre temps et espace ; elle nie le principe de l'interdépendance et en particulier la causalité (liaison nécessaire et succession en temps entre cause et effet). En réalité la réversibilité du temps conduit aux conclusions purement matérialistes.

1) La différence physique entre temps et espace, leur contradiction, se conserve à l'échelle différentielle (par rapport à l'échelle intégrale) et sur l'échelle des phénomènes supérieurs par rapport aux phénomènes élémentaires déterminés.

2) Le caractère d'irréversibilité ou de la réversibilité du temps, n'est pas à priori, mais à posteriori. Il n'est pas condition, mais conséquence de l'interdépendance physique (matérielle) des objets ; il n'est pas condition, mais conséquence de la causalité physique. Dans le cas d'une courbure suffisamment grande pour permettre la fermeture de la courbe, (donc la réversibilité du temps) les actions futurs pourront ou non influencer les phénomènes du présent, d'après que matériellement cette influence est possible ou impossible, d'après que ces procès s'excluent ou sont compatibles. Ce n'est pas un cadre à priori de l'espace réversible et du temps irréversible qui détermine l'intéraction des objets matériels, mais c'est la réalité matérielle, l'interdépendance réelle des objets matériels qui détermine le cadre spatio-temporel, qui détermine la réversibilité ou l'irréversibilité du temps, d'un cas à l'autre. En opposition avec l'interprétation idéaliste, le principe de l'interdépendance (respectivement le principe de la causalité) est primaire, les

caractères de l'espace et du temps (leur réversibilité ou leur irréversibilité) sont secondaires. C'est justement la théorie générale de la relativité qui nous délivre de la dogme de l'irréversibilité absolue, à priorique du temps ; elle nous conduit à une unité dialectique des contraires : „espace" – „temps" et à une formulation pleinement matérialiste du principe de l'interdépendance.

B. *Matière et métrique en relativité générale.*

a. *La métrique.*

1. *La méthode dialectique et la métrique en relativité générale.*

1) *Le principe de l'interdépendance.*

α_1) La théorie va généraliser la dépendance des coordonnées (dimensions) spatio-temporelles par rapport aux observateurs quelconques (transformations des coordonnées quelconques).

α_2) L'inertie est identique à la gravitation c'est-à-dire liée aux systèmes isolées, mais pourtant due aux masses de l'univers total interdépendance et unité des contraires).

β) *Relatif et absolu.* La généralisation du principe relativiste ne signifie point une relativisation absolue comme elle ne le signifie pas ni en théorie restreinte, mais une relativisation des dimensions dialectiquement enchaînée avec l'invariance :

β_1) avec l'invariance de la forme différentielle fondamentale (l'intervalle ds^2) par rapport à tout observateur (= par rapport à toute transformation des coordonnées).

β_2) avec l'invariance du volume quadridimensionel, par rapport à tout observateur. Nous avons comme en théorie restreinte $dx_1' = h\,dx_1$; $dx_2' = dx_2$, $dx_3' = dx_3$, $dx_0' = \frac{f dx_0}{c}$, ou

$$\frac{1}{h^2} = \frac{f^2}{c^2} = 1 - \frac{2m}{r} + \frac{e^2}{r^2}$$ (potentiel de Schwarzschild-Weyl).

Le volume du parallélépipède infinitésimale dV est invariant en coordonnées cosmiques et propres

$$dV' = dx_1'\,dx_2'\,dx_3'\,dx_0' = dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_0 = dV.$$

2) *Le principe de la transformation.*

α_1) Cette interdépendance est dynamique, liée à la vitesse de l'observateur.

α_2) Comme géométrie riemannienne (infinitésimale) du monde physique, la théorie de la relativité générale est fondée sur la notion

de limite, sur l'infiniment petit. L'infiniment petit, par sa définition mathématique même, n'est pas un objet unique, statique mais la suite même des objets (quantités) qui tendent vers zéro, sans être finies, sans être nulles. La notion de l'objet-suite, la notion dynamique de l'infiniment petit est donc d'essence dialectique (dynamique), unité et interpénétration des contraires. Au point de vue géométrique, en tout point $P(x_i)$, les potentiels $g_{ik}(x_i)$ sont des constantes (quoique variables d'un point à l'autre). En chaque point P on peut considérer un „espace-tangent" au monde riemannien considéré. Dans cet espace tangent est valable une géométrie centro-affine (euclidienne ou pseudoeuclidienne) à coordonnées différentielles affines dx_i et l'origine P. La géométrie riemannienne, c'est la géométrie de ces espaces tangents liés entre eux. Toute transformation des coordonnées dans l'espace riemannien de base, va générer une transformation affine linéaire dans l'espace tangent correspondant. L'introduction de l'infiniment petit comme fondement de la géométrie et de la physique, l'adoption d'une géométrie riemannienne (de l'espace courbe) signifie la généralisation du principe de la transformation, en physique.

β) L'absolu se manifeste par l'existence d'une constante universelle c, qui ne représente plus la vitesse de la lumière, mais la limite de cette vitesse (f), pour certains points déterminés du continu spatio-temporel.

En analogie avec la théorie restreinte, la théorie générale ne signifie donc aucune relativisation absolue, mais une relativisation relative, interpénétration dialectique de la relativité et de l'invariance des lois de la nature par rapport aux transformations des coordonnées. Au point de vue dialectique, l'invariance apparaît comme l'unité des quantités variables et relatives ; au point de vue matérialiste, l'invariance des lois physiques et surtout de la forme fondamentale ds^2 est primaire.

3) *Le principe de la transformation des changements quantitatifs en changements qualitatifs* par sauts (discontinues) est mise en évidence en relativité générale :

α) Par l'existence d'une vitesse maximum (de la constante c).

β) par l'existence des singularités du potentiel (pour $r = 0$ et pour la surface de l'électron), singularités où cessent les lois relativistes (les équations gravitationnelles et électromagnétiques habituelles) (Weyl, 11, Einstein et Infeld).

γ) Par l'existence d'une constante cosmique (= le rayon de notre supergalaxie) qui apparaît dans toutes les théories (indépendant de leur position vis-à-vis au problème de l'espace fini ou infini).

δ) Par l'existence de l'infini temporel (l'expansion de l'univers).

4) *Le principe de l'unité des contraires.*

Les contradictions entre „simultané", „non-simultané", „égal", „inégal", comme aussi leur synthèse (la relativisation des coordonnées par rapport avec l'observateur et l'invariance de l'intervalle ds^2) de la théorie restreinte vont se généraliser en relativité générale.

2. *L'interprétation matérialiste de la métrique en relativité générale.*

1) L'aspect matérialiste de la théorie générale relativiste est fondé :

α) Sur l'invariance de l'intervalle ds^2, indépendant de l'observateur, dépendant de la structure matérielle de la réalité,

β) sur l'existence d'une vitesse constante c, primaire par rapport au cadre spatio-temporel,

γ) sur l'existence d'une vitesse maximum f,

δ) sur la relativité générale du mouvement. En relativité restreinte n'a pas de sens que le mouvement relatif des deux corps matériels. En relativité générale n'a pas de sens que le mouvement d'un corp par rapport à la totalité de l'univers matériel. Quiconque soit le mouvement relatif de deux corps, on peut toujours trouver un système des coordonnées, par rapport auquel ils soient en repos (Weyl, 11).

2) L'interprétation matérialiste-dialectique de la théorie se dirige contre la phénoménologie de Husserl et de Weyl, variantes de l'idéalisme. La phénoménologie considère le temps comme une forme de la conscience, l'espace comme une forme de la réalité objective. La relativité générale reconnaît par contre :

α) le temps et l'espace comme réalités physiques ;

β) plus encore : le temps et son irréversibilité (autant qu'elle existe) apparaît – en vertu de sont caractère dynamique – comme une réalité physique plus profonde que l'espace, qui est en plus grande mesure géométrique.

3) L'interprétation matérialiste-dialectique de la théorie générale relativiste se dirige contre le conventionalisme (Poincaré), contre l'école sémantique de Vienne (Carnap, etc.), contre l'axiomatique idéaliste.

Les axiomes de la géométrie ne sont point des conventions, ni des artifices linguistiques. Les différentes géométries, fondées chacune sur un système d'axiomes ne constituent point des systèmes indépendantes et arbitraires, qui conviendraient également bien à la réalité. Au contraire :

α) En relativité générale, la géométrie euclidienne et la géométrie riemannienne ne sont pas équivalentes. Dans le monde physique est valable la géométrie riemannienne. Par rapport à un choix déterminé du système des coordonnées, les coefficients (potentiels) g_{ik} de la forme fondamentale ds^2 peuvent paraître, il est vrai, comme déformations (corrections) d'une métrique euclidienne de base, fondée sur les différentielles dx_i. Mais, vu le choix arbitraire du système de coordonnées, fondé sur l'invariance de $ds^2 = g_{ik}(x_i)\, dx^i\, dx^k = g'_{ik}(x'_i)\, dx'^i\, dx^k$, il existe une infinité de déformations (correctifs) de la métrique euclidienne et donc une infinité de telles métriques euclidiennes, définies par les différentielles dx_i. L'interprétation riemannienne de la relativité générale est privé de ce caractère arbitraire de l'interprétation euclidienne (Weyl, 11).

β) D'autre part, les différents systèmes d'axiomes se subordonnent à un système plus général (Bachelard, 31). Il y a une correspondance entre les différents systèmes. Il y a des modèles, du type du modèle de Klein, qui traduisent la géométrie non-euclidienne en celle euclidienne. En réalité, tous les systèmes d'axiomes constituent une abstraction et une généralisation de la réalité matérielle.

b) La matière.

1. *La méthode dialectique et l'énergie en relativité générale (la géométrisation de l'énergie).*

1) *Le principe de l'interdépendance.*

En physique classique, la masse (l'énergie) totale (resp. cinétique) est un scalair. En relativité restreinte, elle devient un tenseur (resp. vecteur) de composantes variables par rapport à l'observateur ; l'énergie totale (l'énergie de repos) de l'électron est un nombre constant. En relativité générale, cette interprétation relativiste, fondée sur l'interdépendance et la dynamisation, va se généraliser.

2) *Le principe de la transformation.*

α_1) La variation de la masse par rapport à l'observateur donne $m' = mt / \sqrt{t^2 - v^2}$; au lieu de la constante c de la théorie restreinte, apparaît la variable t.

α_2) L'introduction de la masse généralisée $M = m - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{r}$ fonction de point (Weyl, 11) au lieu de m, et l'interprétation de la masse gravitationelle comme un flux du champ, va généraliser la conception dynamique du monde physique.

β) La relativisation des composantes de l'énergie n'est pas absolue,

illimitée ; elle se rattache à l'existence de l'énergie totale, à la constante m et d'autre part à la loi de la conservation de l'énergie. D'une façon plus générale : la relativisation des composantes des diverses grandeurs physiques se rattache dialectiquement à l'invariance des lois de la nature, par rapport à tout observateur, par rapport à tout système des coordonnées (interpénétration dialectique de le relativité et de l'invariance).

3) *Le principe de la transformation des changements quantitatifs en changements qualitatifs.*

α) *La synthèse qualitative des éléments.* α_1) La relativité générale va généraliser les résultats de la théorie restreinte ; elle vient géométriser l'énergie. Le caractère géométrique des composantes énergétiques se transforme en caractère physique, matériel. 1^0. L'énergie électromagnétique va se géométriser : la loi de conservation est l'expression *physique* de l'invariance *géométrique* des équations gravitationnelles par rapport à toute transformation de coordonnées (Weyl, 11). 2^0. La géométrisation de l'énergie d'expansion : celui-ci est une conséquence de l'existence d'un monde hyperbolique de de Sitter (temps-espace). 3^0. La géométrisation des forces gravitationnelles et de la densité de l'énergie gravitationnelle t_i^k : elles sont purement géométriques (apparentes) dans un point fixe (à l'échelle différentielle) mais physiques dans une région (à l'échelle intégrale) (Weyl, 11).

α_2) *Contre l'interprétation idéaliste :* 1^0. La géométrisation de l'énergie electro-magnétique en signifie céci : l'invariance et la loi de conservation traduisent le même fait matériel.

2^0. La géométrisation de l'énergie d'expansion ne signifie l'existence d'un monde vide de matière, mais au contraire, l'unité indissoluble du temps-espace d'une part et de la matière d'autre part. L'univers vide de matière de de Sitter, est une abstraction, un cas limite. 3^0. En ce que concerne la géométrisation de l'énergie gravitationnelle : au point de vue mathématique, l'intégrale est la synhèse qualitative des éléments différentiels (Engels). Mais du point de vue physique, les éléments différentiels (et les densités t_i^k) n'ont pas d'existence indépendante, mais un degré de realité plus réduit que l'entier (le domaine spatial et l'intégrale énergétique correspondante). Ce n'est point l'entier, qui du point de vue physique suppose les éléments différentiels, mais les éléments différentiels qui supposent l'existence matérielle de l'entier.

Plus encore, la structure physique de l'entier n'est pas une structure continue, fondée sur les éléments différentiels, mais structure discontinue (quantique).

β) *La transformation discontinue* se manifeste en théorie générale de l'énergie par trois faits :

β_1) la valeur infinie vers laquelle tend la masse quand la vitesse spatielle v tend vers I (vitesse de la lumière).

β_2) la singularité énergétique correspondante au centre de l'électron où la densité énergétique de l'électron devient infinie (Weyl, 11).

β_3) la singularité spatielle et temporelle et la singularité de l'énergie cinétique, qui augmente pour toute particule, avec l'expansion de l'univers.

4) *Le principe de l'unité des contraires.*

α) *L'interpénétration des contraires :* La contradiction entre l'égalité et l'inégalité de deux énergies (impulsions), se résout par la relativisation, par leur dépendance de l'observateur (système de coordonnées), basée sur l'invariance relativiste générale.

β) *L'évolution par contradictions :* la théorie générale va mettre en évidence l'augmentation de la masse (de la résistence contre la force accélératrice) à la fois avec la vitesse.

2. *L'interprétation matérialiste de l'énergie en relativité générale (La matérialisation de l'énergie).*

L'interpénétration réciproque du continu et du discontinu (champ et corpuscule, autrement dit énergie concentrée et énergie diffuse), mise en évidence en théorie restreinte, s'élargie en relativité générale.

1) *Sur l'échelle spatielle :* α) l'existence de la masse généralisée statique $M = m - \frac{e^2}{2r}$, qui remplit tout l'espace (= tout le champ gravitationel) avec une singularité dans le centre de l'électron (Weyl), signifie : la matérialisation du champ, la dynamisation des corpuscules. Les deux tendances se développent autant sur l'échelle métrique (spatio-temporel), que sur l'échelle énergétique (matérielle). Cela signifie l'interpénétration dialectique des deux couples de contraires : „continu" – „discontinu", „métrique" – „matière".

α_1) La matérialisation métrique du champ : le champ peut-être considéré délimité par le rayon classique de l'électron $a = \frac{e^2}{2m}$, qui renferme la masse généralisée $M = 0$ (Weyl, 11, ed. IV et V).

α_2) La matérialisation énergétique du champ : le champ gravitationel a une singularité (discontinuité) dans le centre de l'électron, qui constitue justement l'essence du corpuscule matériel (Weyl, 11).

α_3) La dynamisation métrique du corpuscule : la délimitation du corpuscule par le rayon classique de l'électron est relative ; en réalité l'électron remplit tout l'espace (Weyl, 11).

α_4) La dynamisation énergétique du corpuscule : la délimitation entre l'énergie (la masse) intérieure et extérieure est relative ; les masses de l'intérieur et de l'extérieur du rayon a, s'enchaînent en remplissant l'espace tout entier (Weyl, 11) ; la masse m est la valeur limite de $M = m - \frac{e^2}{r^2}$ pour $r \to \infty$ (Weyl).

β) En théorie classique apparaissent deux interprétations de la discontinuité interpénétré par la continuité, autrement dit deux interprétations du corpuscule et du champ, deux interprétations de l'intérieur et de l'extérieur de l'électron (séparés par le rayon a). β_1) L'interprétation de Mie (31) ne reconnaît aucune différence fondamentale, entre l'intérieur et l'extérieur : la matière c'est une singularité de l'énergie diffuse (du champ T_{ik}) même. Les lois relativistes sont valables partout („physique pure du champ") (Mie). β_2) En théorie de Weyl, (11), et d'Einstein, pour l'intérieur et l'extérieur de l'électron sont valables des lois diamétralement opposées ; la matière est une singularité au-delà de la réalité du champ, la matière va déterminer le champ d'une manière en quelque sorte transcendente ; la matière est une réalité au-delà même du temps et de l'espace riemannien. La conception de Mie, implique des tendances monistes et idéalistes (la conception du continu pur), la conception de Weyl implique des tendances dualistes et mécaniques (la conception du discontinu absolu).

2) *Sur l'échelle temporelle :* l'interpénétration du continu et du discontinu résulte de l'expansion de l'univers : le rayon spatial et l'énergie cinétique augmentent : au moins le rayon spatial tend vers l'infini, à la fois avec le temps.

Il résulte la dynamisation de la matière et la matérialisation de l'énergie diffuse, d'une manière analogue à la réalité spatialle.

c. *La synthèse de la matière et de la métrique en relativité générale.*

La théorie générale de la relativité va réaliser la synthèse dialectique des contraires : „métrique" (temps-espace) et „matière" (énergie), synthèse qui tend vers une véritable unité dialectique d'un point de vue mathématique ; à savoir : 1. synthèse géométrique réalisée par les potentiels gravitationels de ds^2 2. synthèse algébrique réalisée par la grandeur d'action.

1. *La synthèse géométrique* de la métrique et de la matière réalisée par les potentiels gravifiques. Les coefficients différentiels g_{ik} de la métrique riemannienne ds^2 et les potentiels gravitationels produits par la matière vont s'unifier dans la réalité du champ gravitationel. Nous avons interdépendance entre la matière et la variation du champ gravifique ; la matière est facteur primaire du champ

gravitationel, céci facteur secondaire du mouvement matériel, à la fois effet et cause de la variation de la densité de la matière. L'interdépendance en signifie l'interpénétration des contraires, donc la dynamisation (physicalisation) des coefficients différentiels g_{ik} et la spatialisation (géométrisation) du potentiel gravitationel.

1) Dans l'histoire de la physique relativiste, l'interprétation de la synthèse a été double.

α) Les théories d'Einstein et de Weyl sont dualistes et mécaniques. Elles considèrent les égalités gravitationnelles $G_{ik} = - T_{ik}$ comme des équations ; la matière (= la densité énergétique T_{ik}) et la métrique ($= G_{ik}$ resp. R_{ik} ou g_{ik}) seront réellement distinctes, en quelque sorte transcendentes. La matière serait réalité physique, la métrique son cadre géométrique ; les deux réalités opposées entrent en interdépendance – la synthèse en est le champ. La matière même reste une singularité physique au-delà du champ (Weyl) ; d'une manière analogue, l'espace serait une singularité géométrique, support passif du champ. Le champ (effet et cause du mouvement de la matière) serait géométrisé et dynamisé ; mais la matière et la métrique spatielle elles mêmes, restent des réalités irréductibles. Les relations

$$\frac{\delta T_{ik}}{\delta x^k} - \frac{\delta g_{rs}}{\delta x^i} T^{rs} = 0$$

seront une véritable loi de la conservation de l'énergie T_{ik} ; les relations correspondantes pour G_i^k au contraire des simples identités géométriques.

β) En opposition aux théories d'Einstein et de Weyl, la théorie d'Eddington (15) implique des tendances idéalistes ; elle est monisme absolu aux tendances idéalistes. L'énergie ou la matière ($=$ la densité énergétique T_{ik}) serait *définie* par les relations gravitationnelles $G_{ik} = - T_{ik}$, qui deviennent ainsi des simples identités.

La matière serait purement géométrique (spatio-temporelle), sa densité serait l'expression de la courbure métrique de l'univers réduit au monde quadridimensionel espace-temps.

Les identités de conservation en T_{ik} et G_{ik} seront équivalentes. La conservation du tenseur T_{ik} ne serait pas une conséquence de l'existence de la matière, mais inversement, la matière serait *définie* par un tenseur géométrique à divergence nulle, donc par le tenseur $- G_{ik}$.

2) Toutes deux théories ne sont pas conséquentes. α) Weyl présente en fond une conception idéaliste de l'espace : il distingue la nature de la métrique de son „orientation". (Weyl, 11, ed. V). La nature de la métrique serait partout la même : expression de la pos-

sibilité de représenter en *tout point* (fixe) la métrique riemannienne comme une somme pseudoeuclidienne de carrés différentiels. Cette unité serait à priorique en sens kantien. L'orientation de la métrique (= choix du système des coordonnées nécessaire pour cette réduction à une somme de carrés) (et donc les coefficients g_{ik}) dépenderait de la matière. Il en résulte une opposition nette, irréductible entre les „quantités" (de nature matérielle, représentées par des densités tensorielles : T_{ik} et densité électrique s^i) et les „intensités" (de nature métrique, représentées par des tenseurs : les grandeurs du champ g_{ik} et φ_i). b) D'une autre part, la théorie unitaire d'Eddington (voir III) introduit un dualisme fondamental entre la géométrie du champ et la géométrie de la matière.

2. *La synthèse algébrique (l'action).*

En physique classique, l'action constitue une quantité algébrique statique (produit de deux scalaires : énergie et temps ou impulsion et longueur). En relativité, il en résulte une synthèse algébrique dynamique :

1) La densité de l'action (L) devient une fonction des coordonnées en espace-temps (la dynamisation de l'action) (Weyl, 11).

2) La densité de l'action est une fonction universelle par laquelle on peut déterminer les quantités (les densités énergétiques et électriques) comme des fonctions des intensités du champ (gravitationel et électromagnétique) (Mie, 31). Il en résulte une nouvelle définition de l'énergie (de la matière) par rapport aux potentiels g_{ik}, comme aussi une nouvelle définition de l'électricité, par rapport aux potentiels φ_i (Weyl, 11).

Cette liaison entre matière et métrique, établie par la densité de l'action L, est une synthèse purement algébrique ; les deux contraires restent des réalités distinctes quoique fonctionnellement liées par L.

3) Le principe de Hamilton (de l'action minimum) apparaît comme la base des lois physiques (des équations du champ, des équations de la conservation). (Weyl, 11).

III. Les théories unitaires classiques.

(Voir : Weyl 11, Eddington 15, Kaluza 14, Klein 16, Einstein 17, Veblen 20, Vrânceanu 34)

A. *Le temps et l'espace en physique unitaire classique.*

a) *La méthode dialectique et le problème espace-temps en théorie unitaire.*

Les théories unitaires du champ étant des théories relativistes englo-

bant la théorie générale de la relativité sont capables de généraliser touts les résultats de celle-ci. L'interdépendance entre temps et espace, l'unité des contraires réel-imaginaire comme synthèse qualitative temps-espace, l'interpénétration des contraires „temps" ~ „espace" (la dynamisation de l'espace et la géométrisation du temps), se transposent en théorie unitaire. Mais un fait capital : les principes dialectiques s'appliquent à la forme quadratique $ds^2 = g_{iu}\, dx^i\, dx^u$ comme à la *forme linéaire* $d\varphi = \varphi_i\, dx^i$ (11, 15, 20).

b. *L'interprétation matérialiste de l'espace et du temps en physique unitaire.*

Les théories unitaires classiques, en continuant la théorie de la relativité, vont mettre en évidence le caractère prédominant physique du temps et le caractère prédominant géométrique de l'espace (contradiction qui se trouve dépasée en univers quadridimensionel, par la géométrisation du temps et la dynamisation de l'espace). En théorie relativiste, le caractère physique fondamental du temps (fondement de la conception dynamique de l'univers) apparait dans l'existence de la vitesse maximum (temporelle) ; la vitesse cosmique u est toujours un vecteur temporel ($u^2 = v^2 - e^2 < 0$). Les théories unitaires approfondissent cette interprétation dynamique, par rapport au caractère relativement statique de l'espace. Cette interprétation matérialiste de l'antagonisme „espace" ~ „temps" résulte dans les théories unitaires (v. Weyl 11) à deux façons :

1. La définition de la charge électrique par l'intégrale $e_0 = \iiint \varrho^0\, dv$, étendue sur la densité électrique „électrostatique" (la composante *temporelle* ϱ^0 de la densité électrique ϱ) dans un domaine fini.

2. La réduction, en cas statique, de la forme linéaire $d\varphi$, à $d\varphi = \varphi_0\, dt$, φ_0 étant le potentiel élecrostatique = „composante *temporelle*" du potentiel.

B. *La matière (l'électricité) et la métrique en physique unitaire.*

La synthèse dialectique-matérialiste de l'électricité (charge électrique ϱ^0) et de la métrique, réalisé en théorie unitaire, correspond à la synthèse relativiste de l'énergie (T_{ik}) et de la métrique. L'électricité et l'énergie sont deux aspects de la matière. La synthèse électricité-métrique signifie donc le perfectionnement de la synthèse matière-métrique réalisé en relativité générale. Elle est réalisée en théories uni-

taires par deux chemins : la synthèse géométrique (le potentiel électromagnétique), la synthèse algébrique (l'action). Cette synthèse réalisée en théorie unitaire tend vers une véritable unité dialectique des contraires matière-métrique.

a. *Le potentiel électromagnétique.*

1. Les théories unitaires du champ signifient l'unification géométrique des coefficients géométriques φ_i de la forme linéaire $d\varphi$ et du potentiel électromagnétique, dans une seule théorie. Il en résulte : l'invariance des équations électromagnétiques par rapport aux changements de l'étalon (Weyl, 11, Eddington, 15, Veblen, 20), Cette invariance et la lois de la conservation de l'électricité en constituent l'aspect géométrique et physique de la même loi (Weyl, 11). L'interpénétration des deux contraires en signifie : la matérialisation (physicalisation) des coefficients géométriques φ_i et la spatialisation (géométrisation) du potentiel électromagnétique. Les théories unitaires du champ impliquent donc une explication matérialiste-dialectique.

2. Les tendances antagonistes, l'interprétation dualiste-mécanique (Weyl, Einstein) et l'interprétation moniste-idéaliste (Eddington) de la théorie relativiste générale s'opposent aussi dans le cadre des théories unitaires.

3. Indépendamment de l'interprétation, il y a une différence de fond entre les synthèses réalisées par la relativité générale et les théories unitaires. Dans les formules de la géométrie relativiste, à l'énergie (T_{ik}) ne correspond pas une dimension à part. La synthèse relativiste de l'énergie et de la métrique ne concerne pas les différentielles dx^i ni l'énergie T_{ik} elle-même, mais seulement les coefficients g_{ik}. Au contraire, dans la plupart des théories unitaires (Kaluza, 14, Einstein 17, Veblen, 20) l'électricité correspond à une dimension (véritable ou fictive) x^4, dont la différentielle est dx^4.

2. *L'action.*

La synthèse algébrique des potentiels φ_i et de la densité électrique ϱ^i, est réalisée par la densité de l'action. Le principe de Hamilton est la base des lois électromagnétiques maxwelliennes du champ et des lois de la conservation de l'électricité, comme aussi des équations gravitationnelles et des lois de la conservation de l'énergie correspondantes. En théorie générale de la relativité, comme aussi en théorie unitaire classique du champ, cette synthèse est de nature purement algébrique, formelle ; elle n'est pas encore une véritable unité.

C. *La gravitation et l'électromagnétisme.*

a. *Coordonnées et étalon (la méthode dialectique).*

1. Le principe de l'interdépendance.

En physique classique, la longueur est relative ; toute longueur suppose une unité de mesure. Seulement le rapport de deux longueurs a un sens physique donc interdépendance. Les théories géométriques posées à la base des théories unitaires du champ, vont établir une interdépendance indissoluble entre :

1) l'étalon et le système de coordonnées (variable d'étalon=cinquième coordonnée).

2) l'étalon et l'hyperplan à l'infini (Veblen, 20).

2. *Le principe de transformation* s'approfondit par :

1) α) la variabilité de la longueur, correspondante à la forme linéaire (11, 15, 20) $d\varphi$ (= la dépendance de la longueur de la position spatio-temporelle de l'observateur - Weyl - ou même de la direction choisi - Eddington).

β) Le remplacement pour la matière de la notion de déplacement parallèle infinitésimal congruent lié à l'inertie, par la notion dynamique de „l'adaptation". En particulier, l'adaptation de la longueur aux grandeurs cosmologiques (le „rayon" de la supergalaxie) (Weyl 11 éd. V, Pauli 12, Eddington 15).

γ) La représentation de la transformation de l'étalon, comme transformation de coordonnées (Veblen 20).

2) *Relatif et absolu.*

La relativisation de la notion de longueur, intervenue dans ces théories géométriques, n'est pas absolue, mais à son tour relative : relativisation dialectiquement interpénétrée avec l'invariance. Ce fait résulte de trois causes :

α) L'invariance de la forme $d\varphi$, comme aussi de la forme ds^2 par rapport aux transformations de l'étalon et des coordonnées (invariance sur la base de la variation).

β) L'existence en chaque point d'un étalon unitaire, mais variable, dépendant de la courbure scalaire (unité en pluralité ; l'absolu sur la base du relatif). (Weyl 11, Eddington 15, Veblen 20).

γ) L'invariance du rapport entre une longueur donnée et le rayon correspondant de la supergalaxie (invariance réalisée par des modifications simultanées = adaptation dynamique) : invariance sur la base de la variation (11 éd. V, 12, 15).

3. Le principe de la transformation des changements quantitatifs en changements qualitatifs.

Les géométries posées à la base des théories unitaires vont mettre en évidence la synthèse qualitative des éléments, à savoir :

1) l'invariance par rapport à l'étalon devient loi de la conservation d'électricité ;

2) l'opposition entre géométrie euclidienne et cayléyenne se transforme pour l'espace tangentiel, en opposition physique (univers purement gravitationel - univers gravitationel - électromagnétique), (Veblen 20) ;

3) l'invariance de l'action maxwellienne par rapport à l'étalon se transforme en limitation du nombre des dimensions (à 4). (Weyl, 11).

4. Le principe de l'unité des contraires.

1) Les contraires „étalon" et „coordonnées" trouvent leur synthèse dans chacun des systèmes géométriques posées à la base des théories unitaires : l'espace métrique de Weyl, l'univers à 5 dimensions de Kaluza-Einstein, les coordonnées projectives (homogènes) de Veblen.

L'interpénétration de ces contraires signifie : l'unification de l'étalon et du système de coordonnées, c'est-à-dire la représentation de l'étalon dans le cadre du système des coordonnées, la représentation du système des coordonnées par l'intermédiaire des quantités qui dépendent de l'étalon. Cette interpénétration se réalise autant pour les coefficients (g_{ik} et φ_i) que pour les dimensions (les coordonnées x_i et la variable étalon x_4). A savoir :

α) L'interpénétration (l'homogénéisation) des coefficients. Dans toutes les théories unitaires classiques, φ_i devient une composante du champ g_{ik}. Ainsi : la composition de la connexion affine de Weyl, d'un terme $\Gamma_{r,ik}$ et d'un autre en φ_i, la composition du tenseur g_{ik} de Kaluza ; la composition du tenseur $g_{rs} = \gamma_{rs} - \varphi_r \varphi_s$ de Veblen,

β) L'interpénétration (l'homogénéisation) des coordonnées x_i ($i = 1, 2, 3, 0$) et x^4 est réalisée par l'existence de deux formes différentielles, chez Weyl, par leur union dans uneseule forme quadratique chez Kaluza, par le double aspect de la forme ds^2 chez Veblen.

2) La synthèse est en quelque sorte extérieure chez Weyl et Eddington (synthèse des champs, mais non pas des dimensions), devient une synthèse intérieure chez Kaluza et conduit à l'unité et

l'interpénétration complète des deux contraires, dans les théories d'Einstein et de Veblen. Nous constatons non seulement une convergence vers les mêmes formules, de toutes les théories unitaires qui trouvent leur synthèse dans la théorie de Veblen, mais aussi l'approfondissement du procès dialectique d'interpénétration des contraires 1) l'étalon-électromagnétisme et 2) système de coordonnées-gravitation dans l'évolution historique des théories.

3) La synthèse des contraires n'anéantit pas leur opposition mais crée le cadre de leur mouvement (développement): la décomposition de l'univers de 5 variables en variable - étalon (la variable électromagnétique et les quatre coordonnées (variables gravitationnelles), semblablement à la décomposition de l'univers relativiste en temps et espace.

b. *La gravitation et l'électromagnétisme (l'interprétation matérialiste).*

1. Nous venons d'établir que les théories unitaires classiques tendent à réaliser l'unité dialectique (l'interpénétration) sur le plan mathématique des contraires étalon-système de coordonnées. D'autre part, l'interpénétration (l'unité matérialiste-dialectique) des contraires φ_i (coefficients géométriques de la forme $d\varphi$) et potentiels électromagnétiques (coefficients physiques, matériels). L'interpénétration (l'unité matérialiste-dialectique) des deux couples de contraires signifie l'interpénétration de la gravitation et de l'électromagnétisme. Elle signifie l'aspect physique de l'unité géométrique entre étalon et système de coordonnées. Elle se réalise par l'homogénéisation du champ gravitationel et électromagnétique ; en chaque théorie unitaire, le champ électromagnétique devient une composante du champ gravitationel.

2. En théorie générale de la relativité, le champ gravitationel est surtout la nature géométrique-au moins considéré en chaque point à part ; les forces gravitationnelles sont dans ce sens „apparentes". Au contraire, le champ électromagnétique a surtout un sens physique ; il apparaît dans la relativité générale comme un univers physique encadré à l'univers géométrique et les forces électromagnétiques comme les seules forces élémentaires qui s'opposent à la gravitation (à l'inertie). Elles sont „réelles", en opposition à celles gravitationnelles en 2 sens (Weyl, 11): 1) La charge électrique („la masse électrique") n'est pas identique avec la masse inerte. 2) Le champ électromagnétique F_{ik} ne peut être annulé dans un point donné, par aucun choix du système des coordonnées. Le caractère physique du champ électroma-

gnétique va s'accentuer en théorie unitaire : 1) Par le remplacement de la charge électrique constante, par un champ scalaire variable avec le rayon vecteur (en remplissant tout l'espace). 2) Par perte de charge électrique (analogue à la perte de la masse gravitationnelle d'une étoile) que souffre le corp chargé (Weyl 11, éd. V). L'interpénétration des deux contraires (gravitation et électromagnétisme) est réalisée, en théorie unitaire classique, pour les potentiels (g_{ik} ou φ_i) et pour les dimensions correspondantes (étalon et coordonnées). Mais elle n'est point réalisée pour la matière, qui continue à garder un aspect dualiste : l'énergie T_{ik} d'une part, la charge électrique ϱ^i d'autre part.

3. L'interpénétration et l'unité entre gravitation et électromagnétisme en signifie la géométrisation du champ électromagnétique, la physicalisation du champ gravitationel. La première représente l'aspect dialectique, la deuxième l'aspect matérialiste des théories unitaires. En chaque théorie unitaire, le champ gravitationel se modifie sous l'influence physique du champ électromagnétique. En tout potentiel gravitationel, apparaissent des termes complémentaires, électriques.

4. L'inconséquence, du point de vue matérialiste, des théories unitaires classiques, apparaît dans le caractère en quelque sorte fictif de l'électromagnétisme (du monde à 5 dimensions) englobé à l'univers gravitationel (à 4 dimensions). Nous citons : 1) la séparation nette des deux formes différentielles ds^2, $d\varphi$ chez Weyl ; 2) le caractère cylindrique de l'univers de Kaluza (l'indépendance des potentiels g_{ik} par rapport à x_4) ; 3) le caractère fictif de la représentation à 5 dimensions du monde d'Einstein et de Veblen ; 4) la disparition de la variable étalon x_4 et des potentiels correspondants, par la réduction de la forme fondamentale ds^2 à $ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$ ($i, k = 0, 1, 2, 3$ chez Veblen.

5. L'inconséquence dialectique des certaines théories unitaires classiques du champ en résulte du dualisme entre la géométrie du champ (du continu) et la géométrie de la matière, en théories de Weyl (11, éd. V) et d'Eddington (15). Celle-là est fondée sur le déplacement infinitésimal parallèle de la géométrie infinitésimale généralisée (conservation par inertie). Celle-ci (c'est donc la géométrie de nos instruments de mesure aussi) est fondée sur l'adaptation dynamique, renouvellée à chaque instant, par rapport au rayon de la supergalaxie (opposition entre „géométrie cosmique" et „géométrie naturelle"). La géométrie du champ (géométrie cosmique) reste donc d'un caractère pur fictif ; c'est donc le cas pour la forme linéaire $d\varphi$ aussi.

DEUXIÈME SECTION :
LA PHYSIQUE D'ACTION

I. L'algèbre abstrait d'action

(Le groupe abstrait diédrique G_{12})

A. *Le groupe abstrait* I_6.

En physique d'action, le groupe abstrait diédrique sextique G_{12} à éléments g_τ est le groupe fondamental ; il est le produit direct des groupes abstraits cycliques I_3, I_2^p et I_2. Le produit direct $I_3 I_2^p = I_6$ est le groupe abstrait diédrique cubique I_6. Pour la théorie des groupes abstraits, voir surtout les oeuvres *1*, *2*, *3*, de l'index bibliographique.

a. *Le groupe I_6 comme tel.*

1. *Définitions.*

Le groupe abstrait diédrique cubique I_6 à éléments g_s (g_1 étant l'élément identité), est défini par les axiomes

$$(1) \qquad g_2^2 = g_6^2 = g_1\,, \quad g_3 = g_2 g_6\,, \quad g_5 = g_6 g_2\,, \quad g_4 = g_2 g_6 g_2\,.$$

2. *Multiplication.*

1⁰. *Matrice des produits.* La matrice des produits $g_s g_r = g_{s_r}$ (s = index de la ligne, r = index de la colonne) est

(1′)

	g_1	g_3	g_5	g_6	g_4	g_2
g_1	g_1	g_3	g_5	g_6	g_4	g_2
g_3	g_3	g_5	g_1	g_2	g_6	g_4
g_5	g_5	g_1	g_3	g_4	g_2	g_6
g_6	g_6	g_4	g_2	g_1	g_3	g_5
g_4	g_4	g_2	g_6	g_5	g_1	g_3
g_2	g_2	g_6	g_4	g_3	g_5	g_1

2⁰. *Produits divers.* Commutativité. Les éléments g_i sont commutatifs, les éléments g_p sont noncommutatifs entre eux et avec les g_i (i = impair, p = pair) (voir *NI*).

Indices du produit. L'index du produit et la somme des indices des facteurs sont de parité opposée, car

$$g_i g_{i'} = g_p g_{p'} = g_{i''}\,, \quad g_p g_i = g_{i'} g_p = g_{p'}\,.$$

Puissances : $g_i^3 = g_1$, $g_p^2 = g_1$. Les éléments $g_{3,5}$ sont de troisième ordre, g_p de deuxième ordre, g_1 d'ordre un.

Inverses : $g_i^{-1} = g_i^2$ ($g_3^2 = g_3^{-1} = g_5$, $g_5^2 = g_5^{-1} = g_3$), $g_p^{-1} = g_p$.

Transformées. Les transformées par g_s des g_1, g_i ($i = 3, 5$), g_p donnent les complexes :

$$I_1 = g_1 , \quad I_1' = g_3 + g_5 , \quad I_3' = \Sigma g_p . \tag{2}$$

La transformation conserve la parité des indices et les trois classes des éléments conjuguées.

Eléments générateurs. Les deux éléments générateurs ont des indices pairs, arbitraires ; soit g_p, $g_{p'}$. Donc

$$g_1 = g_p^2 = g_{p'}^2 , \quad g_3 = g_p g_{p'} , \quad g_5 = g_p g_p ,$$

$$g_{p''} = g_p g_{p'} g_p = g_{p'} g_p g_{p'} \qquad (p \neq p' \neq p'')$$

3. *Représentation du groupe I_6.*

I_6 est représenté par les groupes ci-dessous :

1°. *Groupes des permutations.*

α) Le groupe P_3 des permutations π_s à 3 éléments

$$\begin{aligned} &\pi_1 = (1\,3\,5), \ \pi_3 = (3\,5\,1), \ \pi_5 = (5\,1\,3) \text{ (permutations cycliques)} \\ &\pi_2 = (1\,5\,3), \ \pi_4 = (3\,1\,5), \ \pi_6 = (5\,3\,1) \text{ (} \quad \text{ acycliques)} \end{aligned} \tag{3}$$

β) Un sous-groupe (des éléments π'_5) du groupe P_6 des permutations à 6 éléments.

$$\pi'_r \begin{pmatrix} g_1 \cdots g_6 \\ g_{1_r} \cdots g_{6_r} \end{pmatrix} \text{ ou (symbolique) } (g_{1_r} \cdots g_{6_r}) \tag{3'}$$

ici $g_{s_r} = g_s g_r$, pour $r = \text{const.}$, sont les éléments de la colonne de rang r de la matrice (1').

2°. *Groupes des matrices.* α) Le groupe M_6^3 de matrices quadratiques nonsingulières d'ordre 3, μ_s

$$\begin{aligned} &\mu_1 = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \quad \mu_3 = \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 1&0&0 \\ 0&1&0 \end{pmatrix} \quad \mu_5 = \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 1&0&0 \end{pmatrix} ; \\ &\mu_2 = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{pmatrix} \quad \mu_4 = \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} \quad \mu_6 = \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

(les matrices μ_i à déterminant $+1$, μ_p à déterminant -1).

β) Le groupe M_6^6 des matrices μ'_s nonsingulières quadratiques à déterminant 1,

$$(4') \qquad \mu'_i = \begin{pmatrix} \mu_i & 0 \\ 0 & \mu_i \end{pmatrix}, \quad \mu'_p = \begin{pmatrix} 0 & \mu_p \\ \mu_p & 0 \end{pmatrix}$$

„0" étant la matrice nulle de 3-ième ordre.

3⁰. *Le groupe T_6 des substitutions linéaires* (substitutions-permutations) $t_r\,(x_s = x'_{s_r})$, les permutations cycliques des indices impairs i_1 i_3, i_5 et des indices pairs p_1, p_3, p_5 étant données par (NI).

$$(5) \qquad \begin{matrix} t_1 \begin{cases} x_i = x'_i \\ x_p = x'_p \end{cases} & t_3 \begin{cases} x_i = x'_{i_3} \\ x_p = x'_{p_3} \end{cases} & t_5 \begin{cases} x_i = x'_{i_5} \\ x_p = x'_{p_5} \end{cases} \\ t_6 \begin{cases} x_i = x'_p \\ x_p = x'_i \end{cases} & t_4 \begin{cases} x_i = x'_{p_3} \\ x_p = x'_{i_3} \end{cases} & t_2 \begin{cases} x_i = x'_{p_5} \\ x_p = x'_{i_5} \end{cases} \end{matrix}.$$

(Les 3 dernières donnent pour x_p les transformations équivalentes

$$x_p = x'_i, \quad x_{p_3} = x'_i, \quad x_{p_5} = x'_i.$$

Les transformations t_i en conservent la parité des indices, les t_p le changent.

b. *Les sous-groupes de I_6.*

1. *Structure des sous-groupes*

I_6 admet les 6 sous-groupes (dont 5 cycliques)

$$(6) \qquad I_1 = g_1, \quad I_3, \quad L_2^p \ (p = 2, 4, 6), \quad I_6.$$

$I_1 = g_1$ est l'identité.

MŰEGYETEM TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET

Chaque sous-groupe $L_2^p = g_1 + g_p$ contient l'élément identité g_1 et un des éléments g_p. Il est donc un sous-groupe cyclique d'ordre 2. Le sous-groupe $I_3 = g_1 + g_3 + g_5$ contient les éléments g_i tandis que le complexe $I_3' = g_2 + g_4 + g_6$ contient les éléments g_p; I_3' n'est pas un groupe. I_3 contient le sous-groupe $I_1 = g_1$ (l'identité) et le complexe

$$I_1' = g_3 + g_5.$$

2. *Représentations des sous-groupes de I_6.*

1⁰. *Représentation de L_2^p.* Chaque L_2^p est représenté par les permutations $(g_1\ g_p)$ $(g_p\ g_1)$

les matrices $\begin{pmatrix} 10 \\ 01 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 01 \\ 10 \end{pmatrix}$

les substitutions linéaires $t_1\,(x_1 = x_1',\ x_p = x_p')$ $t_p\,(x_1 = x_p'\ x_p = x_1')$.

2⁰. *Représentations de I_3 et I_3'.* Le sous-groupe I_3 est représenté

par les éléments des indices impairs, le complexe I_3' par les éléments d'indices pairs des groupes P_3, P_6; M_6^3, M_6^6; T_6 qui permettent la représentation de I_6.

3. *Relations des sous-groupes de* I_6.

1°. *Sous-groupes conjugués.* Les L_2^p sont conjugués. Les sous-groupes (6') I_1, I_3 et I_6 sont invariants, donc I_1 et I_1', I_3 et I_3', sont permutables avec chaque g_s.

2°. *Diviseurs communs.* Tous les sous-groupes de I_6 sont primes, d'où les suites de „longueur" 2

$$I_1 \subset L_2^p \subset I_6 \quad \text{et} \quad I_1 \subset I_3 \subset I_6$$

dont la dernière est suite de composition.

3°. *Décomposition.* Les complexes I_3 et I_3' sont permutables entre eux et avec chacun des groupes L_2^p; I_6 est donc un produit direct

$$I_6 = L_2^p I_3 = L_2^p I_3' . \tag{7}$$

4°. *Classes secondaires.* Relatif à L_2^p, I_6 se décompose en classes secondaires

$$I_6 = L_2^p g_1 + L_2^p g_3 + L_2^p g_5 = L_2^p g_p + L_2^p g_{p'} + L_2^p g_{p''} \quad (p' \neq p'' \neq p).$$

Relatif à I_3, I_6 se décompose en 2 classes secondaires

$$I_6 = I_3 g_1 + I_3 g_p = I_3 + I_3' , \tag{7'}$$

les éléments du groupe-facteur (groupe complimentaire) $J_2 = I_6 / I_3$ du I_3 relatif à I_6. J_2 est un groupe cyclique de 2-ième ordre, tel que

$$I_3^2 = I_3'^2 = I_3 \quad \text{et} \quad I_3 I_3' = I_3' I_3 = I_3'.$$

On écrit d'une manière symbolique $I_6 = (J_2\, I_3)$.

B. *Le groupe abstrait* G_{12}

a. *Le groupe* G_{12} *come tel.*

1. *Définitions.*

1°. *Le groupe* I_2. Désignons par I_2 un groupe cyclique de 2-ième ordre d'éléments g_1, g_7. Donc $g_7^2 = g_1^2 = g_1$, $g_7 g_1 = g_1 g_7 = g_7$.

I_2 contient les sous-groupes (impropres)

$$g_1, \ I_2 \tag{8}$$

(l'identité et le groupe même).

2°. *Le groupe* G_{12}. Désignons par G_{12} le produit direct des groupes I_6 et I_2 (voir Zassenhaus, B. 3). Supposons que les éléments

de I_2 permutables avec les éléments du I_6. I_2 et I_6 sont primes. Donc

$$G_{12} = I_2 I_6.$$

Les indices s, t, τ donnés par (N I), les éléments g_τ du groupe G_{12} sont

$$(8'') \qquad g_s = g_1 g_s = g_s g_1 \qquad g_t = g_7 g_s = g_s g_7 .$$

2. *Multiplication.*

1⁰. *Les produits.* Soit

$$s_r = s', \; r_s = s'', \; t = s + 6, \; u = r + 6, \; t' = s' + 6, \; t'' = s'' + 6.$$

Nous avons

$$(9) \qquad \begin{aligned} g_t g_1 &= g_7^2 g_s g_r = g_{s_r} = g_{s'} \\ g_t g_r &= g_7 g_s g_r = g_7 g_{s_r} = g_{t'} \\ g_r g_t &= g_7 g_r g_s = g_7 g_{r_s} = g_{t''} \end{aligned}$$

donc homomorphisme de 2-ième ordre entre I_6 et G_{12}.

2⁰. *Produits divers.* Commutation : les éléments g_ι sont commutatifs, les g_π sont noncommutatifs entre eux et avec les g_ι.

Indices des produits : l'index du produit $g_\tau g_\rho = g_{\tau\rho}$ et la somme des indices des facteurs sont de parité opposée.

Puissances : $g_\iota^6 = g_1$, $g_\pi^2 = g_1$,

($g_{9,\,11}$ de 6-ième ordre ; $g_{3,5}$ de 3-ième, g_π et g_7 de 2-ième, g_1 d'ordre un).

Inverses :

$$g_9^{-1} = g_{11}, \; g_{11}^{-1} = g_9, \; g_3^{-1} = g_5, \; g_p^{-1} = g_p, \; g_q^{-1} = g_q, \; g_7^{-1} = g_7.$$

Les transformées par g_τ des éléments

$$g_1, \; g_i, \; (i \neq 1), \; g_p ; \; g_7, \; g_j \; (j \neq 7) ;$$

donnent respectivement les complexes

$$(10) \qquad I_1, \; I_1, \; I_3' ; \; g_7, \; g_7 I_1, \; g_7 I_3' .$$

La transformation conserve la parité des indices et les 6 classes des éléments conjuguées.

Eléments générateurs. Ils sont en nombre de 3, à savoir

$$g_1, \; g_p, \; g_p', \; (p' \neq p) \text{ ou encore } g_7, \; g_q, \; g_{q'},$$

3⁰. *Facteurs droits.* A chaque facteur gauche g_τ correspond un produit $g_{\tau\rho}$ par rapport au facteur droit g_ρ.

Facteurs droits d'index impair. (Produit et facteur gauche de même parité).

Soit g_1, g_3, g_5 les facteurs droits ; nous appellons les produits $g_{\tau 1}$, $g_{\tau 3}$, $g_{\tau 5}$, suivant les cas, l'élément identique, polaire ou antipolaire de l'élément gauche g_τ.

Facteurs droits d'index pair (produit et facteur gauche de parité contraire). Soient g_6, g_4, g_2 $(= g_6 g_1, g_6 g_3, g_6 g_5)$ les facteurs droits. nous appellons les produits $g_{\tau 6}$, $g_{\tau 4}$, $g_{\tau 2}$, suivant le cas, l'élément supplémentaire, correspondant, complémentaire de l'élément gauche g_τ ;

Pour $\tau = i, \pi$, voir N (indices).

3. *Représentation du groupe* G_{12}.

Le groupe G_{12} est représenté par les groupes ci-dessous.

1⁰. *Groupes des permutations:* un sous-groupe des éléments π''_ρ du groupe P_{12} des permutations de 12 éléments

$$\pi''_\rho = \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_{12} \\ g_{1\rho} & \cdots & g_{12\rho} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Pour la même permutation ($\rho = \text{const.}$) $g_{\tau\rho} = g_\tau\, g_\rho$ varie avec le facteur gauche.

2⁰. *Groupes de matrices:* Un groupe M_{12}^{12} des matrices nonsingulières μ''_τ d'ordre 12, quadratiques, de déterminant 1.

$$\mu_i'' = \begin{pmatrix} \mu_i' & 0 \\ 0 & \mu_i' \end{pmatrix},\ \mu_p'' = \begin{pmatrix} \mu_p' & 0 \\ 0 & \mu_p' \end{pmatrix};\ \mu'' = \begin{pmatrix} 0 & \mu_i' \\ \mu_i' & 0 \end{pmatrix},\ \mu_q'' = \begin{pmatrix} 0 & \mu_p' \\ \mu_p' & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

μ_s' étant les matrices du groupe M_6^6 et „0" la matrice nulle d'ordre 6.

3⁰. *Groupes des substitutions linéaires* t_ρ (substitutions - permutations)

$$t_\rho\ (x_\tau = x'_{\tau\rho}). \tag{13}$$

Ainsi t_γ...

$$t_1\ (x_i = x_i',\ x_p = x_p',\ x_j = x_j',\ x_q = x_q')$$
$$t_6\ (x_i = x_p',\ x_p = x_i',\ x_j = x_q',\ x_q = x_j')$$
$$t_7\ (x_i = x_j',\ x_p = x_q',\ x_j = x_i',\ x_q = x_p')$$
$$t_{12}\ (x_i = x_q',\ x_p = x_j',\ x_j = x_p',\ x_q = x_i')$$

et ainsi les autres.

b. *Les sous-groupes de* G_{12}.

1. *Les sous-groupes comme tels.*

1⁰. *Formation des sous-groupes.* Les 12 sous-groupes de G_{12} sont produits directs des sous-groupes (8) du I_2 et des sous-groupes (6) du I_6, à savoir

$$\begin{matrix} I_1\,,\ L_2^{\mathrm{D}}\,,\ I_3\,,\ I_6\,, \\ I_2\,,\ I_2\,L_2^{\mathrm{D}}\,,\ I_2 I_3\,,\ G_{12}. \end{matrix} \tag{14}$$

2⁰. *Classification.* Parmi les sous-groupes nous trouvons :

les sous-groupes cycliques

$$I_1\,,\ L_2^{\mathrm{D}}\,,\ I_2\,,\ I_3\,,\ I_2 I_3 \tag{14'}$$

générés par les éléments g_1, g_{D}, g_7, g_3 (ou g_5), g_9 (ou g_{11}) d'ordre *1, 2, 2, 3, 6* respectif.

Les sous-groupes diédriques (quadratique, cubique, sextique)

$$I_2\,L_2^{\mathrm{D}}\,,\ I_6\,,\ G_{12}\ . \tag{14''}$$

Les produits des trois derniers sous-groupes cycliques de (14') avec L_2^{D}.

2. *Relations des sous-groupes de* G_{12}.

1⁰. *Conjugués.* Les L_2^{D} sont conjugués ; de même $I_2\,L_2^{\mathrm{D}}$.

Les 6 sous-groupes invariants I_δ de G_{12} se présentent sous forme des produits directs des sous-groupes invariants (8) du I_2 et les sous-groupes invariants (6') du I_6 :

$$I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_6,\ I_2\,I_3,\ G_{12} = I_{12}\ . \tag{15}$$

Les I_δ (de même que les complexes correspondants à 2 sous-groupes d'une suite donnée) sont permutables avec tous les g_τ.

2⁰. *Diviseurs communs.* Certains sous-groupes de G_{12} admettent des diviseurs communs, d'où les suites (de „longueur" 3)

$$I_1 < I_3 < I_6 < I_{12} \qquad I_1 < L_2^{\mathrm{D}} < I_6 < I_{12} \tag{16}$$

$$I_1 < I_3 < I_2\,I_3 < I_{12} \qquad I_1 < L_2^{\mathrm{D}}\,I_2 < L_2^{\mathrm{D}} < I_{12} \tag{16'}$$

$$I_1 < I_2 < I_2\,I_3 < I_{12} \qquad I_1 < I_2 < I_2\,L_2^{\mathrm{D}} < I_{12}. \tag{16''}$$

Les suites (16, 16') sont suites de composition ; (16, 16', 16'') des suites des sous-groupes invariants.

3⁰. *Décomposition en facteurs.* Les I_δ et les complexes corres-

pondants sont permutables entre eux et avec chacun des sous-groupes noninvariants L_2^p et $I_2 L_2^p$, donc G_{12} est décomposable en facteurs commutatifs.

(17) $G_{12} = I_2 I_6 = I_2 L_2^p I_3 = I_2 L_2^p I_3'$; les facteurs sont

(17') $I_3,\ L_2^p,\ I_2$.

4⁰. *Classes secondaires :*

par rapport à L_2^p (d'index 6)

$$G_{12} = \Sigma_t\ L_2^p\ g_t\ ;$$

par rapport à $L_2^p I_2$ (d'index 3)

$$G_{12} = \Sigma_i\ L_2^p\ I_2\ g_i\ ;$$

par rapport à I_δ (d'ordre δ et d'index $n = 12/\delta$ en G_{12}), G_{12} se décompose en classes secondaires formant le groupe-facteur (groupe complémentaire) $J_n = G_{12}/I_\delta$ d'ordre n du I_δ par rapport à G_{12}, tel que $G_{12} = (I_\delta\ J_n)$

(18) $J_{12} = G_{12} = \Sigma g_\tau$, $J_6 = \Sigma\ I_2\ g_s$, $J_4 = I_3 g_1 + I_3\ g_7 + I_3\ g_p + g_7\ I_3'$

$$J_2 = I_6 + g_7\ I_6\ ,\quad J_2' = I_3\ I_3 + I_2\ I_3'\ ,\quad J_1 = I_1$$

dont les premiers 3 diédriques, les derniers 3 cycliques. Aux suites de composition (16, 16') en correspondent par rapport à G_{12} :

a_1) les suites des complexes I''_δ, tel que $G_{12} = I_\delta + I''_\delta$

a_2) „ „ groupes-facteurs J_n.

Par rapport à 2 sous-groupes invariants consécutifs $I_{\delta_1} \subset I_\delta$ de la suite de composition donnée en correspondent :

b_1) Les suites des complexes $I'_{\delta 1}$ tel que $I_\delta = I_{\delta_1} + I'_\delta$.

b_2) „ „ „ groupes-facteurs $J_m = I_\delta / I_{\delta_1}$ d'ordre $m = \delta/\delta_1$ du I_{δ_1} par rapport à I_δ.

b3) Une décomposition progressive du G_{12} en classes secondaires. La suite (16) donne les sous-groupes invariants symétriques et alternes les suites (16', 16''), les sous-groupes invariants cycliques du G_{12}. Aux suites (16) correspondent ainsi les suites

	(β)	0	1	2	3
(19)	(J_n)	J_{12}	J_4	J_2	J_1
(20)	(I'_δ)		I_1'	I_3'	I_6'
(21)	(J_m)		J_3	J_2	J_2

et la décomposition progressive en classes secondaires

$$(22) \qquad I_{12} \left\{ \begin{matrix} I_6 \\ I'_6 \end{matrix} \right. \left\{ \begin{matrix} I_3 \\ I_3' \end{matrix} \right. \left\{ \begin{matrix} I_1 = g_1 \\ g_3 \\ g_5 \end{matrix} \right. .$$

Nous venons noter

$I_6' = g_7\, I_6$, $\quad J_3 = I_3 = g_1 + g_3 + g_5$, $\quad J_2'' = I_3 + I_3'$, $\quad J_2 = I_6 + I_6'$

étant des groupes-facteurs cycliques $\beta (= 0, 1, 2, 3)$ étant l'ordre des termes des suites (16, 19-21).

Pour I_1 et I_1' on a correspondance de type (1-2) ; pour I_3 et I_3' correspondance biunivoque ; de même pour I_6 et I_6'. I_3' se décompose en sous-complexes $g_p = g_p\, I_1$ et $g_p\, I_1'$, de même les sous-complexes de I_6' sont les sous-complexes de I_6 multipliés par g_7.

δ_1 et δ, n_1 et n, m_1 et m étant les indices des 2 termes consécutifs des suites I_δ, J_n, J_m on a $J_m \subset I_{n_1}$, $J_n = J_{n_1} | J_m$ tel que J_m est un sous-groupe invariant de I_{n_1} ; chaque J_n est groupe-facteur de J_{n_1} par rapport à J_m, tel que $G_{12} = [(I_{\delta_1} J_m)\, J_n] = [I_{\delta_1} (J_m J_n)]$, car $(I_{\delta_1} J_m) = I_\delta$, $(J_m J_n) = J_{n_1}$, $m = \delta / \delta_1 = n_1 / n$.

II. L'algèbre concrète d'action.

(Le système hypercomplexe bisextique C_{12})

A. *Le système hypercomplexe sextique* C_6.

a. C_6 *comme algèbre groupale.*

1. *Définitions.*

Introduisons 6 unités hyperimaginaires e_s, formant un groupe E_6, représentant du groupe diédrique, cubique abstrait I_6 ; e_1 est l'unité réelle. La forme linéaire $v = \sum a_s\, e_s$ à coefficients a_s (réels ou complexes ordinaires) est un „nombre sextique". L'ensemble des nombres sextiques est un groupe infini (continu) par rapport à l'addition : le système (l'anneau) sextique C_6. Le système sextique étudié ici est un algèbre (anneau) groupale ; pour l'étude des systèmes hypercomplexes voir *B 1, 4, 5, 7.* La théorie du groupe abstrait I_6 et surtout la matrice des produits, que nous venons développer en *I A*, est valable pour le groupe E_6, les symboles $G(I, L)$ et g étant remplacés par E et e.

2. *Les nombres sextiques comme matrices.*

Chaque quantité hypercomplexe $v = \sum a_s\, e_s$ peut être représentée

par une matrice (voir B 1, 4) en posant pour chaque e_s une matrice μ_s (d'ordre arbitraire) tel que les axiomes de la multiplication $e_s\, e_r = \sum_\alpha q_{sr\alpha}\, e_\alpha$ sont valables pour les matrices fondamentales μ_s.

Le nombre hypercomplexe $v = \sum a_s e_s$ devient une matrice $\sum \mu_s a_s$. Aux e_s (ou v) singuliers (diviseurs de zéro) correspondent des matrices singulières (de déterminant nul). Cas particulier ; chaque nombre sextique est représenté par une matrice quadratique à matrices fondamentales μ_s ou μ_s (voir I 4, 4').

3. *Les signes des unités* e_s.

C_6 étant un groupe additif continu, on peut rattacher aux unités e_s (et aux nombres sextiques) des signes. Supposons l'unité principale $e_1 = +1$, donc positive (hypothèse vérifiée pour le rayon vecteur-valeur absolue de la longueur en géométrie et physique). Les axiomes de la multiplication valables pour les e_s et les théorèmes déduits (puissances, inverses) sont alors *invariants* par rapport aux changements simultanés des signes des tous *unités à indices pairs* $e_p < E_3'$ Mais ils ne sont pas plus invariants pour un changement simultané des signes des $e_{3,5} < I_1'$; dans ce cas les relations changent de signe. En cas particulier, les équations binômes $e_i^3 = e_1$, $e_p^2 = e_1$ changent en $-e_i^3 = e_1$, $e_p^2 = e_1$) (ici $i \neq 1$). En conclusion, les relations de groupe du E_6 ne sont pas invariantes que pour les variations simultanées des signes des unités e_p à index pair.

b. *Multiplication des nombres sextiques.*

1. *Commutation.*

1°. *Loi générale.* Le produit des nombres sextiques

$$v = \sum a_s e_s,\quad v' = \sum a_s' e_s$$

est un nombre sextique $v'' = \sum a_s'' e_s$, dont les coefficients sont des formes bilinéaires des a_s, a_s'.

λ_f ($f = 1, 2, 3, 4$) étant des nombres arbitraires (réels ou complexes ordinaires), le produit est commutatif pour

(1) $a_1 = \lambda_4 a_1' + \lambda_1$, $a_i = \lambda_4 a_i' + \lambda_3$ ($i = 3, 5$), $a_p = \lambda_4 a_p' + \lambda_2$ ($p = 6, 4, 2$)

ou encore

(1') $$v = \lambda_4 v' + 3\lambda_3 m_1 + 3\lambda_2 m_6 + (\lambda_1 - \lambda_3)\, e_1$$

donc une relation linéaire en v, v' et les unités sextiques „centrales"

$$e_1,\quad m_1 = \frac{1}{3}(e_1 + e_3 + e_5),\quad m_6 = \frac{1}{3}(e_2 + e_4 + e_6)$$

2^0. *Cas particuliers:* $v = \lambda v'$; $v = \lambda v' + \lambda_1$ (relation valable aussi pour quaternions permutables).

Des nombres sextiques de la forme

$$v = \Sigma\, a_i\, e_i + x_1\, m_6$$

sont permutables ; comme cas particulier, des nombres sextiques à unités aux indices impairs $\Sigma\, a_i\, e_i$.

2. *Nombres sextiques centrals.*

Un nombre sextique central (permutable avec chaque nombre sextique) est de la forme

(2) $v = \lambda_1\, e_1 + \lambda_3\, m_1 + \lambda_2\, m_6 = \lambda_1'\, e_1 + \lambda_3'\,(e_3 + e_5) +$

$+ \lambda_2'(e_2 + e_4 + e_6) = \mu_1\, j_1 + \mu_2\, n_1 + \mu_3\, n_6$ (voir II, 4).

C'est une forme linéaire à 3 unités sextiques, le nombre des classes des éléments conjuguées pour E_6 (ou I_6), étant 3, à savoir les complexes (I, 2).

3. *Unités centrales idempotentes.*

Un nombre sextique v est une „unité centrale idempotente", si v est permutable avec tout nombre sextique et si $v^2 = v$ (donc $v^n = v$ pour chaque n entier positif) (abrégé *u. c. id*).

1^0. *Expressions des unités.* Le système C_6 admet 8 éléments centrales idempotents à coefficients réells, distribués en 4 catégories

(3) $A_0\,(1,\ 0)$, $A_I\,(m_1\,,\ j_1)$, $A_{II}\,(n_1\,,\ m_6')$, $A_{III}\,(n_6\,,\ m'_1)$

$$m_1 = \frac{1}{3}\sum e_i \qquad j_1 = \frac{1}{3}(2\,e_1 - e_3 - e_5)$$

(4) $$n_{1\,,\,6} = \frac{1}{6}\left(\sum e_i \pm \sum e_p\right) = \frac{1}{2}\left(m_1 \pm m_6\right)$$

$$m'_{1,\ 6} = \frac{1}{6}\left(5e_1 - e_3 - e_5 \pm \sum e_p\right) = n_{1,\ 6} + j_1$$

2^0. *Relations* des *u. c. id.* La somme des unités de chaque catégorie est $e_1 = 1$, le produit nul. On a

(4') $m_1 = n_1 + n_6 \quad m_1' = j_1 + n_1 \quad m_6' = j_1 + n_6 \quad (m_1 + n_1 + n_6 = 1)$

Les produits non nuls donnent

$$m_1\, n_{1,\ 6} = m_1\, m'_{1,\ 6} = n_{1,\ 6}\, m_{1,\ 6} = n_{1,\ 6}$$

$$j_1\, m_1'_{,\ 6} = m_1'\, m_6' = j_1 \qquad \text{tandis que}$$

(5') $$m_1\, j_1 = n_1\, n_6 = n_6\, m_1' = n_1\, m_6' = 0$$

A seul exception de $e_1 = 1$, les autres *u. c. id.*, (à savoir les catégories A_I A_{II} A_{III} et le zéro de la catégorie A_0) sont singulières (diviseurs du zéro). Tous *u. c. id.* sont formes linéaires par rapport à j_1, n_1, n_6 à coefficients 1,0.

3⁰. *Produits des u. c. id. et des unités* e_s. Posons

$$j'_s = j_1 e_s = e_s j_1 \text{ (avec } j'_1 = j_1). \tag{6}$$

On a

$$e_i = m_1 + j'_1 \quad e_p = m_6 + j'_p$$

et donc les produits

$$m_1 e_i = m_1 \quad j_1 e_i = e_i - m_1 \quad n_1 e_s = n_1 \quad m'_1 e_s = n_1 + j'_s$$
$$m_1 e_p = m_6 \quad j_1 e_p = e_p - m_6 \quad n_6 e_i = n_6 \quad m'_6 e_i = n_6 + j'_i$$
$$n_6 e_p = -n_6 \quad m'_6 e_p = -n_6 + j'_p.$$

4⁰. *Produits des u. c. id. et des nombres sextiques quelconques* $o = \Sigma a_s e_s$.

En posant

$$h_1 = \Sigma a_i \quad h_6 = \Sigma a_p \quad k_{1,6} = h_1 \pm h_6 \tag{7}$$

on a

$$m_1 o = m_1 h_1 + m_6 h_5, \; m_5 o = m_1 h_5 + m_5 h_1, \; n_1 o = n_1 k_1, \; n_6 o = n_6 k_6.$$

b. *Réduction du système sextique.*

1. *Les systèmes partiels.*

(Pour la théorie générale de la réductibilité des systèmes hypercomplexes, fondée sur le théorème fondamentale de Wedderburn, voir Wedderburn, Van der Waerden, Study (B, 4, 5, 1).

Les unités principales des divers systèmes partiels d'un système réductible sont quantités centrales idempotentes telles que les produits des unités appartenants à systèmes distinctes sont nulles et dont la somme est l'unité réelle, o étant une *u. c. id*, la *u. c. id.* o' telle que $oo' = o'o = 0$ et $o' = e_1 - o$.

Des relations (II 4′ et II 5′) nous trouvons 3 réductions possibles de C_6 à 2 systèmes partiels, suivant la choix des unités principales. Parti les *u.c. id.* de la catégorie A_I, A_{II}, A_{III}.

$$o = oj + om_1 \qquad o = om'_6 + on_1 \qquad o = om'_1 + on_6.$$

Il en résulte une seule décomposition en 3 systèmes partiels réels irréductibles à unités principales j_1, n_1, n_6.

$$o = oj_1 + on_1 + on_6 = oj_1 + k_1 n_1 + k_6 n_6 \tag{8}$$

car les systèmes partiels C_1, C_1' et C_4 aux unités principales n_1, n_6, j_1, sont irréductibles., les systèmes aux unités principales m_1, m_1', m_6', (voir II 4') sont réels-réductibles. Cas particulier : le système à unité principale m_1 (et le bases m_1 et m_6) est un système dual elliptique $C_2{}^2$ (algèbre groupale fondée sur le groupe cyclique m_1, m_6) :

$$m^2{}_1 = m^2{}_6 = m_1 , \quad m_1 m_6 = m_6 m_1 = m_6$$

$C_2{}^2$ se réduit donc à 2 algèbres groupales C_1, C_1' fondées respectivement sur le groupe cyclique n_1 et le groupe cyclique n_6, de premier ordre chacun. Le système sextique C_6 se décompose donc d'abord en 2 systèmes partiels aux unités principales $C_4\,(j_1)$ et $C_2\,(m_1)$ et finalement en 3 systèmes partiels irréductibles (algèbres groupales) (p-ions), à savoir deux systèmes d'une seule unité n_1 respectivement n_6, (1-ion) et un système C_4 à 4 unités (4-ions).

2. *La forme quaternionique.*

1⁰. *Les unités quaternioniques.* α) Les unités j_i'. Les unités $j_i' = j e_i = e_i - m_1$ $(i = 1, 3, 5)$ sont linéaires dépendantes. De même les unités j_p' $(p = 2, 4, 6)$,

donc $$\Sigma j_i' = 0, \quad \Sigma j_p' = 0.$$

Soient j_1, j_3 et j_2', j_4' les nouvelles unités (linéaires-indépendantes) du C_4. Vu la correspondance biunivoque des produits

$$e_s e_r = e_{s_r} \quad \text{et} \quad j_s j_r = j_{s_r},$$

les unités j_s constituent un groupe isomorphe à E_6.

β) Les unités j_f. Introduisons les unités

$$\begin{aligned} j_1 = j_1' &= \frac{1}{3}(2e_1 - e_3 - e_5) \qquad j_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(2j_3' + j_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_3 - e_5) \\ j_2 = j_2' &= \frac{1}{3}(2e_2 - e_4 - e_6) \qquad j_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(2j_4' + j_2') = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_4 - e_6), \end{aligned} \tag{9}$$

dont la matrice des produits est

	j_1	j_3	j_2	j_4
j_1	j_1	j_3	j_2	j_4
j_3	j_3	$-j_1$	j_4	$-j_2$
j_2	j_2	$-j_4$	j_1	$-j_3$
j_4	j_4	j_2	j_3	j_1.

(10)

γ) C_4 comme algèbre groupale. Les unités j_f sont donc les unités d'un système quaternionique „de type b" (S t u d y) à norme indéfinie ; il se réduit aux quaternions hamiltoniens, par la substitution imaginaire

$$j_2 = i j''_2 , \quad j_4 = i j''_4 \ (i^2 = -1).$$

Les unités j_f ($f = 1, 2, 3, 4$) en constituent un groupe, le groupe diédrique quadratique, aux signes près. Les unités $\pm j_f$ forment le groupe hamiltonien G_8.

2°. *Coefficients.* Le système sextique C_6 est donc un „système quaternionique" (S c h e f f e r s). Le nombre sextique υ, devient

$$\upsilon = \Sigma\, c_f j_f + k_1 n_1 + k_6 n_6, \tag{11}$$

la „forme quaternionique" du nombre sextique ; la forme $\upsilon = \Sigma\, e_s a_s$ sera la „forme naturelle". Les coefficients quaternioniques c_f ont les valeurs

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2}(2a_1 - a_3 - a_5) \qquad c_3 = \sqrt{3}\,(a_3 - a_5) \\ c_2 &= \frac{1}{2}(2a_2 - a_4 - a_6) \qquad c_4 = \sqrt{3}\,(a_4 - a_6). \end{aligned} \tag{11'}$$

Les c_f s'expriment donc en fonction des a_s d'une même façon que s'expriment les unités j_f en fonction des e_s, aux facteurs numériques près.

3°. *Les termes du* υ. Introduisons, pour l'expression (11) de υ les formes linéaires suivantes :

le terme quaternionique $b\,(e_s) = \Sigma\, c_f j_f$,

le terme dual $d(e_s) = k_1 n_1 + k_6 n_6$,

le terme central $c\,(e_s) = c_1 j_1 + k_1 n_1 + k_6 n_6$,

le terme axial $c'(e_s) = c_3 j_3 + c_2 j_2 + c_4 j_4$.

La forme quadratique

$$-J = c^2_3 - c^2_2 - c^2_4 \tag{12}$$

est la „norme axiale" ; le quaternion $b\,(e_s)$ et le nombre sextique $\upsilon(e_s)$ aussi est hyperbolique, parabolique ou elliptique suivant que $J \lesseqgtr 0$.

Le cas parabolique excepté, on définit le nombre sextique

$$j = c'(e_s)/\sqrt{J}\,; \tag{12'}$$

c'est „l'axe quaternionique" (sextique). On a $j^2 = j_1$; le terme axial prend alors la forme

$$c'(e_s) = j\sqrt{J}\,; \qquad \upsilon = c_1 j_1 + j\sqrt{J} + d.$$

Les termes à indices impairs ou pairs des formes linéaires précédentes seront désignés, par ex. pour $v(e_s)$, par $v(e_i)$, $v(e_p)$ etc.

4⁰. *Multiplication quaternionique.* Donnés les nombres sextiques

$$v = b + d, \quad v' = b' + d'$$

$$b = \Sigma c_f j_f = c_1 j_1 + j\sqrt{J}, \qquad b' = \Sigma c'_f j_f = c'_1 j_1 + j'\sqrt{J'},$$
$$d = k_1 n_1 + k_6 n_6 \qquad d' = k'_1 n_1 + k'_6 n_6,$$

on a le produit

$$vv' = bb' + k_1 k'_1 n_1 + k_6 k_6' n_6$$

(les termes des 3 systèmes C_4, C_1, C_1' se multiplient à part).

Les conditions de la commutativité pour le produit sextique et pour le produit quaternionique sont identiques :

$$c'_2/c_2 = c'_3/c_3 = c'_4/c_4 \quad (= \lambda_1) \quad \text{donc} \quad j' = j, \quad J' = \lambda_1^2 J,$$

conditions équivalentes avec les relations (II, 1) (quaternion ou sextique „complanaires"). On a alors

$$b = c_1 j_1 + j\sqrt{J}, \quad b' = c_1' j_1 + \lambda_1 j\sqrt{J}$$
$$vv' = (c_1 c'_1 + \lambda_1 J) j_1 + (c_1 + \lambda_1 c'_1) j' \sqrt{J} + k_1 k'_1 n_1 + k_6 k_6' n_6.$$

3. *La forme réduite.*

1⁰. *Forme réduite et forme naturelle.* α) Transformations des unités. Désignons par $\varepsilon, \varepsilon^2$ les racines cubiques complexes de l'unité réelle $e_1 = 1$ (c'est-à-dire les racines de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ dans le corps des nombres réels). Au lieu des unités naturelles e_s, introduisons les „unités réduites du I-ière ordre" m_s, tel que

$$v = \Sigma a_s e_s = \Sigma h_s m_s$$

$$m_1 = \frac{1}{3}(e_1 + e_3 + e_5) \qquad m_6 = \frac{1}{3}(e_3 + e_4 + e_6)$$

(13)
$$m_3 = \frac{1}{3}(e_1 + e_3\varepsilon + e_5\varepsilon^2) \qquad m_2 = \frac{1}{3}(e_2 + e_4\varepsilon + e_6\varepsilon^2)$$

$$m_5 = \frac{1}{3}(e_1 + e_3\varepsilon^2 + e_5\varepsilon) \qquad m_4 = \frac{1}{3}(e_2 + e_4\varepsilon^2 + e_6\varepsilon).$$

β) Transformation des coefficients. On a les transformations contragredientes par rapport à (13)

$$h_1 = a_1 + a_3 + a_5 \qquad h_6 = a_2 + a_4 + a_6$$

(14)
$$h_3 = a_1 + a_3\varepsilon^2 + a_5\varepsilon \qquad h_2 = a_2 + a_4\varepsilon^2 + a_6\varepsilon$$
$$h_5 = a_1 + a_3\varepsilon + a_5\varepsilon^2 \qquad h_4 = a_2 + a_4\varepsilon + a_6\varepsilon^2.$$

2°. *Forme réduite et forme quaternionique.* α) Formules de transformations des unités. On définie les unités f_s et f_s' par les formules

$$m_{3,5} = \frac{1}{2}(f_1 \pm i f_1') \qquad m_{5,1} = \frac{1}{2}(f_3 \pm i f_3') \qquad m_{1,3} = \frac{1}{2}(f_5 \pm i f_5')$$

(15)

$$m_{2,4} = \frac{1}{2}(f_6 \pm i f_6') \qquad m_{4,6} = \frac{1}{2}(f_2 \pm i f_2') \qquad m_{6,2} = \frac{1}{2}(f_4 \pm i f_4')$$

telles que $f_1 = j_1$, $f_1' = j_3$, $f_6' = j_4$.

A chaque couple m_i et à chaque couple m_p correspond donc un système des 4 unités, dont le premier est le système quaternionique. Les transformations des coefficients sont

$$(16) \qquad h_{3,5} = c_1 \mp i c_3 \qquad h_{2,4} = c_2 \mp i c_4$$

et de même pour les autres couples.

β) Réduction du C_3. Le système quaternionique cyclique C_3 à unités e_i (ou m_i) admet les 8 u. c. id. disposées en 4 catégories

$$(17) \qquad B_0(1,0) \quad B_1(m_1, f_1) \quad B_3(m_3, f_3) \quad B_5(m_5, f_5).$$

Le produit des unités de chaque catégorie est nul, leur somme unitaire ($e_1 = 1$). C_3 est donc réductible à systèmes partiels à bases m_i (transformation complexe), mais C_4 n'est pas réductible. Les unités f_i ont pour carrés $-f_i$, tandis que

$$f_2'^2 = f_4'^2 = -m_1 , \quad f_6'^2 = f_1 .$$

3°. *Les unités* e_s'. Par analogie avec les sommes

$$m_i + f_i = e_1 , \quad m_p + f_p = e_2 ,$$

posons

$$(18) \qquad m_s - f_s = e_s' .$$

Nous trouvons

$$(19) \qquad e_i'^2 = e_6'^2 = e_1 , \quad e_2'^2 = e_4'^2 = e_1'$$

$$e_1 = m_1 + m_3 + m_5 \qquad e_6 = m_6 + m_2 + m_4$$

$$e'_1 = m_1 - (m_3 + m_5) \qquad e'_6 = m_6 - (m_2 + m_4)$$

$$e'_{3,5} = -m_1 \pm (m_3 - m_5) \qquad e'_{2,4} = -m \pm (m_2 - m_4).$$

Au lieu des unités e_s, nous pouvons introduire certaines des unités e'_s soit e_1, e'_1, e'_3 et e_6, e'_6, e'_2.

Cas particulier. Les unités centrales

$$(20) \qquad e_1 = m_1 + j_1, \quad e_1' = m_1 - j_1 = \frac{1}{3}(-e_1 + 2e_3 + 2e_5)$$

en constituent un système dual elliptique. De même

$$e_1 = m_3 + f_3$$
$$e_3' = m_3 - f_3$$

ou

$$e_1 = m_5 + f_5$$
$$e'_5 = m_5 - f_5 ,$$

donc C_3 est un produit

$$C_3 = C_2(e_1, e_1')\, C_2(e_1, e_3') = C_2(m_1, j_1)\, C_2(m_3, f_3) .$$

d. *La norme du nombre sextique.*

1. *La norme quadratique.*

1⁰. *Sextiques conjugués.*

α) *Définitions.* Le produit des nombres sextiques permutables υ; υ' est un nombre sextique central si les termes quaternioniques sont conjugués (par rapport à j), au facteur λ_1 près.

$b'(e_s) = \lambda_1\, b^+(e_s)$, donc $c_1'/c_1 = c_2'/(-c_2) = c_3'/(-c_3) = c_4'/(-c_4) = \lambda_1$

ce produit est de rang impair lorsque les termes duals sont conjugués (par rapport à m_6), près d'un facteur λ_1, donc

$$h_6'/(-h_6) = h_1'/h_1 = \mu_1 .$$

Pour $\lambda_1 = \mu_1 = 1$ les termes quaternioniques aussi que les termes duals et aussi υ par rapport à υ' sont dits „conjugués" ; $\upsilon' = \upsilon^+$ (= conjugué de υ par rapport à i et m_6).

β) *Relations.* On a

(21) $$(\upsilon^+)^+ = \upsilon ; \quad (\upsilon\upsilon')^+ = \upsilon'^+ \upsilon^+$$

car le théorème est valable pour les unités sextiques.

γ) Les formes de la conjuguée.

Forme naturelle. $\upsilon^+ = \Sigma a_s e_s^+$ avec

(22) $$e_1^+ = e_1 , \quad e_3^+ = e_5 , \quad e_5^+ = e_3 , \quad e_p^+ = -e_p .$$

Forme quaternionique $\upsilon^+ = \Sigma c_f j_f^+ + k_1 n_1^+ + k_6 n_6^+$ avec

(22′) $$j_1^+ = j_1 , \quad j_3^+ = -j_3 , \quad j_2^+ = -j_2 , \quad j_4^+ = -j_4$$

(donc $j^+ = -j$), $\quad n_1^+ = n_6 , \quad n_6^+ = n_1 .$

Forme réduite $\upsilon^+ = \Sigma h_s m_s^+$ avec

(22″) $$m_1^+ = m_1 , \quad m_3^+ = m_5 , \quad m_5^+ = m_3 , \quad m_p^+ = -m_p .$$

Les conjuguées sextiques (quaternioniques) m_3, m_5 sont aussi conjuguées imaginaires ; de même m_2, m_4 .

2^0. *La norme quadratique.*

α) *L'expression de la norme.* Le produit $vv^+ = v^+v$ des nombres sextiques conjugués est un nombre sextique central à indices impairs, forme quadratique $V(a_s)$ par rapport aux coefficients a_s.

Normes des unités : $e_i e_i^+ = e_1$, $e_p e_p^+ = -e_1$.

Normes des termes sextiques. Elles sont, aux unités j_1 et m_1 près,

$$B(a_i) = (\Sigma a_i^2 - \Sigma a_i a_{i'}) = c_1^2 + c_3^2 = h_3 h_5 \qquad (i' \neq i)$$

$$B(a_p) = (-\Sigma a_p^2 + \Sigma a_p a_{p'}) = -(c_2^2 + c_4^2) = -h_2 h_4 \qquad (p' \neq p) \tag{23}$$

$$D(a_i) = (\Sigma a_i)^2 = h_1^2 ; \quad D(a_p) = -(\Sigma a_p)^2 = -h_6^2.$$

La norme quaternionique et la norme duale sont

$$B = B(a_s) = B(a_i) + B(a_p) = (c_1^2 + c_3^2 - c_2^2 - c_4^2) = h_3 h_5 - h_2 h_4 \tag{23'}$$

$$D = D(a_s) = D(a_i) + D(a_p) = h_1^2 - h_6^2 .$$

La norme quadratique totale est

$$V(a_s) = vv^+ = Bj_1 + Dm_1 = Ue_1 + We_1' =$$

$$= \frac{1}{3}(2B + D)\, e_1 + \frac{1}{3}(D - B)(e_3 + e_5) \tag{24}$$

où nous venons de poser

$$U = \frac{1}{2}(D + B), \quad W = \frac{1}{2}(D - B). \tag{25}$$

β) *La norme du produit* est le produit des normes,

$$V(vv') = V(v)\, V(v'). \tag{26}$$

Démonstration : au nombre sextique $v = \Sigma h_s m_s$ se rattache une substitution circulaire

$$t \ldots z' = \frac{v(m_i)\, z + v(m_p)}{-v^+(m_p)\, z + v^+(m_i)}, \quad v(m_i) = \Sigma h_i m_i, \quad v(m_p) = \Sigma h_p m_p ;$$

la norme $V(v)$ est le déterminant de la substitution. Aux nombres sextiques v, v', $v'' = vv'$ se rattachent les substitutions circulaires t, t', $t'' = (tt')$; le déterminant du produit t'' est le produit des déterminants. En identifiant les coefficients, on trouve aussi h_s'' en fonction de h_s, h_s'.

γ) *Cas particuliers.* Un nombre sextique de norme nulle ($B = D = 0$) est singulier.

Le produit des sextiques permutables v, v' est nul pour $b'(e_s) = \lambda_1 b^+(e_s)$, $B(a_s) = k_1 k'_1 = k_6 k_6' = 0$.

Si v et v' sont idempotents il s'agit des *u. c. id.*, ou bien $b(e_s) = i_3$, $b'(e_s) = i_5$,

où $i_{3,5}$ sont les unités idempotentes conjuguées singulières

$$i_{3,5} = \frac{1}{2}(j_1 \pm j). \tag{26}$$

Un nombre sextique à norme complexe ordinaire $V = B = D$ est dit „spécial". Par une multiplication avec $\mathcal{X} = xe_1 + ye_1'$, chaque nombre sextique se transforme en nombre sextique spécial v' à facteur x arbitraire. Le rapport y/x est la racine de

$(1 + z^2)\ W + 2z\ U = 0$, d'où 2 valeurs réciproques $y/x = -(U \pm \sqrt{BD})/W$. Donc $v' = 2x^2\ BD(-U \mp \sqrt{BD})/W^2$.

2. *La norme quartique.*

1°. *La conjuguée de e_1'.* α) L'expression de la conjuguée. La norme V est un nombre dual elliptique à unités e_1, e_1'. Sa conjuguée duale s'obtient par permutation de D et B.

$$\widehat{V} = Ue_1 - We_1' = Dj_1 + Bm_1 = \frac{1}{3}(2D + B)\ e_1 + \frac{1}{3}(-D + B)\ (e_3 + e_5). \tag{27}$$

β) Décomposition en facteurs.

$$B_{3,5} = c_1 \pm \sqrt{V + J} \tag{28}$$

sont les facteurs de D, donc

$$v = B_3 i_3 + B_5 i_5 + k_1 n_1 + k_6 n_6 \quad v^+ = B_5 i_3 + B_3 i_5 + k_6 n_1 + k_1 n_6$$

$$\widehat{v} = k_1 i_3 + k_6 i_5 + B_3 n_1 + B_5 n_6 \quad \widehat{v}^+ = k_6 i_3 + k_1 i_5 + B_5 n_1 + B_3 n_6.$$

Les 6 produits mixtes des 4 unités idempotentes $i_{3,5}$ et $n_{1,6}$ sont nuls, donc

$$V = v v^+, \quad \widehat{V} = \widehat{v}\,\widehat{v}^+.$$

2°. *La norme quartique.*

α) *L'expression de la norme.* La norme du nombre sextique v (et du v^+, $\widehat{v}$, $\widehat{v}^+$) est la forme de 4-ième degré

$$N(a_s) = N = V\widehat{V} = U^2 - W^2 = BD. \tag{29}$$

β) „*L'équation de l'ordre*" du système sextique C_6 se décompose en 3 équations des systèmes partiels irréductibles à coefficients rationels par rapport aux a_s :

$$(x - B_3)\ (x - B_5)\ (x - k_1)\ (x - k_6) = (x^2 - 2c_1\ x + B)\ (x^2 - 2h_1\ x + D) = (x^2 - 2c_1\ x + B)\ (x - k_1)\ (x - k_6).$$

γ) *La division.* L'inverse υ^{-1} d'un nombre sextique nonsingulier est un nombre sextique

$$\upsilon^{-1} = \upsilon^{+} \widehat{V} | N = B_3^{-1} i_3 + B_5^{-1} i_5 + k_1^{-1} n_1 + k_6^{-1} n_6 = B^{-1} j_1 + D^{-1} m_1.$$

Pour un nombre sextique spécial $\upsilon^{-1} = \upsilon^{+} | V = \upsilon^{+} | \upsilon\upsilon^{+}$.

e. *Grandeurs exponentielles.*

1. *Fonctions exponentielles.*

1°. *Définitions.* Soit $C_\nu \subset C_{12}$ le plus simple système partiel dont appartient le nombre sextique υ, u_ν l'unité principale de C_ν; alors la fonction exponentielle

$$E^\nu = u_\nu \sum \frac{\upsilon^n}{n!} \tag{29}$$

et la fonction logarithmique naturelle $l\upsilon$ (tel que $\upsilon = E^{l\nu}$) seront définies par les séries employées en analyse, multipliées par u_ν (en posant $\upsilon^0 = 1$).

2°. *Théorèmes de l'addition.*

α) *Nombres sextiques nonsinguliers.* Les théorèmes

$$E^{\nu+\nu'} = E^\nu E^{\nu'} \text{ et } l\upsilon + l\upsilon' = l(\upsilon\upsilon') \tag{30}$$

et les théorèmes trigonométriques et hyperboliques correspondantes restent valables pour υ, υ' nonsinguliers et complanaires et pour ce cas seulement; si υ est nonsingulier E^ν et $l\upsilon$ sont nonsingulières et complanaires à υ.

β) *Nombres sextiques singuliers complanaires.* $(\upsilon\upsilon' = \upsilon'\upsilon = 0)$. En ce cas, si

$$u_{\nu+\nu'} = u_\nu + u_{\nu'} \text{ (en particulier, } \upsilon = \lambda_1 u_\nu,\ \upsilon' = \lambda_1 u_{\nu'})$$

nous trouvons

$$E^{\nu+\nu'} = E^\nu + E^{\nu'},\ l(\upsilon + \upsilon') = l\upsilon + l\upsilon', \tag{30'}$$

donc $\cosh(\upsilon + \upsilon') = \cosh\upsilon + \cosh\upsilon'$ etc.

γ) *Exponents idempotents.* Si υ, υ' sont des unités idempotentes permutables, de produit nul, il en résulte

$$E^{\nu\lambda_1} = \upsilon E^{\lambda_1},\ E^{\nu'\lambda_1} = \upsilon' E^{\lambda_1},\ E^{\nu\lambda_1 + \nu\lambda_2} = \upsilon E^{\lambda_1} + \upsilon' E^{\lambda_2}, \tag{30''}$$

donc $\cosh(\upsilon\lambda_1 + \upsilon'\lambda_2) = \upsilon\cosh\lambda_1 + \upsilon'\cosh\lambda_2$ etc. (par ex. pour i_3, i_5 de la formule II 26 et aussi par les *u. c. id.*)

2. *La forme exponentielle.*

1°. *Nombres sextiques nonsinguliers.* Posons

$$B_{3,5} = \sqrt{B} E^{\pm\lambda_2},\ B = \sqrt{N} E^{-\lambda_3}, \text{ donc}$$

$$b\,(e_s) = B_3\,i_3 + B_5\,i_5 = \sqrt{B}\,(i_3\,E^{\lambda_2} + i_5\,E^{-\lambda_2}) =$$

$$= \sqrt{B}\,E^{i\lambda_2} = \sqrt[4]{N}\,E^{i\lambda_2 - i\lambda_3/2}.$$

De même

$$k_{1,6} = \sqrt{D}E^{\pm\lambda_1}, \quad D = \sqrt{N}E^{+\lambda_3},$$

donc

$$d(e_s) = k_1\,n_1 + k_6\,n_6 = \sqrt{D}\,(n_1\,E^{\lambda_1} + n_6\,E^{-\lambda_1}) = \sqrt{D}E^{m_6\lambda_1} = \sqrt[4]{N}E^{m_6\lambda_1 + m_1\lambda_3/2}$$

(pour $J^2 = 0$ – quaternion parabolique – la formule reste valable, en posant $\lambda_2 = l/c_1$, $B = c_1^2$). Il en résulte la forme exponentielle du nombre sextique υ

$$(31) \qquad \upsilon = b\,(e_s) + d\,(e_s) = \sqrt[4]{N}\,E^{e_1'\lambda_3/2 + i\lambda_2 + m_6\lambda_1} = \sqrt[4]{N}\,E^{v_1}$$

$$(31') \qquad \lambda_1 = \frac{1}{2}\,l\,(k_1/k_5), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\,l\,(B_3/B_5), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}\,l\,(D/B).$$

Les grandeurs N et

$$v_1 = \frac{1}{2}\lambda_3\,e_1' + \lambda_2\,j + \lambda_1\,m_6$$

sont resp. le module et l'argument du nombre sextique υ.

2°. *Nombres sextiques singuliers.* Soit par ex. $k_6 = 0$, $k_1 B \neq 0$; posons

$$k_1 = \sqrt{B}E^{\lambda_1}, \quad B_{3,5} = \sqrt{B}E^{\pm\lambda_2};$$

on trouve

$$\upsilon = \sqrt{B}E^{\lambda_2 j + \lambda_1 n_1} \quad \text{avec} \quad \lambda_1 = l\,(k_1/\sqrt{B}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\,l\,(B_3/B_5).$$

3. *Le logarithme sextique.*

1°. *Nombres sextiques non singuliers.* Il en résulte une triple infinité de valeurs

$$(31'') \qquad l\,\upsilon = \frac{1}{4}\,lN + l v_1 + 2\pi i(\mu_3\,e_1' + \mu_2\,j + \mu_1\,m_6)$$

$\mu_{1,2,3}$ étant des nombres entiers arbitrairs positifs ou négatifs. Pour $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$, on a la „valeur principale".

2°. *Nombres sextiques singuliers.*

$$l\,j_1 = (0 + 2\lambda\pi i)\,j_1 \qquad l\,j_{3,5}'' = \pm\left(\frac{2}{3}\pi j_3 + 2\lambda\pi i\right)j_1 \qquad l\,j_p' = \left(\frac{1}{2}\pi i j_p + 2\lambda\pi i\right)j_1 - \frac{\pi}{2}i$$

$$l\,m_1 = (0 + 2\lambda\pi i)\,m_6 \quad l\,m_6 = \left(\frac{1}{2}\pi i + 2\lambda\pi i\right)m_6 - \frac{1}{2}\pi i \quad l\,n_{1,6} = 2\pi i n_{1,6}.$$

Il en résultent les logarithmes naturels des unités e_s :

$$le_1 = lj'_i + lm_1 , \qquad le_p = lj'_p + lm_6 .$$

B. *Le système hypercomplexe bisextique* C_{12}.

a. C_{12} *comme algèbre groupale.*

1. *Le groupe* E_{12}.

1°. *Le groupe* E_2. Introduisons les unités $e_1 = 1$, e_7 qui vérifient les axiomes

(32) $$e^2_1 = e_1 , \quad e^2_7 = -e_1 , \quad e_1 e_7 = e_7 e_1 = e_7 .$$

Aux signes près, e_1 et e_7 forment un groupe cyclique E_2, représentant du groupe abstrait $I_2 \subset G_{12}$. En réalité les unités $\pm e_1$, $\pm e_7$ forment un groupe diédrique quadratique. L'ensemble des nombres $a_1 e_1 + a_7 e_7$ ($a_{1,7}$ réels) est le système $C_2(e_1, e_7) = C_2$.

Le système dual C_2 étant hyperbolique, e_7 peut être identifiée avec l'unité imaginaire i ($i^2 = -1$), donc C_2 peut être identifié avec le système complexe ordinaire. Mais en algèbre, géométrie et physique l'emploi de ce dernier est beaucoup plus générale, tandis que l'unité e_7 sera rattachée à l'interprétation relativiste du temps. Nous supposons donc e_7 distincte de i.

2°. *Le groupe* E_{12}. E_6 étant le groupe des unités sextiques naturelles e_s et en supposant les éléments du E_2 *commutatifs* avec les éléments du E_6, le produit direct des groupes E_6 et E_2 est le groupe E_{12}, représentant du groupe abstrait G_{12}. La théorie du groupe G_{12} est entièrement valable pour E_{12}, aux signes près (en changeant G, I, L avec E et g avec e). E_{12} est le groupe des 12 unités hyperimaginaires bisextiques e_τ ($= e_s, e_t$) ; les indices τ, s, t prennent les valeurs indiquées en ($N1$). A savoir :

(33) $$e_s = e_1 e_s , \quad e_t = e_{s+6} = e_7 e_s = e_s e_7 .$$

2. *Le système bisextique* C_{12}.

1°. *Système sextique et bisextique.* $C_2(e_1, e_7) = C_2$ étant le système dual hyperbolique défini plus haut, C_6 le système sextique, le système bisextique C_{12} à unité e_τ est le produit des systèmes C_6 et C_2 (les éléments du C_2 étant commutatifs avec les éléments du C_6). Chaque nombre bisextique est une somme

(33') $$v(e_\tau) = v'(e_s) + v''(e_t) = e_1 v'(e_s) + e_7 v''(e_s) ;$$

$v'(e_s)$ et $v''(e_s)$ sont des nombres sextiques à coefficients réels. Soit

$$\upsilon'(e_s) = \Sigma a_s e_s , \quad \upsilon''(e_t) = \Sigma a_t e_t = e_7 \Sigma a_t e_s ;$$

on a

$$\upsilon(e_\tau) = \Sigma a'_s e_s , \quad a'_s = a_s e_1 = a_t e_7 .$$

Les nombres bisextiques sont nombres sextiques à coefficients a'_s appartenant au système dual $C_2(e_1, e_7)$. Nous appellons $\upsilon'(e_s)$ le terme réel, $\upsilon''(e_t)$ le terme imaginaire du nombre bisextique $\upsilon(e_\tau)$. Pour $a_s = a_t = 0$ (pour $s \neq 1$, $t \neq 7$) υ se réduit au nombre $a_1 + e_7 a_7$.

Nous avons développée la théorie du C_6 pour coefficients complexes ordinaires, elle est donc valable pour coefficients appartenant au C_2, donc pour la théorie du système bisextique C_{12} ; reste de préciser le rôle des unités e_t.

2^0. C_{12} *comme triple produit.* Considérons les systèmes (algèbres) groupales cycliques

$$(34) \qquad C_3(e_i) = C_3 , \quad C_2(e_1, e_p) = C_2^p , \quad C_2(e_1, e_7) = C_2 ,$$

C_3 ayant les unités

$$e_i \text{ ou } m_i , \text{ ou encore } e_1, e_1', e_3' .$$

L'index p étant fixe (soit $p = 6$),
les „produits" deux à deux sont les systèmes

$$(34') \qquad C_6 = C_3 C_2^p , \quad C_2 C_2^p , \quad C_2 C_3 ;$$

ils sont des sous-systèmes du C_{12} ; de même des systèmes (34).

Le système bisextique est le produit des systèmes (34) :

$$(35) \qquad C_{12} = C_3 C_2^p C_2 = C_6 C_2 .$$

Le nombre sextique est un nombre appartenant à C_3 ,

$$\upsilon = \lambda_1 e_1 + \lambda_3 e_3 + \lambda_5 e_5 ,$$

les λ_i étant les éléments du C_2^p

$$\lambda_i = \lambda_{i1} e_1 + \lambda_{ip} e_p \ (p \text{ fixe}),$$

les coefficients appartenant au C_2 :

$$\lambda_{i1} = e_1 \lambda_{i11} + e_7 \lambda_{i17} ; \quad \lambda_{ip} = \lambda_{ip1} e_1 + \lambda_{ip7} e_7 .$$

Les unités des systèmes (34), (34'), (35) sont les représentantes des certains sous-groupes du I_{12} ; la décomposition (35) correspond à la décomposition (I 17) du I_{12}. Cette „décomposition" en systèmes-facteurs" du C_{12} est plus générale que la décomposition usuelle, les éléments du C_3 et C_2^p n'étant pas commutatifs.

b) *Multiplication des nombres bisextiques.*

1. *Multiplication des unités.*

1⁰. *Produits.* Les axiomes de la multiplication (I,9) du groupe abstrait G_{12} donnent

$$(36)\qquad \begin{aligned} &e_s\, e_r = e_{s_r} \quad , \quad e_r\, e_s = e_{r_s} \\ &e_t\, e_u = -\, e_{s_r} \quad , \quad e_u\, e_s = e_7\, e_{r_s} = e_{t'} \quad , \quad e_s\, e_u = e_7\, e_{s_r} = e_{t'}. \end{aligned}$$

2⁰. *Puissances.* On a

$$e_i^1 = e_1\,, \quad e_i^3 = e_1\,, \quad e_p^2 = e_1\,;$$
$$e_7^4 = e_1\,, \quad e_9^{12} = e_{11}^{12} = e_1\,, \quad e_\pi^4 = e_1\,.$$

Les ordres des éléments des classes conjuguées sont respectivement *1, 3, 2; 4, 12, 4.*

Inverses :

$$e_i^{-1} = e_i^2\,, \quad e_j^{-1} = -\, e_j^2\,; \quad e_p^{-1} = e_p\,, \quad e_q^{-1} = -\, e_q\,.$$

3⁰. *Signes :* pour $e_1 > 0$, toutes les formules de multiplication sont *invariantes* pour les changements des signes des e_π, par opposition aux changements des signes des e_t. De même, elles sont *invariantes* pour les changements des signes des unités e_t, par opposition aux e_s.

2. *Multiplication des nombres bisextiques.*

1⁰. *Commutation.* Les nombres bisextiques v, v' sont permutables si

$$v = \lambda v' + v'',$$

v'' étant un nombre sextique central (voir 37), les λ_γ étant des coefficients arbitraires. Comme cas particulier les nombres $v = \Sigma a_t e_t$ sont permutables.

2⁰. *Le centre.* Un nombre sextique central est de la forme à coefficients λ (ou μ) réels

$$(37)\qquad v'' = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_7 + \lambda_3 m_1 + \lambda_4 m_7 + \lambda_5 m_6 + \lambda_6 m_{12}$$

ou

$$(37')\qquad v'' = \mu_1 j_1''' + \mu_2 n_1''' + \mu_3 n_6''' + \mu_4 j_7' + \mu_5 n_7''' + \mu_6 n_{12}'''$$

(le nombre des classes des éléments conjugués étant 6).

3⁰. *Unités centrales idempotentes.* Elles ont la forme

$$(37'')\qquad v = \lambda'_1 j_1 + \lambda'_2 n_1 + \lambda'_3 n_6$$

ou la forme (37') telle que chaque coefficient λ' peut adopter les valeurs

$$0, 1\,; \quad e_{1,7}''' = \frac{1}{2}(e_1 \pm i e_7)$$

et chaque μ_s les valeurs $0, 1$,

donc $4^3 = 64$ u. c. id. La combinaison exclusive des valeurs réelles $0, 1$ donne j_1, $n_{1,6}$; les unités

$$j'''_{1,7} = j_1 e'''_{1,7} ; \; n'''_{1,7} = n_1 e'''_{1,7} ; \; n'''_{6,12} = n_6 e'''_{1,7}$$

sont les „unités id. c. fondamentales".

c. *Réduction du système bisextique.*

1. *Réduction des systèmes partiels.*

Les transformations (II, 13) pour m_i et les transformations

$$(38) \qquad e'''_{1,7} = \frac{1}{2}(e_1 \pm i e_7) \text{ et } (38') \; e''_{1,p} = \frac{1}{2}(e_1 \pm e_p)$$

donnent les unités idempotentes m_i, $(e'''_{1,7})$ et $e''_{1,p}$ tel que le produit des unités appartenants au même groupe de formules est nul.

Ces transformations décomposent resp. les sous-systèmes (34) du C_{12} en 3, 2, resp. 2 systèmes partiels, tels que les produit des éléments appartenant aux systèmes partiels distincts s'annullent tous.

C_2 est complexe-réductible à deux systèmes partiels aux unités e''_1, e'''_7. C_2^p est réel-réductible à deux systèmes partiels aux unités e''_1, e''_p. C_3 est réel-réductible à deux systèmes aux unités (j_1, j_3) et m_1, dont le premier est complexe-réductible à deux systèmes d'unités m_3, m_5 respectivement. Les unités m_1, e''_1, e'''_1 correspondent respectivement aux groupes (I, 17').

2. *Réduction du système C_{12}.*

1°. *Les 3 étapes de la transformation.* Effectuons 3 transformations telles que

$$(39) \qquad \Sigma a_\tau e_\tau = \Sigma h_\tau m_\tau = \Sigma k_\tau n_\tau = \Sigma l'_\tau p'_\tau .$$

Les e_τ, m_τ, n_τ, p'_τ sont des unités bisextiques, les a_τ, h_τ, k_τ, l'_τ, des coefficients (réels ou complexes ordinaires). Appellons les unités m_τ et les coefficients h_τ, de même n_τ et k_τ, p'_τ et l'_τ resp. unltés (coefficients) „réduits" de premier, II-ième, III-ième ordre.

Transformation I. Les formules de transformation qui donnent resp. h_i, h_p, h_i, h_q, resp. en fonction des a_i, a_p, a_i, a_q et les unités m_τ en fonction des e_τ sont (II, 13, 14) et les formules correspondantes, qui s'obtiennent en remplaçant l'index par t. Les unités m_i sont idempotentes, m_p nilpotentes pour $e = 2, 4$, ensuite $m_6^2 = m_1$; les produits mixtes $m_i m_{i'} = 0$, $m_2 m_4 = m_3$, $m_4 m_2 = m_5$ $(i' \neq i)$.

Transformation II.

$$(40) \qquad n_{\iota,\pi} = \frac{1}{2}(m_\iota \pm m_\pi) ; \; k_{\iota,\pi} = h_\iota \pm h_\pi .$$

Les unités n_s sont idempotentes. Les produits mixtes sont

$$n_1 n_6 = 0,\ n_6 n_1 = 0,\ n_3 n_2 = -n_2,\ n_2 n_3 = -n_3,$$
$$n_5 n_4 = -n_4,\ n_4 n_5 = -n_5.$$

Transformation III.

$$(41) \qquad p'_{s,t} = \frac{1}{2}(n_s \pm i n_t);\ l'_{s,t} = k_s \mp i k_t\ (i^2 = -1).$$

Tous p_τ sont idempotentes et singulières :

$$p'^2_\tau = p'_\tau;\ p'_s p'_t = 0.$$

Les autres produits des unités d'un même groupe de formules en résultent des relations

$$m_t m_u = -m_s m_r;\ \text{de même pour } n_t,\ p_t.$$

Les unités (coefficients) de même ordre (I, II) correspondantes aux couples d'indices *3* et *5*, *2* et *4*, *9* et *11*, *8* et *12*, sont imaginaires-conjuguées. Les transformations (II 40, 41) s'obtiennent des transformations (II 38, 38') en remplaçant convenablement les unités à droite et à gauche.

2⁰. *Réductibilité du système* C_{12}. Par l'introduction des unités principales j_1, m_1, C_{12} est réel-réductible à deux systèmes partiels C_8, C_4 à unités principales j_1 resp. m_1. Pour C_8, en opposition à C_4, l'introduction des unités „réduites" de premier et de 2-ième ordre (transformations II 13 et II 40) n'entraîne aucune décomposition en systèmes partiels, car les produits des éléments appartenants aux indices opposés ne s'annullent pas tous.

Par contre, la transformation de 3-ième ordre (= la transformation *complexe* II 41) décompose C_8 (comme les sous-systèmes $C_2\ (n_{1,7})$ et $C_2\ (n_{6,12})$ du C_4) en 2 systèmes partiels C_4', C_4'' respectivement.

Conclusions : C_{12} est réel-réductible à 2 systèmes partiels C_8, C_4 dont $C_4\ (m\gamma_1)$ est réel-réductible à 2 systèmes partiels, $C_2\ (n_{1,7})$, $C_2\ (n_{6,12})$. C_8, $C_2\ (n_{1,7})$ et $C_2\ (n_{6,12})$ se décomposent en 2 systèmes chacun ; elles sont complexes-réductibles, à savoir :

$$C_2\ (n_{1,7}) = C_1\ (p'_1) + C_1\ (p'_7);\ C_2\ (n_{6,12}) = C_1\ (p'_6) + C_1\ (p'_{12}).$$

Le système biquaternionique C_8 a les bases

j_t, $j_{t+6} = j\ \psi\ (t = 1, 2, 3, 4)$ ou les unités réduites des indices $\gamma' = \gamma_{3,5}$.

Les sous-systèmes partiels du C_8 sont $C_4''\ (p'_{\gamma_3})$ et $C_4'(p'_{\gamma_5})$.

Le système $C_4\ (m\gamma_1)$ est un système diédrique quadratique, chacun des systèmes $C_2\ (n_{1,7})$ et $C_2\ (n_{6,12})$ est un système dual hyperbolique.

3⁰. *Réduction du C_{12} et groupes abstraits.* A chaque sous-groupe du E_{12} (ou G_{12}) se rattache un sous-système groupale (algèbre groupale) du C_{12}. Cas particulier, à chaque suite de composition, et à chaque suite des groupes-facteurs correspondent des suites des systèmes hypercomplexes, sous-systèmes du C_{12}, tels que les éléments de chaque groupe sont les bases du système hypercomplexe correspondant. Particulièrement, aux suites I_δ, J_n, J_m correspondent les suites des systèmes hypercomplexes C_δ, C_n, C_m.

A la suite de composition (I, 16) correspond la suite (42) des systèmes invariants C_δ chacun à l'unité principale e_1.

	β	0	1	2	3
(42)	C_δ	$C_1(e)_1 \subset C_3(e_i)$	$\subset C_6(e_s)$	$\subset C_{12}(e_\tau)$	
(43)	C_n	$C_{12}(e_\tau) \supset C_4(m_{\gamma_1})$	$\supset C_2(n_{1,7})$	$\subset C_1(p'_1)$	
(44)	C_φ	$C_0(0)$	$C_8(m_{\gamma 3,5})$	$C_2(n_{6,12})$	$C_1(p'_7)$
(45)	C_m	$C_0(0)$	$C_3(e_i)$	$C_2(m_1, m_6)$	$C_2(n_1, in_7)$
(46)	C'_m	$C_0(0)$	$C_3(e_i)$	$C_2(e_1, e_p)$	$C_2(e_1, e_7)$

β étant l'ordre de la colonne ($\beta = 0, 1, 2, 3$), on a $\delta = 3.2^{\beta-1}$, $n = 12/\beta = 2^{3-\beta}$, $\varphi = 2^{n-1}$.

(43')	ω_n	e_1	m_1	n_1	p_1
(44')	ω_φ	0	j_1	n_6	p_7
(45')	ω_m	0	e'_1	m_6	in_7.

A la suite des groupes-facteurs (I, 19)

$$J_n = I_{12}/I_\delta = J_{n_1}/J_{m_1}$$

correspond la suite (43) des systèmes „factoriels" C_n, dont les bases sont les éléments du J_n (= classes secondaires du G_{12} par rapport à I_δ = classes secondaires de J_{n_1} par rapport à J_{m_1}). Les unités principales ω_n des systèmes C_n forment la suite (43'). Elles sont resp. les sous-groupes invariants I_δ (ou E_δ) (divisés par l'ordre δ du groupe), car les ω_n ont les valeurs explicites

$$e_1, \quad m_1 = \frac{1}{3}\Sigma e_i, \quad n_1 = \frac{1}{6}(\Sigma e_s) = m_1 e_1'', \tag{43''}$$

$$p_1 = \frac{1}{12}(\Sigma e_s + i\Sigma e_t) = m_1 e_1'' e_1'''.$$

A côté de la suite C_n, on a la suite (44) des systèmes C_φ tel que

$$n_1 = n + \varphi \ , \quad C_{n_1} = C_n + C_\varphi .$$

Chaque système factoriel C_{n_1} de la suite (41) est total-réductible aux systèmes partiels invariants C_n (système-factoriel du C_{12} par rapport à C_δ ou encore système factoriel de C_{n_1} par rapport à J_{m_1}), et C_φ. C_n et C_φ seront dits „complémentairs" (C_φ complémentaire du C_n par rapport à C_{n_1} et inversement. Les éléments de la suite J_n sont groupes-facteurs chacun par rapport à l'élément précédent ; de même pour les systèmes. Les unités principales ω_φ des systèmes C_φ forment la suite (44') telle que

$$\omega_{n_1} = \omega_n + \omega_\varphi , \quad \omega_n \omega_\varphi = 0 ; \tag{47}$$

les valeurs explicites $\omega_\varphi \ldots 0$, $j_1 = e_1 j_1$, $n_6 = m_1 e_p''$, $p_7 = m_1 e_1' e_7'$.

A la suite des groupes-facteurs (I 21)

$$J_{m_1} = I_\delta / I_{\delta_1}$$

correspond la suite (45) des systèmes C_{m_1}, dont les bases sont les éléments du J_m (= les classes secondaires du I_δ par rapport à I_{δ_1} (divisés par l'ordre δ_1 du groupe). En remplaçant e_3, $e_5 \subset C_3$ par e_1', il résulte un système dual

$$C_2 \ (e_1 \ e_1') \quad \text{(le centre de } C_{12}).$$

Les unités primitives ω_m des 3 systèmes duales elliptiques

$$C_2(e_1, e_1') \ , \quad C_2(m_{1,6}) \ , \quad C_2(n_1, in_7)$$

forment la suite (45'), tel que

$$\omega_{m_1} = \omega_n - \omega_\varphi ; \tag{47'}$$

Leurs unités principales sont les éléments ω_n. On a $\omega_n = \frac{1}{2}(\omega_{n_1} + \omega_{m_1})$ tel que $p_1 = \frac{1}{2}(n_1 + in_7)$, $n_1 = \frac{1}{2}(m_1 + m_6)$, $m_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_1') = \frac{1}{3}\Sigma e_i$ par correspondance à (I, 22). Le système C_m est le produit du système C'_m (voir II 34) avec l'unité principale ω_{n_1} du système factoriel C_{n_1}, les systèmes C'_m forment la suite (46).

J_{m_1} étant sous-groupe invariant du J_{n_1}, on a

$$C_{m_1} \subset C_{n_1} \quad \text{et} \quad C_2(e_1 e_1') \subset C_3 \subset C_{12}$$

comme sous-systèmes invariants du C_{12}.

4⁰. *Unités négatives et imaginaires.*

α) Pour les systèmes C_n, l'équation

$$x\omega_n = -\omega_n$$

n'admet que les solutions $x = -\omega_g\ (g \geqslant n)$ (y compris $x = -e_1$).

Pour les systèmes complémentaires $C\varphi$, l'équation

$$x\omega_\varphi = -\omega_\varphi$$

admet en outre les solutions

$$x = -\omega_h\ (h > n) \qquad x = -\omega_\varphi, \qquad x = \omega_{m_1}$$

par ex.

$$e_1' j_1 = (e_3 + e_5) j_1 = -j_1 \qquad e_1' j = (e_3 + e_5) j = -j$$
$$m_6 n_6 = e_p n_6 = -n_6 \qquad in_7 p_7 = ie_t p_7 = -p_7 .$$

L'existence des unités négatives $-\omega_\varphi$ (conjuguée duale du $+\omega_\varphi$) revient donc à l'existence des unités primitives ω_{m_1} pour chaque système dual C'_{m_1} ou C_{m_1} de rang supérieur.

β) D'une façon plus générale, l'équation $x^2 = e_1$ admet 2 suites de solutions à savoir

8 valeurs $x = \pm j_1 \pm n_1 \pm n_6$ donc $\pm e_1, \pm e_1', \pm (m_6 \pm j_1)$

et une infinité de valeurs $x = j \pm m_1$ et $x = j \pm m_6$.

γ) Les systèmes C_n et C_φ admettent des unités „imaginaires", solutions des équations

$$\omega_n x^2 = -\omega_n , \quad \omega_\varphi x^2 = -\omega_\varphi$$

C_8 seul admet une solution sextique à coefficients réels par rapport aux unités $e_s\ (j_3^2 = -j_1)$.

δ) D'une façon plus générale, l'équation $x^4 = e_1$ admet dans le système C_6 3 suites de solutions,

$$x = c_1 j_1 + j\sqrt{J} + k_1 n_1 + k_6 n_6 .$$

On a $k_1^4 = k_6^4 = 1$; du reste une triple infinité des solutions, correspondantes aux valeurs

$$c_1^4 = 1, \quad J = 0 \qquad c_1 = 0, \ J^2 = 1 \qquad c_1^2 = \mp i/2, \ J = \pm i/2.$$

Les solutions e_2', $e_4' = -m_2 \pm m_4 - m_6$ appartiennent à la 2-ième suite, i à la première. Si on identifiera $e_3 = \varepsilon$, $e_5 = \varepsilon^2$ (racines cubiques complexes de l'unité dans le domaine réel), on aura

$e_3 + e_5 = -1$, $j_3 = -i$, $e_1' = -1$, $m_1 = 0$, $m_3 = 0$, $m_5 = 1$, $j_1 = 1$

donc

$$v = h_5 , \quad V = Ue_1 + We_1' = U - W$$

donc j_3, e_1' sont des généralisations des unités -1, $-i$.

3. *La forme quaternionique.*

1°. *Les matrices-commutateurs.* Les unités (matrices) j_3, j_2, j_4; j_9, j_{10}, j_8 du terme axiale ont la forme $e_s e_r - e_r e_s$ resp. des produits de cette expression par e_7 („commutateurs" de type Heisenberg):

$$
\begin{aligned}
j_3 &= 1/\sqrt{3}\,(e_4 e_2 - e_2 e_4) = 1/\sqrt{3}\,(j_4 e_2 - e_2 j_4) = \\
&= 1/\sqrt{3}\,(e_4 j_2 - j_2 e_4) = \frac{1}{2}(j_4 j_2 - j_2 j_4) \\
j_4 &= 1/\sqrt{3}\,(e_3 e_2 - e_2 e_3) = 1/\sqrt{3}\,(j_3 e_2 - e_2 j_3) = \\
&= 1/\sqrt{3}\,(e_3 j_2 - j_2 e_3) = \frac{1}{2}(j_3 j_2 - j_2 j_3) \qquad (48) \\
j_2 &= \qquad = 1/\sqrt{3}\,(j_4 e_3 - e_3 j_4) = \\
&= 1/\sqrt{3}\,(e_4 j_3 - j_3 e_4) = \frac{1}{2}(j_4 j_3 - j_3 j_4).
\end{aligned}
$$

2°. *Formes linéaires.* Désignons l'expression:

$$
\begin{gathered}
\upsilon = b\,(e_\tau) + d\,(e_\tau),\quad b = \Sigma\, c_f\, j_f + \Sigma\, c_\psi\, j_\psi, \\
d = k_1\, n_1 + k_6\, n_6 + k_7\, n_7 + k_{12}\, n_{12} \qquad (49) \\
(\psi = f + 6),\ j_\psi = e_7\, j_f
\end{gathered}
$$

comme „forme biquaternionique" du nombre bisextique υ; b est le terme biquaternionique, d est le terme bidual.

Le terme centrale est

$$c\,(e_\tau) = c_1 j_1 + c_7 j_7 + d. \qquad (50)$$

Le terme axiale est

$$c'\,(e_\tau) = c_3 j_3 + c_2 j_2 + c_4 j_4 + c_9 j_9 + c_8 j_8 + c_{10} j_{10}, \qquad (51)$$

avec la norme

$$-J^0 = c_3^2 - c_2^2 - c_4^2 - c_9^2 + c_8^2 + c_{10}^2. \qquad (51')$$

De même on pose (le cas parabolique $J^{0^2} = 0$, excepté)

$$j_0 = c'\,(e_\tau) / \sqrt{J^0},\ c'\,(e_\tau) = j_0 \sqrt{J^0}. \qquad (51'')$$

d. *La norme bisextique*

1. *La norme quartique.*

1°. *L'expression des normes partielles.* Soit

$$\upsilon = \upsilon\,(e_\tau) = \upsilon\,(e_s) + e_7\, \upsilon'\,(e_t).$$

Les normes du terme biquaternionique

$$b\,(e_\tau) = b\,(e_s) + e_7\, b'\,(e_s)$$

et du terme bidual

$$d\,(e_\tau) = d\,(e_s) + e_7\, d'\,(e_s)$$

sont

$$\begin{aligned} B\,(a_\tau) &= B\,(a_s) - B\,(a_t) + 2e_7\, B(a_s,\ a_t) \\ D\,(a_\tau) &= B\,(a_s) - D\,(a_t) + 2e_7\, D\,(a_s,\ a_t), \end{aligned} \tag{52}$$

$2B\,(a_s,\ a_t)$ et $2D\,(a_s,\ a_t)$ étant 2 formes bilinéaires en a_s, a_t correspondantes aux formes quadratiques $B\,(a_s)$, $D\,(a_s)$.

2^0. *La norme quartique.* On a la norme quadratique

$$V\,(a_\tau) = B\,(a_\tau)\ j_1 + D\,(a_\tau)\ m_1\ .$$

La norme quadratique est un nombre bisextique centrale à 4 unités $m_1\, a_\tau$, j_1 ; m_7, j_7. De même sa conjuguée par rapport à e_7, $V^+\,(a_\tau)$. La norme quartique $N\,(a_\tau) = B\,(a_\tau)\ D\,(a_\tau)$ est un nombre appartenant au système $C_2\ (e_1, {}_7)$.

2. *La norme de 8-ième degré.*

1^0. *L'expression de la norme.* $N(a_\tau)$ et $N^{\sim}(a_\tau)$ étant conjuguées par rapport à e_7, la forme de $8^{\sim}$ ième degré.

$$\bar{N} = N\,(a_\tau)\ N^{\sim}\,(a_\tau) \tag{53}$$

est un nombre réel, la norme totale du nombre bisextique υ.

2^0. „*L'équation de rang*" du système bisextique C_{12} est de 8-ième degré ; elle se décompose en 6 équations partielles, correspondantes aux 6 systèmes partiels irréductibles

$$\begin{aligned} &[x^2 - 2c_1\, x + B(a_s)]\ [x^2 - 2c_7\, x + B(a_t)]\ [x^2 - 2h_1 x + D(a_s)] \times \\ &\times [x^2 - 2h_7\, x + D(a_t)] = [x^2 - 2c_1\, x + B(a_s)]\,[x^2 - 2c_7 x + B(a_t)] \times \\ &\times (x - k_1)\ (x - k_6)\ (x - k_7)\ (x - k_{12})\ . \end{aligned} \tag{54}$$

3^0. *L'inverse d'un nombre sextique* nonsingulier est

$$\upsilon^{-1} = (\upsilon\hat{\upsilon}N^{\sim})/\bar{N}\ .$$

e. *Grandeurs exponentielles.*

1. *Forme exponentielle du nombre bisextique.*

Par la substitution (II,38), la forme (II, 33') du nombre bisextique devient

$$v''(e_s)\,e''_1 + v''^*(e_s)\,e''_7 .$$

Les formes linéaires

$$v''(e_s) = v(e_s) + iv'(e_s) , \quad v''^* = v(v_s) - iv'(e_s)$$

sont imaginaires-conjuguées. D'après (II 31), on a

$$v'' = \sqrt[4]{N} E^{v_1} , \quad v''^* = \sqrt[4]{N^*} E^{v_1^+} .$$

Posons

$$N = \sqrt{NE}^{\lambda_4}, \quad N^* = \sqrt{N}\,E^{-\lambda_4}$$

on a

$$v = \sqrt[8]{N}\,(E^{v_1 + \frac{1}{4}\lambda_4}\,e''_1 + e''_7\,E^{v^*_1 - \frac{1}{4}\lambda_4}) = \sqrt[8]{N}\,E^{(v_1 + \frac{1}{4}\lambda_4)\,e''_1 + (v^*_1 - \frac{1}{4}\lambda_4)\,e''_7}$$

$$v = \sqrt[8]{N}\,E^{v_2}. \tag{55}$$

L'exponent v_2 a la valeur

$$v_2 = v'_1 + \frac{1}{4}\lambda_4\,e_7 ,$$

et v_1' résulte de v_1 en remplaçant dans les coefficients, l'unité i par e_7. Donc

$$v_1 = \lambda_1\,m_6 + \lambda_2\,j + \frac{1}{2}\lambda_3\,e'_1 + \frac{1}{4}\lambda_4\,e_7 . \tag{55'}$$

Les coefficients

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}l\,(k_1|k_6), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}l\,(B_1|B_2), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}l(D|B) , \quad \lambda_4 = \frac{1}{2}l(N|N^+) \tag{55''}$$

sont formes linéaires en e_1, e_7 (appartenant donc au système C_2). Les formes quadratiques D, B et de même B_1, B_2, k_1, k_6, sont fonctions des coefficients a_τ.

2. *Logarithmes des nombres bisextiques.*

On a

$$l\,v = \frac{1}{8}l\,N + v_2 + 2\pi e_7\,(\mu_1\,e_1 + \mu_2\,e'_1 + \mu_3\,j + \mu_4\,m_6) , \tag{56}$$

donc

$$l\,m_t = l\,m_s + \frac{1}{2}\pi e_7 ; \quad l\,j'_t = l\,j'_s + \frac{1}{2}\pi e_7 ; \quad l\,n_t = l\,n_s + \frac{1}{2}\pi e_7$$

$$l\,e_t = l\,e_s + \frac{1}{2}\pi e_7 ; \text{ cas particulier: } l\,e_7 = \frac{1}{2}\pi e_7 + 2\mu\pi e_7 \ (\mu_t \text{ entier} \gtrless 0) .$$

III. Géométrie abstraite d'action (physique abstraite).

(L'espace hypercomplexe bisextique S_{12}).

A. *Géométrie affine.*

a. *L'espace vectoriel affine.*

1. *Notions géométriques.*

1⁰. *L'espace* S_{12}. Pour la géométrie vectorielle affine générale voir *B* (6, *11*). Désignons les vecteurs correspondants aux nombres bisextiques avec des petites lettres barrées. L'espace hypercomplexe bisextique est l'ensemble des vecteurs

$$\bar{v} = \Sigma a_\tau \bar{e}_\tau , \tag{1}$$

$\bar{e}_\tau$ étant les vecteurs de base (vecteurs unitaires naturels), a_τ les composantes naturelles (réelles). En posant

$$\bar{e}_\tau = e_\tau \bar{v}_\tau , \qquad b = a_\tau e_\tau \subset C_{12} ,$$

$\bar{v}_\tau$ étant les vecteurs réels, b_τ des composantes scalaires hyperimaginaires, on écrit

$$\bar{v} = b_\tau \bar{v}_\tau .$$

2⁰. *L'espace* S'_{12}. Dans un espace bisextique généralisé S'_{12}, on peut faire correspondre à chaque index bisextique τ, un nombre de ν_τ vecteurs linéaires-indépendants $\bar{e}_\tau \nu_\tau$ et donc ν_τ dimensions. L'espace S'_{12} a alors $\Sigma \tau \nu_\tau$ dimensions. Chaque vecteur du S_{12} a la forme

$$\bar{v} = a_\tau \nu_\tau \bar{e}_\tau \nu_\tau .$$

Pour l'espace physique relativiste classique on a $\nu_1 = 3$, $\nu_7 = 1$ donc 3 dimensions „spatielles" et une seule dimension „temporelle". Nous supposons aux pages suivantes $S'_{12} \equiv S_{12}$, donc à chaque index bisextique rattachée une seule dimension ($\nu_1 = \ldots \nu_{12} = 1$).

2. *Interprétation physique.*

1⁰. *La décomposition du monde physique.* Les 3 couples présentés en physique théorique sont

(2)

(β)	3	2	1
a	espace	gravitation	métrique
b	temps	électro-magnétisme	matière

Nous appelons les grandeurs (*a*) „grandeurs géométriques", les grandeurs (*b*) „grandeurs physiques". Le couple métrique-matière se

décompose en triple, donnée la décomposition de la matière en énergie et charge. Le couple métrique-matière est donc équivalent au triple métrique-énergie-charge. On a donc $2.2.3 = 12$ grandeurs = l'ordre du groupe abstrait G_{12} comme aussi du système hypercomplexe C_{12} et le nombre des dimensions de l'espace S_{12}.

2⁰. *Interprétation des vecteurs naturels.*

α) *Notations à un index.* Suivant les notations générales (*NI*) utilisées plus haut, désignons par

(3) $\bar{e}_s$ les vecteurs spatiels, $\bar{e}_t$ les vecteurs temporels

(3') $\bar{e}_\iota$ les vecteurs gravifiques, $\bar{e}_\pi$ les vecteurs électromagnétiques

(3'') $\bar{e}_{\gamma_1}$ (= $\bar{e}_1, \bar{e}_6$; $\bar{e}_7, \bar{e}_{12}$) les vecteurs métriques (éléments identiques et supplémentaires à $\bar{e}_{1,7}$)

$\bar{e}_{\gamma'}$ les vecteurs matériels, à savoir

$\bar{e}_{\gamma_3}$ ($\bar{e}_3, \bar{e}_2, \bar{e}_9, \bar{e}_8$) les vecteurs énergétiques (éléments polaires et complémentaires à $\bar{e}_{1,7}$)

$\bar{e}_{\gamma_5}$ ($\bar{e}_5, \bar{e}_4, \bar{e}_{11}, \bar{e}_{10}$) les vecteurs-charges (éléments antipolaires et correspondants à $\bar{e}_{1,7}$).

La même terminologie s'applique aux vecteurs comme aux composantes, en désignant successivement l'appartenance aux couples *1, 2, 3.* Par ex. a_3 est „l'énergie gravitationnelle spatielle", a_{10} = charge électromagnétique temporelle.

β) *Notations à 3 indices.* Notons

$$\bar{v} = a_{ghi}\, \bar{e}_{ghi}\,.$$

$g = 1, 2,$ (espace-temps)

$h = 1, 2,$ (gravitation-électromagnétisme)

$i = 1, 3, 5$ (métrique-énergie-charge).

b. *Sous-espaces du S_{12}.*

1. *Sous-espaces en général.*

1⁰. *Sous-espaces arbitraires.* Un sous-espace $S_\lambda \subset S_{12}$ du S_{12} est l'ensemble des formes linéaires $\mu_1 v_1 + \ldots \mu_\lambda v_\lambda$, $v_1 \ldots v_\lambda$ étant vecteurs linéaires indépendants. L'espace S_{12} considéré comme groupe *additif continue*, on définit des sous-espaces invariants et factoriels (par rapport aux certaines transformations linéaires) comme aussi les notions de la réductibilité et réductibilité totale, comme en géométrie vectorielle affine générale (voir *B* 6, 7).

2⁰. *Sous-espaces groupales.* Au système bisextique C_{12} (donc aux groupes E_{12} resp. G_{12}) correspond l'espace S_{12}, à chaque sous-système

C_γ (cas particulier, à chaque complexe du E_{12}) correspond un sous-espace S_γ du S_{12}, tel qu'aux bases du C_γ correspondent les vecteurs de bases respectives. Aux complexes du E_{12} correspondent des sous-espaces à bases linéaires-indépendantes. En particulier, à chaque sous-groupe du E_{12} (ou G_{12}, donc à chaque sous-système groupale du C_{12}) correspond un „sous-espace groupale" du S_{12}. La décomposition du monde physique est mathématiquement réalisée en deux façons: 1. décomposition en produit de C_{12} (ou G_{12}) = décomposition *simultanée* à couples opposées géométriques-physiques (décomposition représentée par un hypervolume en S_{12}) 2. décomposition du C_{12} (G_{12}) en classes secondaires = décomposition *progressive* en couples opposés (représentés par la forme quadratique V' resp. ds^2) (voir I 21').

α) *Décomposition en classes secondaires.* Si

$$I_{\alpha_1} \subset L_\alpha$$

est un sous-groupe invariant d'un sous-groupe noninvariant L_α, I_{α_1} représente une réalité géométrique, tandis que le complexe

$$I'_{\alpha_1} = L_\alpha - I_{\alpha_1}$$

formé des classes secondaires du L_α par rapport à I_{α_1} représente une réalité physique. Le sous-groupe L_α, représente donc une unité duale géométrique physique.

β) C_{12} *comme produit.* Aux sous-systèmes C'_m (II 46) du C_{12}, donc aux groupes (I 17') du G_{12}, correspondent les sous-espaces

$$S_3,\ S_2(p),\ S_2 \tag{4}$$

aux bases groupales. Les bases de chacun des sous-espaces (III 4) représentent la dualité géométrique-physique d'un couple d'ordre β déterminé (III 2) et appartiennent aux termes géométriques des autres couples.

2. *Sous-espaces groupales invariants.*

1°. *Sous-espaces groupales invariants en général.*

α) *Définitions.* Aux sous-groupes invariants et aux groupes-facteurs du G_{12}, donc aux suites des sous-systèmes „invariants" (dont certains sous-systèmes factoriels et complémentaires du C_{12}), correspondent des sous-espaces „invariants" du S_{12}, dont certains sous-espaces „factoriels" et „complémentaires". Les notions de „sous-espace invariant", „sous-espace factoriel", „sous-espace complémentaire" (et donc la notion de la réductibilité totale du S_{12}) que nous venons de définir ici se rattache aux groupes *multiplicatifs finis* (G_2) et donc à la réduction totale du système hypercomplexe C_{12} en systèmes partiels ir-

réductibles. Ces notions sont donc plus restreintes que le sens usuel des mots „sous-espace invariant, factoriel, complémentaire, réductible et totale-réductible", lié aux groupes *additifs continus*.

β) *Suites des sous-espaces invariants et factoriels.* Aux suites (II 42, 46) des systèmes hypercomplexes invariants et factoriels correspondent des suites des sous-espaces invariants et factoriels (III 5-9)

	β	0	1	2	3
(5)	S_δ	$S_1(\bar{e}) \subset$	$S_3(\bar{e}_i) \subset$	$S_6(\bar{e}_s) \subset$	$S_{12}(\bar{e}_\tau)$
(6)	S_n	$S_{12}(\bar{e}_\tau) \supset$	$S_4(\bar{m}_{\gamma_1}) \supset$	$S_2(\bar{n}_{1,7}) \supset$	$S_1(\bar{p}_1)$
(7)	S_φ	$S_0(\bar{0})$	$S_8(\bar{m}_{\gamma_{3,5}})$	$S_2(\bar{n}_{6,12})$	$S_1(\bar{p}_7)$
(8)	S_m	S_0	$S_3(\bar{e}_i)$	$S_2(\bar{m}_{1,6})$	$S_2(\bar{n}_1, i\bar{n}_7)$
(9)	S_m	S_0	$S_3(\bar{e}_i)$	$S_2(\bar{e}_{1,p})$	$S_2(\bar{e}_{1,7})$.

Les vecteurs unitaires des espaces ci-dessus, correspondent aux unités principales des systèmes correspondants dont ω_n, ω_φ sont donnés par (II 43' et II 44'). S_δ est la suite de sous-espaces invariants. S_n est la suite des sous-espaces factoriels consécutifs; chaque S_{n_1} se décompose en deux sous-espaces invariants complémentaires (en sens général du mot comme en sens restreint) l'espace factoriel S_n et l'espace complémentaire S_φ tel que

$$S_n + S_\varphi = S_{n_1}. \tag{9'}$$

Chaque S_{m_1} est sous-espace factoriel du S_n par rapport à S_φ, de même S_{m_1} sous-espace invariant du S_{n_1}, et encore

$$S_2(\bar{e}_1, \bar{e}'_1) \subset S_3 \subset S_{12}.$$

2⁰. *Interprétation physique générale.* A chaque β correspondent 2 géométries groupales et donc 2 unifications de la géométrie et de la physique: 1. la géométrie de l'espace S_δ; 2. la géométrie de l'espace factoriel S_n.

α) *La géométrie du* S_δ. Si $S_{\delta_2} \subset S_{\delta_1} \subset S_\delta$ sont 3 termes consécutifs de la suite (III 5), la suite des complexes correspondants est

$$S'_{\delta_2},\ S'_{\delta_1},\ S'_\delta;\quad S'_{\delta_2} = S'_{\delta_1} - S'_{\delta_2},\quad S'_{\delta_1} = S'_\delta - S'_{\delta_1}.$$

La décomposition du monde physique (= la contradiction géométrie-physique) correspond pour chaque terme de la suite (III 5) à l'opposition sous-groupe complexe: le sous-espace invariant S_{δ_2} corres-

pond à une réalité géométrique ; le complexe S'_{δ_2} (et donc les classes secondaires du S_{δ_1} par rapport à S_{δ_2}) correspond à ne réalité physique du même couple de la suite (III 2). La représentation de chaque réalité géométrique par un groupe est située sur le chemin indiqué par le programme d'Erlangen ; ses bases constituent ici un groupe *invariant fini*. La suite des espaces S_m (sous-espaces invariants de S_{n1}) correspond donc à la décomposition (unification) progressive du monde physique. Par rapport à S_{δ_2}, S_{δ_1} devient une nouvelle réalité géométrique supérieure qui s'oppose à son tour à une r alité physique supérieure S'_{δ_1}. L'espace S_δ est l'unité géométrie-physique à l'échelle supérieure.

β) *La géométrie de l'espace factoriel* S_n. Les bases du S_n (l'unité principale $\overline{\omega}_n$ et les autres) sont fonctions *symétriques* (sommes) des δ éléments $\overline{e}_\lambda$ ($\lambda = 1 \ldots \delta$). De même les coefficients „réduits" sont fonctions symétriques (sommes) des a_λ. Dans les unités réduites d'ordre β l'opposition d'ordre β_1 des éléments $\overline{e}_\lambda$ est donc dépassée. S_n est donc à son tour d'une façon nouvelle unité géométrie-physique. La décomposition du S_{12} en sous-espaces invariants (donc l'existence de la suite de composition [I 16] du G_{12}) vient donc realiser pour chaque étape β du (III 2) une doble unité géométrique-physique : 1. „Unité „extérieure" en S_δ, 2. Unité „intérieure" en S_n. L'unité extérieure" correspond au S_δ comme groupe additif (forme linéaire des unités) ; il s'agiti ci d'une algèbre groupale et même d'une sous-algèbre groupale invariante du S_{12}. L'unité intérieure est réalisée en chaque unité de l'espace factoriel S_n à part. Elle correspond au S_n considéré comme *espace factoriel en sens restreint groupe multiplicatif*).

3⁰. *Décomposition progressive.* Les 3 couples géométriques-physiques (III 2) correspondent aux suites des espaces invariants et factoriels (de longueur 3). Chaque réduction (I, II, III) correspond à un couple (III 2) ; la réduction de rang β est unification interne des grandeurs géométriques-physiques de rang respectif. L'espace factoriel S_n représente la grandeur géométrique réduite d'ordre β, l'espace complémentaire S_φ les grandeurs physiques réduites correspondantes. Les unités du S_n sont fonctions nonsymétriques, les coefficients de unités du S_φ fonctions nonsymétriques (cubiques complexes ou antisymétriques) des unités naturelles. De même pour les coefficients.

Chaque vecteur de l'espace factoriel s'écrit comme somme d'un

vecteur symétrique et d'un vecteur antisymétrique. $\bar{v}_{n_1}$, $\bar{v}_n$, $\bar{v}_\varphi$ les vecteurs des espaces S_{n_1}, S_n, S_φ tels que

$$\bar{v}_{n_1} = \bar{v}_n + \bar{v}_\varphi .$$

Les vecteurs

$$\bar{u}_n = \frac{1}{2}(\bar{v}_n + \bar{v}_\varphi) , \quad \bar{w}_n = \frac{1}{2}(\bar{v}_n - \bar{v}_\varphi) \tag{10}$$

sont fonctions symétriques resp. antisymétriques par rapport à $\bar{v}_n$, $\bar{v}_\varphi$. De même v_n, v_φ par rapport à $\bar{u}_n$, $\bar{w}_n$. Nous appelons $\bar{v}_n$, $\bar{v}_\varphi$ vecteurs réduits de rang β, $\bar{u}_n$, $\bar{w}_n$, vecteurs naturels de rang β. $\bar{v}_n$, $\bar{u}_n$ représentent des réalités géométriques, $\bar{v}_\varphi$, $\bar{w}_n$ des réalités physiques de rang respectif.

Chaque réduction (décomposition) d'un vecteur donné $\bar{v}$, peut être réalisée en 2 façons: 1. réduction propre (intrinsèque) par rapport aux certains vecteurs de base réduite, dépendant des composantes de $\bar{v}$; les composantes des vecteurs réduits sont alors fonctions irrationnelles par rapport aux coefficients du v; 2. réduction cosmique, par rapport à certains vecteurs de bases fixes.

3. *Les trois étapes de la décomposition.*

1. *Les transformations (réductions).*

La transformation de rang 1 (voir II 13) correspond à la décomposition de rang 1 du (III 2): métrique-énergie-charge. La réduction réalisée en 2 étapes, la transformation réelle

$$m_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e'_1) , \quad j_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e'_1) \tag{11}$$

correspond à la décomposition métrique-matière, la transformation complexe

$$m_{3,5} = \frac{1}{2}(j_1 \pm ij_3) \tag{11'}$$

correspond à la décomposition de la matière en énergie et charge.

La transformation de rang 2, (voir II 40) correspond à la décomposition de rang 2 du (III 2): gravitation-électromagnétisme.

La transformation de rang 3, (voir II 41) correspond à la décomposition de rang 3 du (III 2): espace-temps.

Aulieu de la transformation complexe (II 41), en géométrie métrique sera utilisée la transformation réelle (III 12)

$$p_{s,t} = \frac{1}{2}(ns \pm nt)\,;\quad e_{s,t} = k_s \mp k_t\,.$$

B. *La géométrie métrique.*

a. *Le produit scalaire.*

1. *Formules générales.*

1⁰. *Produit scalaire des vecteurs unitaires.*

α) *Définition.* ${e^+}_\tau$ et e_τ étant des unités sextiques scalaires conjuguées, telles que

$$({e^+}_\tau)^+ = e_\tau\,,$$

nous définissons le produit scalaire

(13) $$g_{\tau\rho} = (\bar{e}_\tau\ \bar{e}_\rho)$$

des deux vecteurs unitaires $\bar{e}_\tau$, $\bar{e}_\rho$ par

(14) $$g_{\tau\rho} = (\bar{e}_\tau\ \bar{e}_\rho) = e^+_s\, e_r\, h_{\tau\rho} \quad \text{où } s = \tau \text{ mod. } 6,\ \pi = \varrho \text{ mod. } 6$$

$h_{\tau\rho}$ étant un nombre réel. Le produit scalaire est donc un nombre sextique hyperimaginaire.

β) *Formule fondamentale.* Soit $g_{\rho\tau}$ la „transposée" du $g_{\tau\rho}$. Si on suppose les nombres (composantes tensorielles) $h_{\tau\rho}$ symétriques

(14') $$h_{\tau\varrho} = h_{\varrho\tau}\,,$$

on a la formule fondamentale

(15) $$g^+{}_{\tau\varrho} = g_{\varrho\tau}\,,$$

identique à la formule fondamentale de la géométrie hermitienne unitaire ou pseudounitaire (en remplacant la conjuguée imaginaire par la conjuguée sextique) : la conjuguée d'un produit scalaire est identique à la transposée. Cette formule remplace la formule fondamentale de la géométrie riemannienne

$$g_{\tau\varrho} = g_{\varrho\tau}\,.$$

γ) *Valeurs de* g^0_{rs}. Notons le quotient

(16) $$g_{\tau\varrho} \,/\, h_{\tau\varrho} = e^+_s\, e_r = g^0_{sr}$$

car d'après la définition (III 14) du produit scalaire on a pour indices

$$g_{sr} \,/\, h_{sr} = g_{tu} \,/\, h_{tu} = g_{su} \,/\, h_{su} = g_{tr} \,/\, h_{tr} = e^+_s\, e_r = g^0_{sr}$$

$$(t = s + 6,\ u = r + 6).$$

On a

$$g^0_{51} = g^0_{13} = g^0_{35} = e_3 \qquad g^0_{31} = g^0_{53} = g^0_{15} = e_5$$

$$g^0_{ii} = -\,g_{pp} = e_1 \qquad g^0_{ip} = -\,g^0_{pi} = e_p\, e_i$$

$$g^0_{pp'} = \quad e_p\, e_{p'} \quad \text{donc} \qquad g^0_{pp'} + g^0_{p\ p} = -\,(e_3 + e_5)\,.$$

2°. *Produit scalaire total.*

α) *Définition.* Le produit scalaire des 2 vecteurs $\bar{v} = a_\tau\, \bar{e}_\tau$, $\bar{v}' = a'_\varrho\, \bar{e}_\varrho$ est

$$(17) \qquad (\bar{v}\,\bar{v}') = \sum_{\tau,\varrho}\sum g_{\tau\varrho}\, a_\tau\, a'_\varrho, \quad g_{\tau\varrho} = (\bar{e}_\tau\, \bar{e}_\varrho).$$

Le produit scalaire total est donc une forme bilinéaire des variables réelles a_τ et a'_ϱ, à coefficients $g_{\tau\varrho}$ hyperimaginaires sextiques.

β) *Relations.* Le produit scalaire n'est pas commutatif, mais

$$(18) \qquad (\bar{v}\,\bar{v}')^+ = (\bar{v}'\,\bar{v}) \text{ ou } (\bar{v}\,\bar{v}') = (\bar{v}'\,\bar{v})^+$$

comme généralisation de la formule (III 15), comme en géométrie hermitienne. Le produit scalaire est distributif,

$$(18') \qquad \bar{v}\,(\bar{v}' + \bar{v}'') \quad (\bar{v}\,\bar{v}') + (\bar{v}\,\bar{v}'');$$

on a „orthogonalité" pour $(\bar{v}\,\bar{v}') = 0$.

3°. *Le carré scalaire.*

α) *Définition.* Le carré scalaire d'un vecteur $\bar{v}$ est

$$(19) \qquad \bar{v}^2 = (\bar{v}\,\bar{v}) = (\bar{v}^+\,\bar{v}^+) = \sum_{\tau\,\varrho}\sum g_{\tau\varrho}\, a_\tau\, a_\varrho\,.$$

C'est une forme quadratique des variables $a_{\tau\varrho}$, à coefficients $g_{\tau\varrho}$ hyperimaginaires sextiques. Conformément à l'hypothèse (III 14') $\bar{v}^2$ est un nombre sextique central à unités e_1, e'_1.

β) *Décomposition spatio-temporelle.* On a

$$(19') \qquad \bar{v}^2 = \bar{v}^2\,(a_s) + \bar{v}^2\,(a_t) + 2\bar{v}\,(a_s, a_u)$$

$$\bar{v}^2\,(a_s) = \sum_{s\,r}\sum g_{sr}\, a_s\, a_r\,, \quad \bar{v}^2\,(a_t) = \sum_{t\,u}\sum g_{tu}\,(a_t\, a_u)\,,$$

la sommation étant étendue à la totalité des variations des indices ou encore

$$\bar{v}^2\,(a_s) = \sum_{s\,r}\sum (g_{sr} + g_{rs})\, a_s\, a_r\,, \quad \bar{v}^2\,(a_t) = \sum_{t\,u}\sum (g_{tu} + g_{ut})\, a_t\, a_u$$

$$2\bar{v}\,(a_s, a_u) = \bar{v}\,(a_s)\,\bar{v}\,(a_u) + \bar{v}\,(a_u)\,\bar{v}\,(a_s) = \sum_{s\,u}\sum (g_{su} + g_{us})\, a_s\, a_u\,.$$

γ) *Expressions analytiques.*

$$\bar{v}^2(a_s) = e_1 (\Sigma a_i^2 h_{ii} - \Sigma a_p^2 h_{pp}) + (e_3 + e_5) (\Sigma a_i a_i h_{ii'} - \Sigma a_p a_p h_{pp})$$

$$\bar{v}^2(a_t) = e_1 (\Sigma a_j^2 h_{jj} - \Sigma a_p^2 h_{qq}) + (e_3 + e_5) (\Sigma a_j a_{j'} h_{jj'} - \Sigma a_q a_q h_{qq})$$

$$\bar{v}^2(a_s, a_u) = e_1 (\Sigma a_i a_j h_{ij} - \Sigma a_p a_q h_{pq}) + (e_3 + e_5) (\Sigma a_i a_i h_{ij'} - \Sigma a_p a_q h_{pq'}).$$

2. *Cas particulier*: le produit scalaire comme norme sextique.

1⁰. *Produit scalaire des vecteurs unitaires.*

α) En supposant

$$h_{sr} = 1, \qquad h_{tu} = 1, \qquad h_{su} = 0,$$

les produits scalaires unitaires sont

(20) $$g_{sr} = e_s^+ e_r, \qquad g_{tu} = -e_s^+ e_r, \qquad g_{su} = 0.$$

β) *Nouvelle définition de* $g_{\tau\varrho}$. En ce cas, on peut encore définir le produit scalaire $g_{\tau\varrho} = (\bar{e}_\tau \bar{e}_\varrho)$ comme suit

(20') $$g_{\tau\varrho} = \frac{1}{2}\left[(e_\tau^+ e_\varrho) + (e_\tau^+ e_\varrho)^-\right],$$

donc

$$g_{sr} = e_s^+ e_r = (e_s^+ e_r)^-, \quad g_{tu} = e_t^+ e_u = -(e_s^+ e_r) = -(e_s^+ e_r)^-;$$
$$g_{su} = g_{us} = 0,$$

2⁰. *Le carré scalaire.* Dans ce cas, le terme spatial et le terme temporel du carré scalaire d'un vecteur s'identifient avec les normes scalaires sextiques respectives (voir II):

$$\bar{v}^2(a_s) = V'(a_s) = v(e_s)\, v^+(e_s) \quad \bar{v}^2(a_t) = v(e_t)\, v^+(e_t) = V(a_t);$$
$$\bar{v}(a_s, a_t) = 0,$$

donc

(21) $$\bar{v}^2 = V(a_s) + V(a_t) = \frac{1}{2}\left[V(a_\tau) + V^-(a_\tau)\right] = V'(a_\tau)$$

et par suite le carré scalaire $\bar{v}^2$ devient égal à la partie „réelle" de $V(a)$. On a

(21') $$\bar{v}^2 = V'(a_\tau) = m_1 D'(a_\tau) + j_1 B(a_\tau), \quad D'(a_\tau) = D(a_s) - D(a_t),$$
$$B'(a_\tau) = B(a_s) - B(a_t).$$

3⁰. *Expression analytiques de* V'. On a en coordonnées réduites d'ordre I

(22) $$D'(a_\tau) = h^2_1 - h^2_6 - h^2_7 + h^2_{12}$$
$$B'(a_\tau) = h_3 h^*_3 - h_2 h^*_2 - h_9 h^*_9 + h_8 h^*_8;$$

en coordonnées réduites d'ordre II

$$(22') \quad D' = k_1 k_6 - k_7 k_{12} \quad B' = \frac{1}{2}(k_3 k^*_2 + k^*_3 k_2 - k_9 k^*_8 + k^*_9 k_8);$$

en coordonnées réduites de III-ième ordre (système l_τ)

$$(22'') \quad D' = \frac{1}{2}(l_1 l_{12} + l_7 l_6) \quad B' = \frac{1}{4}(l_3 l^*_8 + l^*_3 l_8 + l_9 l^*_2 + l^*_9 l_2)$$

tandis que nous avons en coordonnées du système l'_τ

$$(22''') \quad D' = \frac{1}{2}(l_1' l_6' + l_7' l_{12}') \quad B' = \frac{1}{2}(l_3' l_4' + l_5' l_2' + l_9' l_{10}' + l_{11}' l_8').$$

La norme du $\bar{v}^2 = V'$ est une forme réelle de 4-ième degré

$$(23) \quad N'(a_\tau) = V' \widehat{V}' = D' B' = U'^2 - W'^2$$

ou nous avons posé

$$(23') \quad U'^2 = \frac{1}{2}(D' + B'), \quad W'^2 = \frac{1}{2}(D' - B'),$$

donc

$$U'^2 = U'^2(a_\tau) = U^2(a_s) - U^2(a_t); \quad W'^2 = W'^2(a_\tau) = W^2(a_s) - W^2(a_t).$$

3⁰. *Produit scalaire total.* En considérant au lieu du carré scalaire $\bar{v}^2$ un produit scalaire des deux vecteurs distincts, il en résulte dans le cas (III 20) ;

$$(24) \quad (\bar{v}\,\bar{v}') = \frac{1}{2}\left[(v^+ v') + (v^+ v')^-\right] = \Sigma\Sigma\, g_{\tau\varrho}\, a_\tau\, a'_\varrho =$$
$$= v^+(e_s)\, v'(e_s) + v^+(e_t)\, v'(e_t),$$

$$v^+(e_s)\, v'(e_s) = \Sigma\Sigma\, g_{sr}\, a_s\, a'_r, \quad v^+(e_t)\, v'(e_t) = \Sigma\Sigma\, g_{tu}\, a_t\, a_u.$$

Nous venons de poser $v, \bar{v}$ les conjuguées par rapport à e_7, donc

$$v = v(e_s) + v(e_t) = v(e_s) + e_7\, v''(e_s),$$
$$\bar{v} = v(e_s) - v(e_t) = v(e_s) - e_7\, v''(e_s).$$

b. *Les sous espaces métriques de* S_1.

1⁰. *Les formes linéaires.*

α) La théorie complète de la décomposition d'un vecteur cosmique donnée et des formes métriques des sous espaces du S_{12} seria donnée dans un mémoire à paraître ; nous résumons ici les résultats essentiels. La suite des *vecteurs factoriels* v_n correspondants des sous-espaces S_n est

β	$\mathfrak{v}_n$
0	$\mathfrak{v}(e_\tau) = u(e_\tau)\, e_1 + w(e_\tau)\, e_1'$
1	$d(m_{\gamma_1}) = d_1'(m_{1,7})\, m_1 + d_6'(m_{1,7})\, m_6 = d_1''(m_{1,7})\, n_1 + d_6''(m_{1,7})\, n_6$
2	$d_1(n_{1,7})\, n_1 = d_1''(m_{1,7})\, n_1 = k_1\, n_1 + k_7\, n_7 = l_1'\, p_1' + l_7'\, p_7' = l_1\, p_1 + l_7\, p_7$
3	$l_1\, p_1$ (ou $l_1'\, p_1'$).

(25

Nous avons posé

$$d_1' = h_1\, m_1 + h_1\, m_7\,;\quad d_6' = h_6\, m_1 + h_{12}\, m_7.$$

β) La suite des *vecteurs complémentaires* $\mathfrak{v}_\varphi$ des sous espaces S_φ est

β	$\mathfrak{v}_\varphi$
0	0
1	$b(m_{\gamma_{3,5}})$
2	$d_6''(m_{1,7})\, n_6 = d_6(n_{6,12}) = k_6\, n_1 + k_{12}\, n_{12} = l_6'\, p_6' + l_{12}'\, p_{12}'\ (= l_6\, p_6 + l_{12}\, p_{12})$
3	$l_7'\, p_7'$ (ou $l_7\, p_7$).

(25')

γ) On a donc les suites des formes linéaires (vecteurs) „naturelles" *géométriques* u_n et *physiques* w_n, comme aussi les suites des formes linéaires „réduites" géométriques $\mathfrak{v}_n$ et physiques $\mathfrak{v}_\varphi$.

β	$u_n \subset S_{n_1}$	$w_n \subset S_{n_1}$	$\mathfrak{v}_n \subset S_n$	$\mathfrak{v}'_\varphi \subset S_\varphi$
0	$\mathfrak{v}(e_\tau)\, e_1$	0	$\mathfrak{v}(e_\tau)$	0
1	$u(e_\tau)\, e_1$	$w(e_\tau)\, e_1'$	$d(m_{\gamma_1})\, m_1$	$b(m_{\gamma_{3,5}})\, j = b(j_\mathfrak{f}, j_\psi)$
2	$d_1'(n_{1,7})\, m_1$	$d_6'(m_{1,7})\, m_6$	$d_1(n_{1,7})\, n_1$	$d_6(n_{6,12})\, n_6$
3	$k_1\, n_1$	$k_7\, n_7$	$l_1\, p_1$	$l_7\, p_7$.

(25'')

Les vecteurs du rang 1 sont respectivement la „métrique naturelle" u et la „matière naturelle" w ; (d, b les vecteurs „réduits" correspondants).

Les vecteurs du rang 2 sont respectivement la „gravitation naturelle" d_1' et „l'électromagnétisme naturel" d_6' (les vecteurs réduits correspondants d_1 et d_6).

Les vecteurs du rang 3 sont respectivement „l'espace naturel" $k_1\ n_1$ et le „temps naturel" $k_7\ n_7$ (les vecteurs réduits correspondants sont $l_1\ p_1$, $l_7\ p_7$).

2°. *Formes quadratiques.*

α) Les „*normes factorielles*" N'_n d'ordre β seront par définition

(26)

β	N'_n
0	$N'(a_\tau)\ e_1 = N'\ e_1 = (U'^2 - W'^2)\ e_1 = B'\ D'\ e_1$
1	$D'(h_{\gamma_1}) m_1 = D' m_1 = [(h^2_1 - h^2_7) - (h^2_6 - h^2_{12})]\ m_1 = (k_1 k_6 - k_7 k_{12}) m_1$
2	$D'(k_{1,7})\ n_1 = D'_1\ n_1 = (k^2_1 - k^2_7)\ n_1 = l_1\ l_7$
3	$D'(k_1)\ p_1 = l_1\ p_1$.

β) Les formes métriques fondamentales des sous-espaces S_φ (= les „*normes complémentaires*" N'_φ d'ordre β) seront par définition)

(26')

β	N'_φ
0	0
1	$B'(h_{\gamma_{3,5}})\ j_1 = B' j_1$
2	$D'(k_{6,12})\ n_6 = D'_6\ n_6 = (k^2_6 - k^2_{12})\ n_6 = l_6\ l_{12}\ n_6$
3	$D'(l_7)\ p_7 = l_7\ p_7$.

On a pour N' les facteurs

$$V' = D'\ m_1 + B'\ j_1\ ;\ \widehat{V}' = D'\ j_1 + B'\ m_1$$

γ) Les suites des formes métriques fondamentales de rang β, géométriques (type *a*) et physiques (type *b*) (voir III 2) sont donc

(26'')

β	métriques naturelles		métriques réduites	
	a	*b*	*a*	*b*
0	N'	0	0	0
1	U'^2	W'^2	D'	B'
2	$h^2_1 - h^2_7$	$h^2_6 - h^2_{12}$	$k^2_1 - k^2_7$	$k^2_6 - k^2_{12}$
3	k^2_1	k^2_7	l_1	l_7 .

Les formes du rang 1 sont respectivement la métrique et la matière ; les formes du rang 2 : la gravitation et l'électromagnétisme ; les formes du rang 3 : l'espace et le temps.

3°. *Critères.* Appelons le vecteur cosmique $\bar{v}$

(27) $\begin{cases} 1.\ \textit{métrique, matériel, isobare} \text{ suivant que } N'(a_\tau) \gtrless 0 \\ 2.\ \textit{gravifique, électromagnétique, isocline} \text{ suivant que } D'(h_{\gamma_1}) \gtrless 0 \\ 3.\ \textit{spatial, temporel, isotrope} \text{ suivant que } D'(k_{1,7}) \gtrless 0. \end{cases}$

En résumé, le vecteur cosmique $\bar{v}$ est de nature géométrique (*a*) ou physique (*b*) d'ordre β (voir III 2), suivant que la forme métrique d'ordre β correspondante à $\bar{v}$ est positive ou négative. Pour le couple 3, la therminologie utilisée est consacrée en relativité restreinte.

Pour $k_7 = k_{12} = 0$ (vecteur spatial), il en résulte $D'(h_{\gamma_1}) = h_1^2 - h_6^2 = k_1 k_6$, $N'(a_\tau) = B k_1 k_6$ (décomposition en 3 facteurs réels).

4⁰. *Les représentations de l'espace bisextique.*

α) *Représentations du* S_{12}. Le produit scalaire bisextique $(\bar{v}\bar{v}')$ se présente comme généralisation de la métrique hermitienne pseudo-unitaire, en remplaçant les composantes imaginaires par composantes sextiques. L'espace bisextique S_{12} peut-être donc représenté par un espace H_2 à 2 dimensions (spatielle et temporelle) et coordonnées sextiques scalaires $v(e_s)$, $v(e_t)$.

β) *Représentation du* S'_{12}. D'une façon analogue, notre espace relativiste (et donc l'espace S'_{12}) est représentable par un espace hermitien H'_4 à 4 coordonnées sextiques scalaires

$$v_1(e_1),\ v_2(e_2),\ v_3(e_s),\ v(e_t).$$

γ) *Représentations des sous-espaces du* S_{12}. Les sous-espaces $S_4(\bar{m}_{\gamma_1})$ et $S_8(\bar{m}_{\gamma_{3,5}})$ correspondent aux sous-systèmes $C_4 \subset C_{12}$ et $C_8 \subset C_{12}$. La métrique du S_4 exprimée en coordonnées h_{γ_1} et la métrique du S_8 exprimée en coordonnées $c_{f,\psi}$ sont pseudo-euclidiennes. On peut aussi rattacher au S_8 un espace H_4 pseudo-unitaire à 4 coordonnées complexes ordinaires h_{γ_3}.

En considérant les sous-espaces S'_{12}, S'''_{12} dont les formes métriques U'^2 et W'^2 exprimées en coordonnées h_{γ_1} et $c_{f,\psi}$ sont pseudo-euclidiennes, nous les pouvons rattacher aux espaces pseudounitaires H'_8 et H''_8 à coordonnées $h_{\gamma_{1,3}}$, dont h_{γ_1} sont réelles et h_{γ_3} imaginaires.

Les sous-espaces $S_2(\bar{n}_{1,7})$, $S_2(\bar{n}_{6,12})$ du S_4 qui correspondent aux sous-systèmes $C_2(n_{1,7})$ et $C_2(n_{6,12})$ du C_{12} ont les formes métriques pseudo-euclidiennes (en k_1, k_6, respectivement k_7, k_{12}).

c. *Les transformations de l'espace métrique.*

1. *Les formules de transformation.*

1°. *Transformation de* $D'(e_\tau)$.

α) *Transformation de* $D'(k_{1,7})$. La forme $D'(k_{1,7}) = k^2_1 - k^2_7 = l_1 l_7$ reste invariante pour les transformations

$$K_1 = E^{\varepsilon}(k_1 \cos h\delta + k_7 \sin h\delta), \quad K_7 = E^{\varepsilon}(k_1 \sin h\delta + k_7 \cos h\delta)$$

ou encore

$$(a_1) \qquad L_1 = E^{\varepsilon+\delta} l_1, \quad L_7 = E^{\varepsilon-\delta} l_7.$$

$D'(k_{1,7})$ se multiplie par $E^{2\varepsilon}$. Cette transformation (au facteur $E^{2\varepsilon}$ près) est une transformation de Lorentz (réduite à deux axes) entre espace et temps, pour la métrique de sous-espace factoriel $S_2(k_{1,7})$ „gravifique".

β) *Transformation de la forme* $D'(k_{6,12})$. La forme

$$D'(k_{6,12}) = k^2_6 - k^2_{12} = l_6 l_{12}$$

est de même invariante pour la transformation

$$(a_2) \qquad L_6 = E^{\varepsilon'+\delta'} l_6, \quad L_{12} = E^{\varepsilon'-\delta'} l_{12}.$$

$D'(k_{6,12})$ se multiplie alors par $E^{\varepsilon'}$. La transformation (a_2) est une transformation spatio-temporelle de Lorentz, pour l'espace complémentaire $S_2(k_{6,12})$ „électromagnétique".

γ) *Transformation de la forme* $D'(k_{\gamma_1})$.

γ_1) *Relations générales.* La forme $D'(k_{\gamma_1})$ est invariante pour une transformation des variables

$$(a'_3) \qquad K_{\gamma_1} \longrightarrow k_{\gamma_1}$$

à paramètres δ_f et δ'_f $(f = 1, 2, 3, 4)$ à déterminants

$$|\delta_f| = |\delta'_f| = 1.$$

Soit

$$\mu' = \begin{pmatrix} \delta'_1 & \delta'_2 \\ \delta'_3 & \delta'_4 \end{pmatrix}.$$

La matrice de la transformation (a'_3) est $\mu'' = \begin{pmatrix} \delta_1 \mu' & \delta_2 \mu' \\ \delta_3 \mu' & \delta_4 \mu' \end{pmatrix}$.

Chaque terme multiplié encore par E^{α_1}, la forme $D'(k_{\gamma_1})$ se multiplie par $E^{2\alpha_1}$. La transformation (a'_3) à matrice μ'' est une transformation spatio-temporelle et gravifique-électromagnétique, de la forme métrique réduite $D(k_{\gamma_1})$, analogue à la transformation de Lorentz à 4 variables.

γ_2) *Cas particulier.* Pour $\delta_2 = \delta_3 = 0$ (donc $\delta_1 \delta_4 = 1$) nous obtenons un sous-groupe des transformations (a'_3): transformation indépendante des variables gravifiques k_1 et k_7 d'une part, des variables électromagnétiques k_6 et k_7 d'autre part. Pour

$$\delta_3' = \delta_2', \quad \delta_4' = \delta_1', \quad \text{donc} \quad \delta_1'^2 - \delta_2'^2 = 1$$

la transformation se réduit, resp. aux transformations (a_1) et (a_2) telles que $D'(k_{1,7})$ et $D'(k_{6,12})$ restent invariantes. Posons

$$\delta_{1,4} = E^{\pm\beta_1}, \quad \delta_1' \pm \delta_2' = E^{\pm\gamma_1}.$$

Il en résulte

$$\{a_3 \qquad \begin{aligned} L_1 &= l_1 E^{\alpha_1+\beta_1+\gamma_1} \qquad L_7 = l_7 E^{\alpha_1+\beta_1-\gamma_1} \\ L_6 &= l_6 E^{\alpha_1-\beta_1+\gamma_1} \qquad L_{12} = l_{12} E^{\alpha_1-\beta_1-\gamma_1}. \end{aligned}$$

Les termes $l_1\, l_{12}$ et $l_7\, l_6$ de la forme D' se transforment alors à part.

2^0. *Transformation de la forme* $B(k_{\gamma'})$.

α) *Cas générale.* La forme $B(k_{\gamma'})$ de l'espace complémentaire S_8 est invariante pour une transformation pseudo-orthogonale des 8 variables c_f, c_ψ (voir II). Notons cette transformations par (b_1).

β) *Transformation hermitiennes.* Les transformations pseudo-unitaires de l'espace H_4 rattachées à S_8 transforment les variables à indices k_{γ_3} et les conjuguées $k_{\gamma_3} = k^*_{\gamma_3}$ à part; elles transforment donc les variables réduites énergétiques à part et charges à part. Notons par (b'_1) les tranformations

$$K_{\gamma_3} \longrightarrow k_{\gamma_3}$$

à paramètres ε_f et ε'_f $(f = 1, 2, 3, 4)$, à déterminants

$$|\varepsilon_f| = |\varepsilon'_f| = 1.$$

Soit

$$\mu = \begin{pmatrix} \varepsilon'_1 & \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 & \varepsilon'_4 \end{pmatrix}.$$

La matrice de (b'_1) est

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_1 \mu & \varepsilon_2 \mu \\ \varepsilon^*_3 \mu^* & \varepsilon^*_4 \mu^* \end{pmatrix}.$$

Chaque k_{γ_3} multiplié par E^{α_3}, la forme $B(k_{\gamma'})$ se multiplie par $E^{\alpha_3 + \alpha^*_3}$.

γ) *Cas particulier.* Pour

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0, \quad \text{donc} \quad \varepsilon_1 \varepsilon_4 = 1.$$

nous obtenons un sous-groupe des transformations (b'_1) : transformation indépendante des énergies gravifiques k_3 et k_9 des énergies électromagnétiques k_2 et k_8 ; de même les conjuguées (charges). Notons par $(b'_3\, b'_2)$ ces transformations. Sous-cas particulier : si (b'_3) laisse invariante la forme

$$k_3 k_3^* - k_9 k_9^*$$

et (b'_2) laisse invariante la forme

$$k_2 k_2^* - k_8 k_8^*$$

nous avons

$$\varepsilon'_3 = \varepsilon_2'^*, \quad \varepsilon'_4 = \varepsilon_1'^* .$$

Si (b'_3) laisse invariante la forme $k^2_3 - k^2_9$ et (b'_2) laisse invariante la forme $k_2{}^2 - k^2_8$, il en résulte

$$\varepsilon'_3 = \varepsilon'_2, \ \varepsilon'_4 = \varepsilon'_1, \quad \text{donc} \quad \varepsilon'_1{}^2 - \varepsilon'_2{}^2 = 1$$

(tous les coefficients ε'_f sont réels). Alors chacun des termes conjugués

$$k_3 k_2^* - k_9 k_8^* \quad \text{et} \quad k_3^* k_2 - k_9^* k_3 .$$

reste invariant.

Posons

$$\varepsilon_{1,4} = E^{\pm \beta_3}, \quad \varepsilon_1' \pm \varepsilon_2' = E^{\pm \gamma_3} .$$

Il en résulte

$$L_3 = l_3 E^{\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3}, \quad L_2 = l_2 E^{\alpha_3 - \beta_3 + \gamma_3},$$

$$(b_3) \qquad L_9 = l_9 E^{\alpha_3 + \beta_3 - \gamma_3}, \quad L_8 = l_8 E^{\alpha_3 - \beta_3 - \gamma_3}$$

$$L_5 = L_3^*, \quad L_4 = L_2^*, \quad L_{11} = L_9^*, \quad L_{10} = L_8^* \left\{ \begin{matrix} \beta_3^* = \beta_3 \\ \gamma_3^* = \gamma_3 \\ \beta_1 , \gamma_1 \end{matrix} \right\} \text{réels}.$$

Cette transformation laisse invariant chaque terme de $B(l_{\gamma'})$; B se multiplie par $E^{\alpha_3 + \alpha^*_3}$.

3°. *Transformation du N'.*

α) *Cas générale.* La norme $N' = B'D'$ est une forme quadratique en B et D, de 4-ième degré en a. Elle reste invariante $(\bar{B}'\, \bar{D}' = B'\, D')$ pour

$$\bar{D}' = D E^{\omega'} \quad \bar{B}' = B'\, E^{-\omega'}, \quad \text{donc}$$

$$(c_1) \qquad \bar{U}' = U' \cosh \omega' + V' \sinh \omega', \quad \bar{W}' = U' \sinh \omega' + W' \cosh \omega'.$$

C'est la transformation métrique-matière.

β) *Transformations canoniques.* Les transformations (a_3) et (b_3) qui laissent invariantes D' et B', telles que

$$\bar{B}' = B' E^{\alpha_3 + \alpha_3^*}, \quad \bar{D}' = D' E^{2\alpha_1}$$

sont identiques à (c_1) si

$$-\omega' = \alpha_3 + \alpha_3^* = -2\alpha_1 ;$$

tel est en particulier le cas pour (a_1), (a_2), (b_1) qui laissent invariantes les formes métriques

$$D'(k_{1,7}), \quad D'(k_{6,12}), \quad B(k_{\gamma'}).$$

En posant

(28) $$\alpha_5 = \alpha_3^*, \quad \beta_5 = \beta_3^* = \beta_3, \quad \gamma_5 = \gamma_3^* = \gamma_3 ;$$

pour $\alpha_{3,5} = \alpha \pm i\alpha'$, on a donc $\alpha + \alpha_1 = 0$,

donc

(29) $$L_i = l_i E^{\alpha_i + \beta_i + \gamma_i}, \quad L_p = l_p E^{\alpha_i - \beta_i + \gamma_i}, \quad L_j = l_j E^{\alpha_i + \beta_i - \gamma_i},$$
$$L_q = l_q E^{\alpha_i - \beta_i - \gamma_i}.$$

γ) *Observations.* Les transformations pseudo-euclidiennes ou pseudo-unitaires (III) transforment les 12 coordonnées (a_τ ou h_τ ou k_τ ou l_τ) comme suit.

1. Les l_τ se transforment chacun à part (donc 12 formules qui laissent invariants les termes $l_\tau l_\varrho$ du N'.

2. Les k_τ métriques, énergétiques, charges gravifiques et électromagnétiques se transforment à part ; la transformation est spatio-temporelle (donc 6 groupes des formules à 2 variables qui laissent invariantes les formes $k_s^2 - k_t^2$).

3. Les h_τ métriques, énergétiques, charges se transforment à part, la transformation est spatio-temporelle - gravifique - électromagnétique (donc 3 groupes des formules à 4 variables chacune qui laissent invariantes les 4 formes

$$B', \quad D' = B_1' = h^2_1 - h^2_6 - h^2_7 + h^2_{12},$$
$$B_3' = h^2_3 - h^2_2 - h^2_9 + h^2_8, \qquad B_5' = h^2_5 - h^2_4 - h^2_{11} + h^2_{10}.$$

4. Les a_τ se transforment tous entre eux (donc un groupe des formules à 12 variables qui laissent invariant N').

Les transformations des l_τ, k_τ, h_τ, a_τ correspondent resp. aux sous-groupes invariants

$$I_{12}, \ I_6, \ I_3, \ I_1$$

du G_{12}, donc à 12, 6, 3, 1 sous-espaces du S_{12}, d'ordre 1, 2, 4, 12 resp.

2. *Les paramètres de transformation.*

1°. *Relations algébriques.*

α) *La matrice.* La matrice μ^{12} des coefficients de transformations

(III 29) est de forme diagonale, composée des 3 matrices diagonales μ_i^4, dont chacune formée des 2 matrices diagonales μ_{ih}^2, celles-ci des deux matrices diagonales μ_{ihf}^1 (éléments) $E^{\alpha_i + \beta_i \pm \gamma_i}$ (pour $h = 1$) ou $E^{\alpha_i - \beta_i \pm \gamma_i}$ (pour $h = 2$). Posons $\beta_3 = \beta_5 = \beta'$, $\gamma_3 = \gamma_5 = \gamma'_1$ $(i = 1, 3, 5,\ ;\ g = 1, 2\ ;\ h = 1, 2)$; les paramètres

(30) $$\eta \ldots (\alpha_i , \beta_i , \gamma_i) \quad \text{ou} \quad \eta' (\alpha_1 , \alpha' ; \beta_1 , \beta' ; \gamma_1 , \gamma')$$

et donc les matrices diagonales correspondent à la décomposition du monde en 3 couples (III 2).

β) *Coefficients bisextiques.* Soient

$$A_\tau = \Sigma_\rho \lambda_{\tau\rho} a_\rho , \quad \text{avec} \quad e_\tau A_\tau = \Sigma_\rho (\lambda_{\tau\rho} e_\tau^{-1}) (e_\rho a_\rho)$$

les formules générales de transformation des coordonnées naturelles.

La forme bisextique de la transformation est

$$B_\tau = \Sigma \mu_{\tau\varrho} b_\varrho , \ B_\tau = e_\tau A_\tau , \ b_\varrho = e_\varrho a_\varrho , \ \mu_{\tau\varrho} e_\varrho^{-1} ;$$

B_τ, b_τ, $\mu_{\tau\varrho}$ sont hyperimaginaires.

γ) *Paramètres réels.* Par hypothèse (III 28) on a $2 + 2 + 2 = 6$ paramètres indépendants n'. Pour k_τ, h_τ, a_τ, les exponentielles des l_τ donnent fonctions hyperboliques (en α_1, α' ; β_1, β' ; γ_1, γ') et trigonométriques (en α') ; celles-ci correspondent à la décomposition de la matière en énergie et charge.

2^0. *Constantes d'homogénéisation.*

α) *Temps-espace :* à la durée (t) correspond en relativité restreinte la longueur $y = ict$, c étant la vitesse de la (lumière $c = 3.10^{10}$ cm) $i^2 = -1$.

β) *Matière-métrique :* à la masse m_0, correspond en relativité générale la longueur fictive, $m = k_0 m_0$ (= „rayon gravifique de la masse" Weyl, *B 11*) $(k_0 \fallingdotseq 10^{-27}$ cm/g).

γ) *Electromagnétisme - gravitation :* : à la charge électromagnétique e_0 correspond en théorie unitaire, la longueur fictive

$$e = e_0 \delta , \quad \delta = \sqrt{k_0} / c \fallingdotseq 10^{-23} \text{ cgs} ;$$

e est le „rayon gravifique de la charge" (Weyl *B 11*).

Les 3 constantes

(31) $$\xi \ldots (c, k_0, \delta) , \quad k_0 = c^2 \delta^2$$

vont réaliser l'homogénéisation (= géométrisation = spatialisation) des grandeurs physiques. En physique d'action, m et e deviennent des longueurs effectives, rattachées aux hyperimaginaires $e_{3,5}$ respective-

ment e_p, comme l'est aussi la constante c rattachée à l'unité imaginaire e_7 (ou i) et plus généralement aux e_t.

3⁰. *Les déplacements géométriques.*

α) *Définitions.* Introduisons les paramètres variables

(32) $$s(u_i, w_i, v_i) \text{ ou } s'(u_1, u'; w_1, w'; v_1, v')$$

des dimensions

(33) $$[u_i] = [k_0] = l\, m_0^{-1},\ w_i = [\delta] = l^{-\frac{1}{2}} m_0^{-\frac{1}{2}} t,\ [v_i] = [c] = l\, t^{-1};$$

ils ont resp. les dimensions de l'inverse du potentiel gravifique (= l'inverse d'une force) de l'inverse d'un potentiel électromagnétique (= le radical de l'inverse d'une force) et de la vitesse. Nous définirons les s par les relations

(34) $$u_i / k_0 = tgh\, \alpha_i,\quad w_i/\delta = tgh\, \beta_i,\quad v_i / c = tgh\, \gamma_i$$

ou encore

(34′) $$\begin{aligned} u_1/k_0 = tgh\,\alpha_1 = -u / k_0,\quad u' / k = tgh\,\alpha' \\ w_1 / \delta = tgh\,\beta_1 = w / \delta,\quad w' / c = tgh\,\beta' \\ v_1 / c = tgh\,\gamma_1 = v / \delta,\quad v' / c = tgh\,\gamma'. \end{aligned}$$

Nous appelons les s les „déplacements géométriques" (dépl. métriques, gravifiques, spatielles = vitesses) correspondantes aux déplacements physiques ξ (matérielles, électromagnétiques, temporelles) considérées comme unités.

β) *Géométrisation des* ξ. Réciproquement : les quantités physiques, (matière, électromagnétisme, temps) géométrisées (spatialisées), les constantes ξ deviennent à leur tour des déplacements rattachées aux certaines dimensions hyperimaginaires ($e_{3,5}$, e_p, e_t) ; par ex. ic = vitesse temporelle.

γ) *Conséquences.* Les formules de transformation (III 29) de la physique d'action entraînent 5 conclusions. (Pour le couple spatio-temporel, ces conclusions sont formulées déjà par la théorie de la relativité : Pour les paramètres s (déplacements géométriques) :

1. L'existence d'une limite supérieure,
2. La possibilité de l'annulation par choix convenable du système des coordonnées,
3. Les formules d'addition.

Pour les coordonnées :

4. L'invariance de l'intervalle (distance),
5. L'invariance de l'hypervolume infinitésimal.

4°. *Conclusions vis-à-vis des s.*

α) *La limite supérieure.* Les fonctions hyperboliques des paramètres s' (voir III 34') restent réelles si les tangentes hyperboliques respectives sont sous-unitaires, donc

$$u_1 \leqq k_0,\ w_1' \leqq \delta,\ w' \leqq \delta;\ v' \leqq c;\ v_1 \leqq c \tag{35}$$

dont la relation $v_1 \leqq c$ est le postulat einsteinien fondamental. Les constantes ξ (k^0, δ, c) sont donc les limites supérieures asymptotiques des déplacements géométriques s' (voir III 32).

β) *L'annulation des s'.* Nous notons par ξ'

$$\xi'^2 = s'^2 - \xi^2 = (u^2_1 - k^2_0,\ u'^2 - k_0{}^2;\ w^2_1 - \delta^2,\ w'^2 - \delta^2;\ v' - c^2,\ v^2_1 - c^2) \tag{35'}$$

les racines quadratiques des carrés vectoriels; les ξ' sont les „déplacements cosmiques" (totales). $u'^2 - k^2_0$ excepté, les carrés ξ'^2 sont donc négatifs; les vecteurs ξ' correspondants sont de nature physique (matérielle, électromagnétique, temporelle); voir les critères (III). Par un choix convenable du *S. C.* (système des coordonnées *matériel* d'origine O), les composantes géométriques (positives) s' des déplacements cosmiques ξ' peuvent être toujours annulés; le système matériel A resp. est alors „en repos géométrique" relatif à O (= en „déplacement purement physique"). Pour la vitesse v_1 ce fait démontré par l'expérience commune et axiomatisé en relativité restreinte (repos spatial). Quand au w_1, en relativité générale il est toujours possible en chaque point (donc sur l'échelle différentielle) d'annuler les composantes Γ^{α}_{ik} de la connexion affine, donc aussi les g_{ik} et les forces gravifiques. Mais c'est ne pas plus possible pour une région étendue (sur l'échelle intégrale).

γ) *Formules d'addition.* Les formules classiques d'addition des vitesses

$$v_1 + v'_1 = v''_1$$

deviennent formules tangentielles hyperboliques pour les paramètres s (ou s'). Soit s' le déplacement géométrique resp., ξ le déplacement physique (constant) correspondant. Au lieu de la formule classique

$$s'_2 = s' + s'_1$$

on a

$$s'_2 = (s' + s'_1) \Big/ \left(1 + \frac{s'\, s'_1}{\xi^2}\right) \tag{35''}$$

pour $s' = \xi$, on a $s'_2 = \xi$, indépendant de la valeur du s'_1. Les para-

mètres sont donc des constantes absolues, indépendantes par rapport au déplacement géométrique de l'observateur (= du S. C.) ; c'est la généralisation du principe einsteinien de l'addition des vitesses v_1.

3. *Les coordonnées transformées.*

1⁰. *Relatif et absolu.*

α) *L'intervalle.*

α_1) *Invariance de l'intervalle.* Les formules (III) laissent invariantes certaines formes quadratiques (ou hermitiennes), surtout la forme quartique $N' = B'\,D'$. Ce caractère du S.C. absolu (l'invariance) signifie l'indépendance vis-à-vis de S. C. donc vis-à-vis de l'observateur, c'est à dire l'indépendance vis-à-vis des paramètres s. Elle vient de généraliser l'intervalle absolue de la relativité.

α_2). *Relativisation des coordonnées.* L'invariance absolue de l'intervalle correspond à la relativisation des coordonnées, en particulier des coordonnées de chaque couple géométrique-physique (III 2). Les formules de transformation sont analogues aux formules relativistes pour temps-espace ou énergie-impulse. Soit η' un des paramètres de la transformation, $tgh\,\eta' = s'/\xi$, ξ la constante absolue (déplacement physique) et s' le déplacement géométrique correspondant, les autres paramètres supposés fixes. Le déplacement cosmique étant ξ' (voir III 35') on a

$$\xi' = \sqrt{s'^2 - \xi^2}, \quad \sqrt{1 - \frac{s'^2}{\xi^2}} = \frac{i\xi'}{\xi} = \sigma = \frac{1}{\cos h\,\eta'}, \tag{36}$$

$$\text{donc} \quad \cos h\,\eta' = \frac{1}{\sigma}, \quad \sin h\,\eta' = s'/\sigma\xi = -\frac{is'}{\xi'}.$$

Les relations de transformation de la coordonnée géométrique x dans la coordonnée physique y sont près d'un facteur constant,

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= x\cos hl + y\sin hl \quad \text{ou encore} \quad \mathcal{X} = x/\sigma - is'y/\xi' \\ Y &= x\sin hl + y\cos hl \qquad\qquad\quad Y = -is'y/\xi' + y/\sigma \end{aligned} \tag{37}$$

telles que $\mathcal{X}^2 - Y^2 = x^2 - y^2$.

Nous devons poser ici successivement pour η' les valeurs (III 30) pour ξ voir (III 31), pour s' voir (III 32) et pour x, y les couples U', W' (formes quadratiques) ; $h_{1,6}$; $h_{1,7}$ (ou un autre couple quadratique ou linéaire gravifique-elm. resp. spatio-temporel).

β) *Dimensions.*

β_1) *Grandeurs propres et cosmiques.* Nous disons que les systèmes *matériels* (S. C. observateurs physiques) A et O sont „en repos géométrique" ou en „déplacement géométrique" vis-à-vis du couple

des variables x, y (voir III) suivant que le paramètre s corrrespondant est nul ou non nul. Cette définition vient de généraliser les notions du déplacement et repos spatial correspondants aux variables temps-espace (le paramètre s est alors la vitesse v_i). Les relations entre grandeurs „propres" x, y et „grandeurs cosmiques" x', y' qui correspondent resp. aux systèmes en „repos géométrique" et en „déplacement géométrique" sont

$$x' = x\sigma\,, \quad y' = y/\sigma \tag{38}$$

ou les relations différentielles

$$dx' = \sigma\, dx\,, \quad dy' = dy/\sigma\,. \tag{38'}$$

Ici les A sont en déplacement géométrique relatif ; les grandeurs propres sont les dimensions du repos géométrique ; les grandeurs cosmiques sont les grandeurs de l'observateur en déplacement géométrique. Il en résulte la compression des grandeurs géométriques et la dilatation des grandeurs physiques pour A.

β_2) *L'invariance du hypervolume.* La surface (= hypervolume réduit à 2 dimensions) correspondante à chaque couple géométrique-physique est invariante (indépendante du déplacement géométrique de l'observateur)

$$dv' = dx'\, dy' = dx\, dy = dv\,. \tag{39}$$

2^0 *Interdépendance.*

α) *L'interdépendance triple.* La connexion universelle (en cas limite, réduite à l'interdépendance des deux systèmes *matériels* A,O) unifie l'absolue (intervalle et hypervolume) et relatif (coordonnées et grandeurs). En physique d'action, la décomposition triple (III 2) du monde physique va déterminer une triple interdépendance correspondante aux paramètres v_i, w_i, u_i.

α_1) *L'interdépendance cinématique* (spatio-temporelle), donnée en physique relativiste. Elle implique la nécessité d'adapter pour chaque système (mouvement) spatio-temporel A un système de référence matériel O, d'où la modification des grandeurs propres spatio-temporelles rattachées à O, par le déplacement géométrique du A, et leur transformation en grandeurs „cosmiques" (en fonction de v_i).

α_2) *L'interdépendance électro-gravifique* implique la variation des grandeurs électromagnétiques et gravifiques de A, sous l'influence de o et inversement (= en fonction de w_i).

α_3) *L'interdépendance dynamique*, (métrique-matérielle) signifie la variation des grandeurs métriques, énergétiques, charges de A sous l'influence du O et inversement (= en fonction du u_i).

β) *Vérifications expérimentales.* L'interdépendance cinématique relativiste et ses conséquences sont vérifiées. L'interdépendance dynamique est donnée par l'expérience au moins dans un cas particulier : l'interdépendance des perturbations des coordonnées métriques Δ_q (spatielles ou temporelles) et de l'énergie cinétique Δ_p (impulse ou énergie de repos) d'un électron A. Les perturbations sont produits par le système O (les instruments de l'observation réduits aux photons = quanta lumineuses). Les relations

$$\Delta_q = \lambda/2 \sin \alpha ; \quad \Delta_p = 2h (\sin \alpha)/\lambda, \tag{40}$$

où h est le quantum d'action, α une constante de l'observation, correspondent aux formules générales (III 37). La longueur λ de l'onde lumineuse utilisée vient jouir le rôle de σ. Le principe de Heisenberg

$$\Delta_p \Delta_q = h \tag{40'}$$

donne l'invariance du hypervolume (surface) métrique matérielle, quantifiée au moyen de h.

Quand aux conséquences (1—5, pag. 628) des formules de transformation de la physique d'action, la vérification des conséquences (1—4) pour les couples géométriques-physiques 1 et 2 de (III 2) reste comme tâche future. De même reste à approfondir et à délimiter la conséquence 5 pour les mêmes couples — surtout la formulation précise et plus générale du principe de Heisenberg à la lumière de l'interdépendance électrogravifique et dynamique.

γ) *La théorie de l'interdépendance.* L'unification du principes de l'invariance $\alpha_{1,2,3}$ (pag. 631) par les formules (III 37) entraîne une interpénétration et modification réciproque des théories classiques de l'interdépendance cinématique d'une part, de l'interdépendance dynamique et électrogravifique d'autre part.

γ_1) *Géométrisation et matérialisation.* Vu la géométrisation l'homogénéisation) des grandeurs physiques en relativité et physique d'action, l'interdépendance dynamique et électrogravifique doivent se géométriser en quelque sort, de façon de s'approcher de l'interdépendance cinématique. Le principe d'incertitude de Heisenberg ne reflète pas une situation indéterministe, ni un antagonisme absolu entre grandeurs métriques (cinématiques) et matérielles (dynamiques). Il signifie une relativisation (interdépendance) tout à fait déterministe d'un genre nouveau. Cette relativisation prend un caractère géométrique, par l'invariance de la forme métrique N' du S_{12} et de son hypervolume, matérialisé à son tour par l'interprétation physique, matérialiste des grandeurs géométriques. Le principe reflète une contradiction entre

les grandeurs commutatives et non commutatives. Par leur unification en S_{12}, la contradiction est dépassé.

D'une manière inverse, la matérialisation de la géométrie réalisée en physique d'action, modifie la théorie de l'interdépendance cinématique relativiste. La relativisation des coordonnées spatio-temporelles, du système A par rapport au système O n'est point d'un caractère géométrique *abstrait*, mais d'un caractère *physique*, matériel, lié à l'interdépendance réelle des systèmes A et O.

Elle contient donc en germe l'nterdépendance dynamique. A l'emission et absorption de l'énergie (Heisenberg) et de la charge (voir Weyl, B 11, V-e éd.) doit correspondre une émission et absorption „métrique" de temps-espace par A et O.

γ) *Continu et discontinu.* D'une part, la conception du temps-espace continue s'étend sur électricité et matière, d'autre part la théorie discontinue des celles-ci s'étend sur la métrique : à la quantification matérielle et électrique corréspond une quantification du temps et de l'espace (Markoff B 29, Ambarzumian, B 27, Ivanenko B 28, Vescan B 30) (voir IV) l'émission et absorption des quanta materielles-électriques-métriques par O et A. La triple décomposition, interdépendance et quantification est unité des contraires (couples III 2). La triple quantification est donc triple aspect de la quantification du hypervolume du S_{12} et donc de la quantification d'action (voir IV). L'unité des contraires „continuité" et discontinuité" en signifie l'unité des contraires „unité" et „pluralité" des corpuscules en catégorie „totalité". D'autre part elle est l'unité de l'absolu physique (invariance) et du rélatif physique, en catégorie „invariance".

IV. **Géométrie (physique) concrète d'action**

(Le groupe des transformations Z_6).

A. *Géométrie microscopique.*

a. *Le groupe Z_6. Relations de groupe.*

1°. Le groupe Z_6. Soit Z_6 un groupe des 6 transformations circulaires (projectives) z_s à coefficients réels, représentant du groupe abstrait I_6 donc isomorphe au groupe E_6 des unités hyperimaginaires bisextiques. Notons par $z_1 = z$ la variable indépendante (transformation identique). Considéré comme fonction, notons l'élément z_s par

$$z_s = z_s(z) .$$

En considérant les z_s comme transformations (opérateurs), notons le produit des transformation par paranthèse, par ex.

$$(z_3\, z_5) = z_1 .$$

La théorie du I_6 est valable pour les relations groupales Z_{12}, en changeant $G(I, L)$ et g en Z et z.

2^0. Z_6 comme produit. Le sous-groupe Z_3 du Z_6 représente le groupe abstrait I_3. Ses éléments sont les transformations cycliques

(1) $$z_1 = z \qquad z_3 = 1 - 1/z \qquad z_5 = 1/(1 - z).$$

Les sous-groupes Z_2^p du Z_6 sont formés par l'identité $z_1 = z$ et un des éléments z_p

(1') $$z_6 = 1 - z \qquad z_2 = 1/z \qquad z_4 = z/(z - 1) .$$

3^0. *Le groupe* Z_{24}.

α) Le groupe Z_4.

Soient α, $\bar{\alpha}$ des irrationnels conjugués d'ordre 2. Soient

(2) $$\alpha = 1/2\,(\sqrt{3} + 1);\ \beta = -\bar{\alpha} = 1/2\,(\sqrt{3} - 1)$$

les racines de l'équation $2Z^2 - Z - 1 = 0$. Considérons le groupe cyclique d'ordre 4

(3) $$Z_4 \ldots Z,\ z_7 = \psi(z) = (\alpha z - 1)/(z + \beta),\ Z_{13} = \varphi(z),\ Z_{14} = \\ = \chi(z) = \psi(z_7) = (\beta r + 1)/(\alpha - z)$$

$Z_4 = Z_2\, Z'_2$ a les éléments primitifs Z'_1, Z'_7.

β) *Le groupe* Z_{24} est par définition le produit des groupes cycliques

(4) $$Z_{24} = Z_3\, Z_2^p\, Z_4 = Z_6\, Z_4 .$$ En posant

(5) $$f_1 = f,\ \psi_1 = \psi,\ \varphi_1 = \varphi,\ \chi_1 = \chi,$$

il contient donc les éléments

(6) $$z_s = f_s(z),\ z_s = z_{s+6} = z_s(\psi) = z_s(z_7);\ z_s = z_{s+12} = z_s(\varphi) = z_s(13);\\ z'_t = z_{s+18} = z_s(\chi) = z_s(z_{19}) = \check{z}_{s+12};$$

(7) $$z_t \begin{cases} z_7 = (\alpha z - 1)/(z + \beta), \quad z_9 = (\beta z - \alpha)/(\alpha z - 1), \\ \qquad z_{11} = (z + \beta)/(\alpha - \beta). \\ z_{12} = (\alpha - \beta z)/(z + \beta), \quad z_8 = (z + \beta)/(\alpha z - 1), \\ \qquad z_{10} = (\alpha z - 1)/(\beta z - \alpha). \end{cases}$$

Le groupe Z_{24} est donc constitué par le sous-groupe cyclique Z_4 et les classes secondaires $z_s\, Z_4$.

γ) *Isomorphismes.* Le groupe Z_6 est isomorphe au groupe sextique,

E_6, le groupe Z_4 au groupe des unités complexes $(\pm e_1, \pm e_7)$ (ou $\pm e_1, \pm i$).

2. *Relations fonctionnelles.*

1⁰. *Produits.* On a

$$(8)\quad \begin{cases} z_1 z_3 = -z_6 & z_1 z_5 = -z_4 & z_3 z_5 = -z_2 \\ z_6 z_4 = -z_1 & z_2 z_4 = -z_5 & z_6 z_2 = -z_3, \end{cases}$$

donc $\Sigma z_{i'} z_{i} = -\Sigma z_{p}$; $\Sigma z_{p'} z_{p} = -\Sigma z_{i}$ $(i' \neq i,\ p' \neq p)$.

Et de même pour z_t, z'_s, z'_t.

2⁰. *Equations.* On a

couples complémentaires

$$(8')\qquad z_i z_{p_j} = 1,$$

couples correspondants

$$(8'')\qquad (z_i - 1)(z_{p_j} - 1) = 1,$$

couples supplémentaires

$$(8''')\qquad z_i + z_p = 1.$$

b. *Les coordonnées.*

b_1. *Constantes algébriques.*

1⁰. *Valeurs diverses.* Les racines en $z_1 = z$ des équations

$z_i = z$ (ou $2z_i - 1 = 0$) et $z_i = z'_p$ (ou $2z^2 - 2z - 1 = 0$)

sont conjuguées armoniques respectivement conjuguées irrationnelles de deuxième ordre. Appelons ces racines

$$(9)\qquad f_i(\infty) = \varphi_i(1\,|\,2) = \psi_i(-\beta) = \chi_i(\alpha) \ldots \pm\infty,\ 1,\ 0$$

„valeurs principales";

$$(9')\qquad f_i(1\,|\,2) = \varphi_i(\infty) = \psi_i(\alpha) = \chi_i(-\beta) \ldots 1\,|\,2,\ 2,\ -1$$

„valeurs secondaires";

$$(9'')\qquad f_i(\alpha) = \varphi_i(-\beta) = \psi_i(\infty) = \chi_i(1\,|\,2) \ldots \alpha, \frac{\beta}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}$$

„valeurs tertiaires";

$$(9''')\qquad f_i(-\beta) = \varphi_i(\alpha) = \psi_i\left(\frac{1}{2}\right) = \chi_i(\infty) \ldots \beta, \frac{\alpha}{\beta}, \frac{1}{\alpha}$$

„valeurs quaternaires".

Pour les f_p, φ_p, ψ_p, χ_p correspondantes, on obtient les mêmes valeurs, telles que la première reste la même (notons $f_p = \mp\infty$) et les 2 dernières se permutent

2⁰. *Signification géométrique.* Au point de vue géométrique, chaque triple des équations

$$z_i = f_i(z), \quad z_i = \varphi_i(z), \quad z_i = \psi_i(z), \quad z_i = \chi_i(z)$$

représente une hyperbole cubique ; de même les équations f_p, φ_p, ψ_p, χ_p.

Les valeurs (9-9''') du paramètre z correspondent aux points à l'infini (pôles) de la courbe correspondante. Pour une courbe donnée, les termes de chacune des suites (9-9''') sont respectivement des pôles, unités, zéros des coordonnées. Ainsi pour $z_i = f_i(z)$, les points

$$I(z=\infty), \quad A(z=1), \quad O(z=0). \tag{10}$$

3⁰ *Permutations.*

α) Une permutation cyclique des coordonnées z_i permute d'une façon cyclique les termes de chaque des suites (9-9'''). Ainsi on a pour $z_i = f_i(z)$

(11)

	I	A	O
z_1	$\pm\infty$	1	0
z_3	1	0	$\pm\infty$
z_5	0	$\pm\infty$	1.

β) Les points à l'infini de la courbe $z_i = \varphi_i(z)$ correspondent aux sommets W_i de la courbe $z_i = f_i(z)$ et inversement ; de même pour les courbes ψ_i, χ_i.

γ) Pour la même courbe, chaque couple formé d'une fonction z_i et d'une fonction z d'index pair a en commun un sommet. Deux fonctions supplémentaires, complémentaires, correspondantes ont en commun respectivement le point à l'infini, l'unité et le zéro. Une permutation permute à part les autres 2 points principals et les 2 sommets correspondants.

2. *Coordonnées propres et cosmiques.*

1⁰. *Définitions.* Désignons les composantes a_τ $(= a_s, a_t)$ de la géométrie abstraite, considerées comme variables, par x_τ $(= x_s, x_t)$. Pour une transformation générale

$$x_\tau = f(x_1', \ldots x_{12}'), \text{ on a } dx_\tau = \Sigma f_\varrho' \, dx_\varrho'.$$

Nous appelons en relativité générale, les coordonnées x „coordonnées propres", les x' „coordonnées cosmiques. Cas remarquable ;

$$x_\tau = \Pi x'_\tau, \text{ donc pour } x'_\tau = E^{\alpha'_\tau}, \; x_\tau = E^{\Sigma \alpha_\tau}, \; l x_\tau = \Sigma \alpha'_\tau.$$

2⁰. *Décomposition spatio-temporelle.*

α) *Les groupes* R_{24}, Q_{24}. Remplaçons l'élément z du Z_{24} par la

variable spatielle $r^0 = r \mid d$, $r_1 = r$ et d étant respectivement le rayon classique microphysique du corpuscule considéré (pour l'électron $d = a = e^2 \mid 2m$). Remplaçons d'autre part l'élément z par la variable temporelle $q^0 = q \mid b$, $q_1 = q$ et b ayant des dimensions des longueurs; $q|c$ étant le temps, $b|c$ une constante temporelle correspondante à la constante d. On a

$$r^0 \subset R_{24},\ q^0 \subset Q_{24},$$

R_{24} et Q_{24} étant des groupes des transformations homographiques isomorphes à Z_{24}; r^0 et q^0 sont invariants par rapport au étalon (unités de mesure).

β) *Décomposition de* x_τ. Posons respectivement les variables spatielles x_s et les variables temporelles x_t

$$x_s = u'_s \eta_s r_s^0,\ x_t = u'_t \zeta_s q_s^0, \tag{12}$$

les „potentiels générateurs"

$$\eta_s = g_s(q^0),\ \xi_s = g_s(r^0) \tag{12'}$$

des dimensions nulles étant des fonctions arbitraires, u'_τ des variable d'étalon (fonctions arbitraires des coordonnées) ayant la dimension d'une longueur. Pour $q^0 =$ constant, les variables spatieles

$$r_s = x_s\ d|u'_s \eta_s = (r_s, 1, 0, \infty), \tag{13}$$

deviennent des coordonnées projectives par rapport aux points

$$I(r' = \infty),\ A(r' = 1),\ O(r' = 0). \tag{13'}$$

De même $q_s = x_t\ b|u'_t \xi_s = (q_s\ 1, 0, \infty)$ pour r^0 constant, par rapport aux points $I'(q^0 = \infty)$, $A'(q^0 = 1)$, $O'(q^0 = 0)$.

γ) *Potentiels groupales.* Nous supposons les potentiels générateurs

$$\xi_s = \psi_s(r^0) = r_t^0 \subset R_{24};\ n_s = \psi_s(q^0) = q_t^0 \subset Q_{24} \tag{12''}$$

(„Potentiels générateurs groupales"); donc

$$x_s = u'_s\ q_t^0\ r_s^0;\ x_t = u'_t\ r_t^0\ q_s^0. \tag{12'''}$$

3. *Les surfaces fondamentales.*

1°. *Les équations des surfaces.*

Les indices données par (N I), rattachons aux groupes abstraits (I 17'), donc aux couples (III 2), dont le couple (1) se décompose en triple métrique-énergie-charge, resp. les surfaces

$$z_\tau\ z_{\tau_3}\ z_{\tau_5} + 1 = 0 \tag{13$_1$}$$

(13_2) $$z_\tau z_{\tau_2} - 1 = 0$$

(13_3) $$2z_\tau z_{\tau_{13}} - (z_\tau + z_{\tau_{13}}) + 2 = 0$$

ou encore

$$z_{\tau_1} z_{\tau_3} z_{\tau_5} + 1 = 0 \quad z_{\tau_2} = 1 / z_\tau \quad z_{\tau_{13}} = (2 - z_\tau) / (1 - 2z_\tau).$$

Dans les équations (13_1), les indices donnent resp. les 4 permutations i, p, j, q. Dans les équations (13_2) ils donnent les 6 combinaisons ι, π_5. Enfin dans les équations (13_3), ils donnent les 6 permutations $(s, s + 12)$. Les 3 systèmes s'écrivent donc

$$z_{\gamma_1} z_{\gamma_3} z_{\gamma_5} + 1 = 0 \quad z_\iota z_{\pi_5} - 1 = 0 \quad 2z_s - (z_s + z_{s+12}) + 2 = 0 \; (z_{s+12} = z'_s).$$

Parmi ces équations, seulement 11 sont indépendantes en donnant

$$z_\tau = z_\tau (z).$$

2°. *Transformation des équations.*

Les équations (13_1) et (13_3) donnent un système échivalent, formé pour chaque combinaison i, p, j, q par une surface cubique et une surface quadrique

(14) $$(\Sigma_3) \ldots z_{\tau_1} z_{\tau_3} z_{\tau_5} + 1 = 0 \quad (\Sigma_2) \ldots \Sigma z_\tau z_{\tau_3} - \sum_i z_{\tau_i} - 3 = 0$$

ou encore

(14') $$(\Sigma_3) \ldots z_{\tau_1} z_{\tau_3} z_{\tau_5} + 1 = 0 \quad (\Sigma'_3) \ldots (1 - z_{\tau_1})(1 - z_{\tau_3}) (1 - z_{\tau_5}) + 1 = 0$$

dont la dernière est équivalente à l'équation

$$z_{\tau_6} z_{\tau_2} z_{\tau_4} + 1 = 0.$$

L'intersection (Σ_3, Σ_2) ou (Σ_3, Σ'_3) est l'hyperbole cubique

$$z_{\tau_3} = z_3 (z_\tau) = 1 - 1 / z_\tau$$

$$z_{\tau_5} = z_5 (z_\tau) = 1 / (1 - z_\tau)$$

(Wood, 9). Elle comprend les transformations de Z_3.

3°. *Invariance des équations.*

α) *L'invariance générale.* Les équations des systèmes $(13_{1, 2, 3})$ sont invariantes par rapport aux transformations de Z_{12} (G_{12}). Donnée la correspondance entre les systèmes $(13_{1, 2, 3})$ et les sous-groupes (I 17'), les transformations d'un sous-groupe donné sont équivalentes à la permutation des grandeurs géométriques avec les grandeurs physiques du couple resp. (voir III 2). Les transformations d'un sous-groupe

donnée conservent chaque équation du système rattaché et permutent les équations de chacun des autres 2 systèmes à part.

2°. *Invariance vis-à-vis de I_2.* En particulier, la transformation $z_{\tau_{13}}$ (permutation de z_τ et $z_{\tau_{13}}$, permutation de l'espace et du temps en théorie des groupes abstraits) en permute les équations de chacun des systèmes (13_1) et (13_2) à part. Elle permute donc les surfaces Σ_3 et Σ_2, car en nouvelles variables

$$\varrho_s = (1 - 2z_s)/\sqrt{3} = (z_{s_6} - z_s)/\sqrt{3}\,, \qquad \varrho'_s = -(1 - 2z'_s)/\sqrt{3} = -(z'_{s_6} - z'_s)/\sqrt{3} \tag{15}$$

les systèmes deviennent

$$(\Sigma''_3)\ldots \sum_s \varrho_s \varrho_{s_3} + 3 = 0;\quad (\Sigma'_2)\ldots \sum_s \varrho'_s \varrho'_{s_3} + 3 = 0;$$
$$(13_2)\,\varrho_\tau \varrho_{\tau_2} + 3(\varrho_{\tau_2} - \varrho_\tau) = 0;\quad (13_3)\,\varrho_s \varrho'_s - 1 = 0. \tag{16}$$

La permutation de ϱ_s et ϱ'_s, donc la permutation de z_s et z'_s du sous-groupe $Z_2 \subset Z_4$ permute les surfaces Σ'_2 et Σ''_3. Elle permute donc aussi les surfaces Σ_2 et Σ_3.

4. *Les courbes fondamentales.*

1°. *Les courbes comme telles.*

α) Définitions. Considérons les courbes Γ_{12}, Δ_{12} obtenues en posant dans les équations x_τ (voir IV 12''') $q = \text{const.}$ resp. $r = \text{const.}$ Γ_{12}, Δ_{12} sont courbes gauches à 12 dimensions; invariantes par rapport aux transformations Z_{24} (c'est à dire par rapport aux transformations R_{24} resp. Q_{24}). En vertu des relations (IV 8''') valables pour les 6 couples des variables supplémentaires z_i et z_p, z_j et z_q, z_k et z_r, les courbes Γ_{12}, Δ_{12} sont de 6-ième degré.

β) Les projections. La projection de Γ_{12} sur l'espace linéaire des Γ_6, variables x_s est une courbe Γ_6, de même la projection du Δ_{12} sur l'espace des variables x_t est une courbe Δ_6; ces courbes (aux facteurs u'_τ près)

$$\Gamma_6\,(dx_s \,|\, \eta_s = r_s)\,, \quad \Delta_6\,(bx_t \,|\, \xi_s = q_s) \qquad (\eta_s = \text{const}) \quad (\xi_s = \text{const}). \tag{17}$$

sont hyperboles cubiques invariantes pour les transformations de Z_6 (R_6 resp. Q_6). Les transformations de Z_3 permutent les coordonnées d'une façon cyclique (z_i et z_p à part). Chacune des transformations Z'_3 permute deux coordonnées et change simultanément le sens des 3 axes (voir Wood 9 et surtout Staude 10). D'une façon analogue les courbes Γ'_6 et Δ'_6, projections de Γ_{12} et Δ_{12} sur l'espace des variables x_t et x_s. Appelons les courbes (17) les courbes fondamentales (spatiale et temporelle). Les projections du Γ_6 sur l'espace des variables x_i, resp. x_p sont

des hyperboles cubiques Γ_3 et Γ_3', invariantes par rapport aux transformations Z_3. De même les courbes Δ_3, Δ_3', projections de la courbe Δ_6 sur les espaces des variables x_i, x_q.

γ) *Suites des courbes.* La suite des courbes

$$\Gamma_\delta \ldots (\Gamma_{12}\ \Gamma_6\ \Gamma_3\ \Gamma_1) \tag{18}$$

correspond à la suite de composition (I 16), donc aux suites des espaces invariants S_δ. Chaque courbe Γ_{δ_1} est la projection de la courbe Γ_δ sur le sous-espace invariant S_{δ_1}. De même pour la suite des courbes

$$\Delta_\delta \ldots (\Delta_{12}\ \Delta_6\ \Delta_3\ \Delta_1). \tag{18'}$$

2^0. *Relations topologiques.*

α) *Les 3 régions.* Γ_6 et Δ_6 (donc Γ_{12}, Δ_{12}) ont respectivement 3 singularités (O, A, I pour Γ_6 et O', A', I', pour Δ_6) correspondants aux valeurs 0, 1, ∞ du paramètre z ($z = r^0$ resp. q^0) et encore 3 sommets W_i resp. W_i' qui correspondent aux valeurs $(-1, \frac{1}{2}, 2)$ du paramètre. Le centre de la courbe a les coordonnées

$$z_i = \frac{1}{2}, -1, 2; \quad z_p = \frac{1}{2}, 2, -1.$$

BUDAPESTI MŰSZAKI KÖZGYŰJTEMÉNY 1848

Appelons les domaines

$$\text{I. } (0,1), \quad \text{II. } (1, \infty), \quad \text{III. } (-\infty, 0) \tag{19}$$

resp la région „interne", „externe", „alterne" de la courbe considérée (spatiale ou temporelle) et aussi du corpuscule resp. (soit l'électron). Deux régions données sont séparées par une singularité

I (l'infini métrique, $z_{1,6} = \pm\infty$),

A (l'infini de la charge, $z_{5,4} = \pm\infty$),

O (l'infini énergétique, $z_{3,2} = \pm\infty$).

β) *Changement des variables.* Une permutation de la coordonnée z_τ en z_ϱ (pour une même variable r^0 ou q^0 donnée) et des unités hyperimaginaires e_s correspondantes à la façon des opérateurs permute :

a. Les cordonnées.

b. Les points $P_1\,(z'_{1,3,5})$, $P_3\,(z'_{3,5,1})$, $P_5\,(z'_{5,1,3})$ correspondants à une valeur donnée du paramètre, intersections de la courbe et du plan $\Sigma z_i - \Sigma z_i' = 0$ parallèle au plan central (en particulier les singularités : infinis, zéros, unités).

c. Les 3 régions de la particule.

En particulier, un changement du z_1 en $z_{3,2}$ permute les régions internes et externes, et donc l'infini énergétique et métrique. La région interne se soumet donc au certaines lois déduites des lois valables en région externe par une permutation des coordonnées énergétiques (matérielles) et métriques. D'une façon analogue pour les permutations $(z_1 \blacktriangleleft\!\!-\!\!\blacktriangleright z_5)$ et $(z_3 \blacktriangleleft\!\!-\!\!\blacktriangleright z_5)$.

γ) *Représentations des permutations.* Une permutation qui permute les singularités, (soit $z_1 \blacktriangleleft\!\!-\!\!\blacktriangleright z_2$) admet donc 2 interprétations :

a. En espace S_{12}, comme permutation des axes de coordonnées (métrique et énergie, à savoir espace et énergie électromagnétique statique resp. temps et énergie électromagnétique cinétique).

b. Pour un espace S_2, réduit à 2 dimensions : espace-temps comme projection du S_{12} (voir l'espace factoriel S_2) et encore dans notre espace à 4 dimensions, la matière = énergie + charge se présente comme réalité physique, plongée dans le milieu du S_2. S_2 vient alors apparaître comme cadre d'avance donné de la matière. En S_2 la transformation $z_2 = 1/z_1$ se présente alors comme transformation à rayons vecteurs réciproques, qui permute O et I (l'origine et l'infini, spatiels ou temporels).

δ) *Représentation paramétrique.* Posons

$$z_s = E^{\zeta_s} \text{ (donc } r_s^0 = E^{\sigma_s},\ q_s^0 = E^{\tau_s}). \tag{20}$$

Des relations (surfaces) fondamentales

$$z_i\, z_{p_5} = 1,\ z_1\, z_3\, z_5 + 1 = 0$$

résulte

$$\zeta_p + \zeta_i = 0;\ \Sigma\zeta_i = -\Sigma\zeta_p = \lambda\pi i \tag{20'}$$

(λ entier $\gtrless 0$).

Les 3 régions correspondent aux domaines suivants de la variation du paramètre : interne ($\zeta = -\infty, 0$), externe ($\zeta = 0, +\infty$), alterne ($\zeta = \infty + \pi i, -\infty + \pi i$).

Pour une variation finie du z autour d'une singularité, soit autour des points 0 ou A, la variation de ζ peut être infinie.

ε) *Valeurs réelles du paramètre.* L'étrange opposition des régions d'étendue infinie chacune, étant donnée par l'expérience, revient donc à l'impossibilité d'une représentation *simultanée* pour *tous* les régions de la variation de la courbe Γ_δ (ou Δ_δ) par valeurs *réelles* d'un *seul* paramètre ζ (ou d'un ζ_τ arbitraire, τ fix). Dans la région alterne, par ex., ζ_1 est imaginaire ; mais un changement de la variable transforme ζ_1 en ζ_3 ou ζ_5 à valeurs réelles. Cette transformation revient donc à un changement de l'espace-temps en énergie ou charge.

3⁰. *Régions spatiales et temporelles.*

α) *L'espace.* La courbe Γ_δ donne l'univers, soit l'électron, en extension spatiale. Au A ($r^0 = 1$, $r = a$) correspond le rayon classique de l'électron $a = c^2/2m$.

L'intérieur de l'électron ($0 \leq r \leq a$) voisin au centre (l'infini énergétique 0), est soustrait à l'expérience physique d'aujourd'hui ; le domaine alterne ($r < 0$) est par définition hors de la discussion.

β) *Le temps.* β_1) *L'expansion.* La courbe Δ_δ donne l'univers (l'électron) en expansion temporelle. Parmi les quantités cinétiques (dynamiques) q_τ, considérons les variables matérielles : l'énergie électromagnétique q_2 et la charge gravifique q_5 tendent vers zero, l'énergie gravitationnelle q_3 et la charge électromagnétique q_4 tendent en croissant vers valeurs asymptotiques finies, avec le temps $q_1^0 = E^\tau$ croissant. La vérification astronomique donne au moins la croissance du q_3.

β_2) *Temps cinématique et dynamique.* Les 3 régions signifient 3 périodes d'évolution infinies (éternités) distinctes. Certaines variations infinies du paramètre exponentiel τ correspondent aux variations finies de la variable $q^0 = E^\tau$; il en résulte donc l'opposition entre le temps cinématique τ et le temps dynamique q^0 mise en évidence par les théories de l'expansion de l'univers (voir de Sitter 19, Mineur 23, Laberenne 38). Des valeurs imaginaires du τ se présentent aussi dans la théorie de de Sitter, elles correspondent ici aux observateurs situés sur les différents points de la région externe spatiale.

c. *Coordonnées et constantes.*

1. *Les variables fondamentales.*

En physique d'action, les notions des „constantes" et „variables" ne s'opposent pas d'une façon absolue ; désignons les par le mot „variables".

1⁰. *Définitions.* Nous appelons „variables géométriques" les variables physiques ramenées aux dimensions des longueurs. Les „variables physiques" (hétérogènes) ont des dimensions diverses. Notons les variables géométriques et physiques par la même lettre, suivie de l'index „0" pour les variables physiques. 2⁰. *Classification.* En physique d'action, classons les variables géométriques (et physiques) en 4 ordres ($\beta = 0, 1, 2, 3$). A chaque couple géométrique-physique d'ordre β (voir III 2) et donc à chaque sous-système d'unités bisextiques, donc à la décomposition (I 22) en classes secondaires nous rattachons une catégorie des variables d'ordre β, à savoir des longueurs (21') V_n (r_s', q_s' ; d_s, b_s ; e, l; u) et des rapports (21''') $V_\varphi \ldots$ (η_s, ξ_s ; r_s^0, q_s^0 ; λ, μ ; γ).

$$(21)\quad \left|\begin{array}{ll} (0)\ldots r'_s,\ \eta_s;\ q'_s,\ \xi_s & (1)\ldots d_s,\ r^0_s;\ b_s,\ q^0_s \\ (2)\ldots e,\ l;\ \lambda,\ \mu & (3)\ldots u,\ \gamma. \end{array}\right.$$

α) *Variables de rang nul.*

α_1) *Définitions.* Soient d_1, d_3, d_5, des constantes spatiales (respectivement le rayon classique, la masse homogénéisée et la charge homogénéisée du corpuscule considéré); b_1, b_3, b_5 des constantes correspondantes pour le temps. Soient pour les potentiels groupals (12'')

$$(22)\quad \alpha_s = \lim_{q\,+\,\infty} q_t\,(q^0);\ \text{donc}\ \alpha_i = \psi_i\,(\infty),\quad \alpha_p = \chi_i\,(\infty) = \psi_p\,(\infty)$$

les valeurs „tertiaires" et „quarternaires" de la formule (IV 9-9''). Nous rattachons aux variables $r''_s = d'_s\, r^0_s$, $q''_s = b'_s\, q^0_s$ les constantes d'_s, b'_s telles que

$$(23)\qquad d'_i = \alpha_i\, d_i,\ d'_p = \alpha_p\, d_p;\ b'_i = \alpha_i\, b_i,\ b'_p = \alpha_p\, b_i$$

car le coefficient du r^0_s en $x_s \mid u_s'$ est $q^0_t = \psi_s\,(q^0)$, la limite pour $q \to \infty$ est $\psi_s\,(\infty) = \alpha_s$. De même on trouve la limite pour $r \to \infty$ du coefficient r^0_t du q^0_s en x_t. Pour la plupart des corpuscules connus, l'expérience donne trois constantes fondamentales spatielles d_i et trois constantes fondamentales temporelles b_i, telles que $d_i = d_p$, $b_i = b_p$.

α_2) *Conséquences:* α_s sont les valeurs d'un quadrirapport. On a

$$(22')\quad \left|\begin{array}{l} d'_i + d'_p = d_i \ \text{ou}\ \left(\dfrac{d'_i}{d_i}\right) + \left(\dfrac{d'_p}{d_i}\right) = 1 \\ \alpha_i + \alpha_p = 1,\ \text{donc}\ b'_i + b'_p = b_i \ \text{ou}\ \left(\dfrac{b'_i}{b_i}\right) + \left(\dfrac{b'_p}{b_i}\right) = 1 \end{array}\right.$$

on a $\alpha_{1,3,2,4} > 0 \qquad \alpha_{5,6} < 0$.

β) *Variables du rang 1.* β_1) La géométrisation relativiste de la masse physique d_{30} et de la charge physique d_{50} donne (voir III 31)

$$(24)\qquad d_1 = d_{10},\quad d_3 = k_0\, d_{30},\quad d_5 = \delta\, d_{50}\ (\delta = \sqrt{k_0}/c).$$

Introduisons l'énergie $d'_{30} = d_{30}\, c^2$.
On a

$$(24')\quad d_1 = d_{10},\ d'_3 = \delta^2\, d'_{30},\ d_5 = \delta\, d_{50}\quad \text{et de même pour les } b_i.$$

β_2) Les facteurs λ. Le rayon spatial classique du corpuscule (au moins de l'électron et du proton) est

$$(25)\qquad d_1 = d^2_5 \mid 2d_3 = d^2_{50} \mid 2d'_{30},\quad \text{donc}$$

$$(26)\quad \begin{array}{l} d_1 = d_5\,\lambda,\ 2d_3 = d_5\,\lambda^{-1} \\ b_1 = b_5\,\mu,\ b_3 = b_5\,\mu^{-1} \end{array} \qquad (27)\quad \begin{array}{l} (\lambda = d_1/d_5 = d_5/2d_3) \\ (\mu = b_1/b_5 = b_5/b_3). \end{array}$$

En posant

(28) $$\lambda_0 = \lambda\delta\,, \quad \mu_0 = \mu\delta$$

et en désignant les dimensions de la longueur, de la masse et du temps par l^0, m^0, t on a les dimensions

$$[\mu_0] = [\lambda_0] = [l_0/e_0] = l_0^{-\frac{1}{2}}\, m_0^{-\frac{1}{2}}\, t = [f_0^{-\frac{1}{2}}] \quad (f_0 = \text{force})$$

(27') $$(\lambda_0 = d_{10}/d_{50} = d_{50}/2d'_{30})$$
$$(\mu_0 = b_{10}/b_{50} = b_{50}/2b'_{30})$$

(26') $d_{50} = d_{10}\,\lambda_0$, $2d'_{30} = d_{10}\,\lambda_0^{-2}$; ou $d_{10} = d_{50}\,\lambda_0$, $d'_{50} = d_{50}\,\lambda_0^{-1}$

$$b_{10} = b_{50}\,\mu_0\,, \quad b'_{30} = b_{50}\,\mu_0^{-1},$$

Posons

$$d_h/d_5 = \lambda_h\,, \quad d_{h0}/d_{50} = \lambda_{h0}, \ (h = 1, 2)\ (d_3 = d_2)\,.$$

c) *Relations fonctionnelles.*

On a

(29) $$\lambda_1\,\lambda_2 = 1$$

ou

(29') $$\lambda_{10}\,\lambda_{20} = 1$$

et de même pour les μ (et μ_0).

Ces relations, correspondent aux relations (IV 8') (valables pour r_τ^0 et q_τ^0).

γ) *Variables de rang 2.*

γ_1) Les travaux soviétiques. Iwanenko et Ambarzumian (*B* 27,28) posent le quantum spatial (distance minime = „spatiol")

(30) $$b' = h/\mathrm{cm}_0\,;$$

h etant le quantum d'action, m_0 la masse de l'électron, cm_0 l'impulsion, $m_0\,c^2 = m'_0$ l'énergie de repos.

Ils posent le quantum temporel (durée minime = „cron" du Markoff), voir (*B* 29)

(30') $b_0 = b'/c = h/m_0\,c^2$ $(b' \fallingdotseq 10^{-10}$ cm, $b_0 \fallingdotseq 10^{-20}$ sec.)

γ_2) La quantification temporelle en physique d'action. En réalité, l'impulse n'est pas la composante spatiale de l'énergie relativiste totale. Celui-ci est un tenseur symétrique à 16 composantes: composantes spatielles (énergie potentielle = tenseur spatial à 9 composantes), composantes temporelles—spatielles (= „l'impulsion" et „flux d'énergie", 2 vecteurs spatials à trois composantes) et une composante temporelle (=le scalaire „énergie de repos"). Impulsion et énergie de repos en constituent la

composante temporelle de l'énergie (le quadri-vecteur énergie cinétique). D'autre part, la grandeur „b" est beaucoup plus grande que le rayon „a" de l'électron ($b/a \simeq 1000$). Nous devons donc regarder la grandeur b du Iwanenko, correspondante à l'impulsion $m_0 c$, comme quantum temporel spatialisé (ou comme quantum spatio-temporel). Le quantum spatiel est le rayon a (voir aussi March, Zeitschrift für Physik 1937-38). En physique d'action a correspond à l'énergie potentielle dont la valeur pour un champ symétrique sphérique est $r_2' = \epsilon^2/r$, tel que le rayon vecteur $r = aE^\sigma$, $r^0 = r/a = E^\sigma =$ entier. De même le quantum temporel $b = cb_0$ (ou b_0) correspond à l'énergie cinétique.

γ_3) Relations entre h et e^2_0. On a pour l'électron, les quanta spatiels et temporels

(31) $b' = hc/m_0 c^2$, $a = e_0^2/m_0 c^2$. ou $h = b_0 . m_0 c^2$, $e_0^2 = a . m_0 c^2$.

On a

(31') $$[e_0^2/h] = l_0 t^{-1}; \quad 1/2\ e_0^2/hc = a/b.$$

Le couple hc et $1/2\ e_0^2$ correspond donc au couple temps-espace ; tous deux sont invariants vis-à-vis de transformation de Lorentz du temps-espace, énergie-impulsion. En posant

(32) $$m_0 = mk_0\ ,\ l^2 = h\,k_0/c,$$

on a les surfaces quantifieés

(32') $$l^2 = b\,m,\ 1/2\ e^2 = am\ ;\quad l = \sqrt{h}\ \sqrt{k_0/c},\ e = e_0\sqrt{k_0/c}.$$

Les constantes physiques $\sqrt{h}$ et e_0 se correspondent ; de même les constantes géométriques l et e ; l^2 est le quantum d'action géométrisé de type temporel, comme e^2 est le quantum d'action spatial. On a

(33) $$l^2 \simeq 10^{-64}\,\mathrm{cm}^2,\ e^2 \simeq 10^{-67}\,\mathrm{cm}^2.$$

Pour un corpuscule arbitraire, on doit remplacer a, m par d_{13} ; b, m par $b_{1,3}$ et poser pour chaque corpuscule $d_5 = e$, $b_5 = l$, donc

(34) $d_1\,(2d_3) = e^2$, $b_1\,b_3 = l^2$ ou $d_{10}\,d'_{30} = e_0^2$, $b_{10}\,b'_{30} = h$.

δ) *Constantes de rang 3.*

Posons

(35) $$el = u^2,\ e/l = \gamma^2$$

(36) $$e = u\gamma\ ,\ l = u\gamma^{-1}.$$

En posant

(37) $$\frac{e}{u} = \gamma = \gamma_1\ ,\quad \frac{l}{u} = \gamma^{-1} = \gamma_2,\quad \text{on a } \gamma_1\gamma_2 = 1.$$

Pour les constantes physiques correspondantes on a

(35') $$u_0^2 = e_0\sqrt{h},\quad \gamma_0^2 = e_0/\sqrt{h}\,.$$

On a les formules de transformation

(38) $$u_0 = u\frac{1}{\delta\sqrt[4]{c}}\,;\quad \gamma_0 = \gamma\sqrt[4]{c}$$

telles que

(36') $$e_0 = u_0\gamma_0\,,\quad \sqrt{h} = u_0\gamma_0^{-1}$$

ou

(37') $$\gamma_{10}\gamma_{20} = 1 \qquad (\gamma_0 = \gamma_{10}\,,\ \gamma_0^{-1} = \gamma_{20})\,.$$

3⁰ *Conclusions*:

α) *Relations fonctionnelles:* Les rapports d'ordre β de (21 ou 21'), à savoir

(39) $$(\eta_i\,,\ \eta_p\,,\ \xi_i\,,\ \xi_p\ ;\ r_i^0,\ r_p^0,\ q_i^0,\ q_p^0\ ;\ \lambda_{1,2},\ \mu_{1.2}\ ;\ \gamma_{1.2})$$

vérifient les relations ($13_{1,2}$) (voir 29, 37).

β) *Relations groupales:* un élément arbitraire de chaque des 11 complexes (39) considéré comme élément identité, chaque complexe est un groupe cyclique Z_3 ou $Z^p{}_2$, Z_2.

γ) *Variables physiques et géométriques.*

γ_1) Chaque transformation-géométrisation des variables (transformation en variables géométriques des variables physiques hétérogènes) correspond à une transformation de „l'espace" $V_{n,\gamma}$ respectif (IV 24, 28, 33, 38) et (IV, 56).

γ_2) Les transformations de la géométrisation se réduisent à une seule transformation à deux „variables" (soit 38 en $u,\ \gamma \longleftrightarrow u_0,\ \gamma_0$). Le paramètre de transformation c correspond au temps, le paramètre K_0 (ou δ)à la matière (δ à la charge, δ^2 à l'énergie, donc δ^3 à la matière $em = \delta^3\, e_0\, m'_0$).

γ_3) Les relations fonctionnelles et groupales des rapports des variables de rang β sont invariantes par rapport à la géométrisation (voir 29 et 29', 37 et 37').

γ_4) Chaque relation qui lie des variables géométriques du rang distinct revient à une „géométrisation" (homogénéisation) de „rang β", à savoir

($40_{0,1,2,3}$) $$x = r_s'\,\eta_s\,,\quad x_t = q_s'\,\xi_s \qquad \begin{cases} r_s' = d_s\, r_s^0\,, \\ q_s' = b_s\, q_s^0\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} d_s = e\lambda_s \\ b_s = l\mu_s \end{cases} \qquad \begin{cases} e = u\gamma \\ l = u\gamma^{-1} \end{cases}$$

qui transforment les longueurs successives en u, γ.

2. *Constantes cosmiques et atomiques.*

1⁰. *Relations algébriques.*

α) *Progressions.* Nous pouvons prolonger les progressions

$d_1 = e\lambda$, $2d_2 = e\lambda^{-1}$ (et de même $b_1 = l\mu$, $b_2 = l\mu^{-1}$) $(d_2 = d_3)$

par des progressions correspondantes aux puissances r^n/d_1^{n-1}, q^n/b_1^{n-1} (avec $p_5 = i + 1$)

$$(41_1)\quad d_i'' = e\lambda^{\frac{i+1}{2}},\ d_{p_5}'' = e\lambda^{-\frac{(i+1)}{2}};\quad (41_2)\quad b_i'' = l\mu^{\frac{i+1}{2}};\ b_{p5}'' = l\mu^{-\frac{(i+1)}{2}}$$

Pour l'électron nous désignons dans ces progressions, les grandeurs „cosmiques" $(i > 1)$ par grandes letters, les grandeurs „sous-corpusculaires" $(p > 2)$ par petites lettres. Les d_i'' et b_i'' représentent des longueur, les $b_{i0}' = b_i''/c$ des temps, les $d_{p5}'' = k_0\, d_{p0}$ et $b_{p5}' = k_0\, b_{p0}$ $(p \geqslant 2)$ des masses raménées aux dimensions des longueurs (donc $d_{p_0}''' = d_{p_0}''\, c^2$ et $b_{p_0}''' = b_{p_0}''\, c^2$ des énergies)

$(d_1'' = d_1,\ d_2'' = 2d_2;\ b_1'' = b_1,\ b_2'' = b_2)$ et $d_0'' = e,\ b_0'' = l$.

β) *L'électron.* Pour l'électron $(d_1 = a,\ d_2 = m;\ b_1 = b,\ b_2 = m)$ on a

$$(42)\qquad \lambda \backsimeq 10^{20},\ \mu \backsimeq 10^{22},\ \text{donc}$$

$$(43)\quad \begin{cases} d''_1 = a \backsimeq 10^{-13}\ cm,\ d''_3 = e^3/(2m)^2 = A \backsimeq 10^{7}\ cm, \\ \qquad d''_5 = e^4/(2m)^3 = B \backsimeq 10^{27}\ cm; \\ d''_2 = 2m \backsimeq 10^{-54}\ cm,\ d''_4 = (2m)^2/e = p \backsimeq 10^{-74}\ cm, \\ \qquad d''_6 = (2m)^3/e^2 = q \backsimeq 10^{-94}\ cm. \ldots \end{cases}$$

$$(44)\quad \begin{cases} b''_1 = b \backsimeq 10^{-10}\ cm,\ d''_3 \backsimeq 10^{12}\ cm = l^3/(m^2), \\ \qquad b''_5 \backsimeq 10^{34}\ cm = l^4/(m)^3. \\ b''_2 = m \backsimeq 10^{-54}\ cm,\ b''_4 \backsimeq 10^{-76}\ cm,\ b''_6 \backsimeq 10^{-98}\ cm. \end{cases}$$

γ) *Le proton :*

$$(43')\qquad d_1 \backsimeq a.10^{-3},\ d_2 \backsimeq m.10^{+3};$$

$$(44')\qquad b_1 \backsimeq b.10^{-3},\ b_2 \backsimeq m.10^{3}.$$

δ) *Relations :*

δ_1) $d''_i\ d''_{p5} = e^2$ (ou $d''_{i_0}\ d'''_{p_0} = e^2_0$), $b''_i\ b''_{p_5} = l^2$ (ou $b_{i_0}\ b'''_{p_0} = \hbar$).

δ_2) Par le choix d'un terme arbitraire de la progression (IV 41) comme terme central, on a les décompositions en facteurs (soit pour l'électron

$\ldots (2m)^2 = ep,\ e^2 = 2ma;\quad a^2 = Ae,\ A^2 = Ba \ldots$ etc.

δ_3) Les constantes équidistantes vis-à-vis des termes choisis arbitrairement s'interchangent, par exemple

$A, 2m$ et $a,\ e$; donc. $A = e^3/(2m)^2$, $a = e^2/2m$ est équivalent à

$$2m = a^3/A^2,\ e = a^2/A,$$

(= inversion des constantes à l'index impair et pair — le zéro inclus; de même inversion des constantes cosmiques et atomiques).

δ_4) Posons par analogie à $r^0{}_s$ et $q^0{}_s$, (voir 20)

$$\lambda = E^{l\lambda'},\ \mu = E^{l\mu'} \text{ donc } d''_{i,p_5} = eE^{\pm\left(\frac{i+1}{2}\right)l\lambda'}, \tag{45}$$

$$b''_{i,p_5} = l\,E^{\pm\left(\frac{i+1}{2}\right)l\mu'}$$

($l\lambda'$, $l\mu'$ = logarithmes naturels).

Les constantes $d''_{i,p5}$ et $b''_{i,p5}$ correspondent donc aux valeurs entières du paramètre i ou aux valeurs quantifiées des paramètres

$$\left(\frac{i+1}{2}\right)l\lambda' \text{ et } \left(\frac{i+1}{2}\right)l\mu'.$$

2^0. *Variation des grandeurs atomiques.*

α) *Théorie de* Weyl. Le potentiel gravitationnel est

$$2r'_3/r,\ r'_3 = (1/2\lambda^2)\ r_3 = m\ (1 - a/r) = m - (1/2)\ e^2/r = m - r'_2$$

$$r'_2 = (1/2\lambda^2)\ r_2 = ma/r = (1/2)\ e^2/r = m - r'_3.$$

r'_3 est la masse gravifique, r'_2 l'énergie électromagnétique du champ, qui va déterminer la liaison des corpuscules. Interprétation de Weyl: la masse m est une singularité du champ (respectivement de l'énergie électromagnétique). A vrai dire, au point de vue fonctionnel le rôle du r'_2 et r'_3 (ou r_2 et r_3) est symétrique, tel que leur somme est la masse totale m (respectivement a). Mais cette symétrie n'existe pas au point de vue groupale de la physique d'action: $r_3{}^0$ est élément d'un groupe $R_3\ CR_6$, $r_2{}^0$ ne l'est pas.

β) *Défaut de la masse.* En relativité, la liaison des corpuscules va déterminer pour chaque particule constitutive un défaut de la masse (énergie), défaut equivalent à l'énergie de la liaison (énergie du champ électromagnétique). La liaison doit être incluse dans la définition du corpuscule même. Nous interprétons donc

$$\Delta r_3' = r'_2 = (1/2)\ e^2/r$$

comme défaut de la masse $r'_3 = m - \Delta r'_3$. La masse gravifique r'_3 est

différence entre masse totale m et défaut de la masse ; r'_3 correspond à l'individualité du corpuscule, r'_2 à la collectivité. Ce résultat va se généraliser pour toutes les grandeurs gravifiques r_i et électromagnétiques r_p de la physique d'action :

(46) $$r'_p = \Delta r'_i \,, \quad r'_i = a_i - \Delta r'_i \,.$$

Les relations fonctionnelles des couples complémentaires et correspondantes deviennent

(47) $r'_i \Delta r'_{i_3} = a_i a_{p_5}$ (ou $r_i \Delta r_{i_3} = a^2$) (notons $r_i = r_i - 0$).

Les relations supplémentaires donnent

(46') $$r'_i + \Delta r'_i = a_i \text{ (ou } r_i + \Delta r_i = a).$$

γ) *Variation.* Grandeurs collectives (électromagnétiques) et grandeurs individuelles (gravifiques) varient donc en rapport inverse : pour $\Delta r'_i = 0$ on $r'_i = a_i$ et inversement ; pour $\Delta r_i \to 0$, on a $r_i \to \infty$ et inversement. Quand à la coordonnée r'_i, le corpuscule est „localisé" en 0_i (point ou s'annule r'_i) dans lequel le défaut de la coordonnée „polaire" r'_{i_3} est maximum (infini) et d'une manière inverse : la valeur totale a_{i_3} du r'_{i_3} est atteinte pour $\Delta r'_{i_3} = 0$ quand r'_i devient indéterminé ($r'_i = \infty$) ; r'_i considerée comme variable de base, r'_{i_3} est la masse gravitationnelle correspondante. Les mêmes relations sont valables pour le temps (q'_i, q'_{i_3}). Les 3 relations (47) correspondantes aux couples (1,3), (3,5), (5,1), spatiels ou temporels contiennent en germe les relations de Heisenberg ; il s'agit ici des corpuscules en quelques façons isolés (le deuxième corpuscule étant réduit à un point plongé dans le champ du premier), en repos spatial et mouvement temporel. En relations de Heisenberg se présentent par contraire : 1. l'interaction pleine de deux corpuscules (paramètres u_i, w_i du III 32) ; 2. le mouvement spatial (paramètre v_i du III 32).

Des relations généralisées sont valables pour

$$r_i^0 = x_i / u'_i \, \eta_i(q^0), \quad q_i^0 = x_j / u'_j \, \xi_i(r^0).$$

Ici, à droite, r_i et q_i, a_i et b_i sont remplacés par x_i et x_j respectivement $u'_i \eta_i(q^0)$ (fonction de temps) et $u'_j \xi_i(r^0)$ (fonction de lieu). Il s'agit ici d'un mouvement spatio-temporel (u_τ' = longueur).

δ) *Les défauts à l'infini.* Pour les potentiels groupales (12'') on a les valeurs limites

$$\alpha_s = \lim_{\varphi \to \infty} q_t(q_0) = \lim_{r \to \infty} r_t(r^0) \,; \quad a'_i + a'_p = a_i \,.$$

Le défaut n'est plus nul à l'infini $r'_i = \infty$; il est $\Delta a'_i = a'_p = a_i - a'_i = \alpha'_p a_i$.

Par exemple $r_3'' = a_3' \ (1 - r_2'/a_2') = \alpha_3 \, m \, (1 - a/r)$.

Le défaut total $\Delta r_3'' = m - r''_3 = m \, (1 - \alpha_3 \, r_3^0)$.

Pour $r > a$, on a $r_{2,4}^0 > C, r_6^0 < 0$; $\alpha_{2,4} > 0$, $\alpha_6 < 0$,

donc les défauts à l'infini $\Delta a'_{3,5} > 0$, $\Delta a'_1 > 0$.

et les défauts totales (48) $\Delta r''_{3,5} > 0$, $\Delta r_1'' < 0$.

De même pour les grandeurs temporelles : dilatation des grandeurs métriques et compressions des grandeurs matérielles.

Le rapport $a'_2/a_3 = \alpha_2 \ m/m = \sqrt{3} - 1$ est donc voisin au rapport classique 3/4 de l'énergie électromagnétique et de l'énergie totale de l'électron (Lorentz) ; de même pour les autres grandeurs.

3⁰. *Nombre des particules.*

α) *Relations classiques.*

α_1) Equations de la mécanique ondulatoire. Le mouvement d'un électron au milieu d'un champ créé par un électron fixe est déterminé par quatre fonctions Φ qui vérifient l'équation.

$$(49) \qquad \left[\frac{2\pi}{\gamma}\left(i\frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_f i_f \, i_0 \frac{\partial}{\partial x_f}\right) + \frac{i^2}{r} + i_0\left(\frac{i}{2a}\right)\right]\Phi = 0 \ ;$$

l'index $f = 1, 2, 3$ correspond aux dimensions spatielles, l'index zéro au temps $x_0 = ict$; (49') $\gamma = e^2/l^2 = \lambda^2/\mu^2$, i_f, et i_0 étant des matrices orthogonales, $2a = e^2/m$ (Mineur, B 23).

α_2) Nombre des corpuscules. Soit n^0 le nombre totale des électrons de notre supergalaxie, a^0 le rayon actuel de ce système (en relativité classique n^0, a^0 ont été considérés comme nombre des électrons respectivement comme rayon de l'univers einsteinien, fini). D'après Eddington, on a

$$(50) \qquad \sqrt{n^0} = a^0/2a, \quad \text{donc} \quad 1/2a = \sqrt{n^0}/a^0.$$

La supergalaxie se comporte donc comme un seul corpuscule de rayon a^0 qui remplace le rayon a de l'électron. (Eddington, B21, 22).

α_3) Masse de la supergalaxie. g^0 étant la masse totale du système en grammes, $g = k_0 \, g^0$, on a la relation d'Einstein

$$(51) \qquad a^0 = \frac{4}{\pi} g.$$

Soit m'_0 la masse du proton, $m' = k_0 \, m'_0$. Admettons la supergalaxie neutre du point de vue électrique ; le nombre des protons est alors égal au nombre des électrons,

$$g = n^0 \ m + n^0 \ m' = n^0 \ m' \left(1 + \frac{1}{1{,}6} \, 10^{-3}\right), \text{ donc}$$

(52) $$g \backsimeq n^0 \, m' .$$

Des relations (50, 51, 52) on tire

(53) $$a^0 = \frac{\pi}{4} \frac{a^2}{m'}; \; a^0 \, m' = \frac{\pi}{4} a^2 .$$

β) *Interprétations.*

β_1) Interprétation classique. Espace et matière étant réalités distinctes, la relation (IV 51) suppose en quelque sorte „d'harmonie préétablie" qui liera la masse de la supergalaxie et son rayon tel qu'ils seront égaux (Weyl).

β_2) Interprétation d' Eddington. La matière serait la courbure du monde *quadri-dimensionnel* relativiste espace-temps ; la masse g serait alors *définie* par la relation (IV 51).

β_3) Interprétation de la physique d'action. En espace hypercomplexe S_{12}, a et m (respectivement a' et m') sont les rayons de l'électron (respectivement du proton) correspondants aux fonctions r_1 et r'_3 ou r'_2 (donc aux unités hyperimaginaires e_1 et e_3 ou e_2). Il s'agit ici d'une „dimension matérielle" e_3 nettement distincte de la dimension spatielle e_1 ; les coefficients (longueurs) a et m en déterminent la forme („ellipsoïdale") de l'électron. Pour la supergalaxie, ce sont des grandeurs a^0 et $g = \pi \, a^0/4 \backsimeq a^0$ (situées sur les axes aux unités e_1, e_3) qui remplacent a et m ; leur égalité en signifie une forme hypersphérique actuelle de la supergalaxie en S_{12}, hypersphère en dilatation ou compression temporelle.

γ) *Relations numériques :*

γ_1) Le rayon. La formule (IV 53) doit être modifiée ; pour le proton on doit remplacer a par a', donc $a'^0 \, m' = \pi \, a'^2/4$. Pour l'électron, m' doit être remplacé par m, la masse de l'électron. En concordance aux observations astronomiques on a alors $a^0 \, m = \pi \, a^2/4$, relation qui a été relevée par Weyl. En général, le rayon de la supergalaxie est le terme d''_5 de la progression (IV 41)

(53') $$d''_5 = d^2_1/2d_2 = e^4/(2d_2)^2 ,$$

en supposant la supergalaxie formée d'une seule type de particules élémentaires. A côté de d''_5 apparait en physique d'action

(53'') $$d''_3 = d^2_1/e = d^3_1/(2d_2)^2$$

[donc pour l'électron $A = e^3/(2m)^2$,] qui correspond à la grandeur atomique e (charge) comme d''_5 correspond à d_2 (masse) (voir la théorie du potentiel).

γ_2) Le nombre des particules. Supposons le système P_i corres-

pondant au terme d'ordre i de la progression (IV 41_1) (soit la supergalaxie) constitué de n_i^0 particules élémentaires de même type (particule d'ordre 1) ; on a

$$\sqrt{n^0_{i+2}}/d''_{i+2} = \sqrt{n^0_i}/d''_i = \ldots = 1/d_1 \; ; \tag{50'}$$
$$d''_{i+2}/d''_i = \sqrt{n^0_{i+2}/n^0_i} = \lambda, \; n^0_i = \lambda^{i-1} .$$

Pour la supergalaxie ($i = 5$; $n_s^0 = \lambda^4$), réduite aux électrons (protons) ($i = 1$) en résultera $n^0_5 \backsimeq 10^{80}$ (respectivement 10^{88}).

γ_3) Nombre des dimensions. Pour le corpuscule P_i d'ordre i, on a

$$n^0_i = \lambda^{i-1}, \; d''_i = e\lambda^{\frac{i+1}{2}}.$$

Le rapport des volumes du P_i et de la somme des volumes des particules élémentaires doit être supérieur à l'unité :

$$V_i/n_i^0 \; V_1 > 1,$$

donc le nombre des dimensions de l'espace respectif (du système d'ordre i) doit être $n \geqslant 3$ pour $i \neq 1$ (et n arbitraire pour $i = 1$). Chaque particule élémentaire est alors plongé dans un volume

$$V'_1 = V_i/n_i^0 \text{ de } n_i^{0\,\left(\frac{n-2}{2}\right)}$$

fois plus grande.

$$V_i/n_i^0 \; V_{-1} = n_i^{0\,(n-2)/2}.$$

Pour $n = 3$, on a $V_i/n_i^0 \; V_1 = \sqrt{n_i^0}$; il en résulte une nouvelle définition du nombre n_i^0. Pour la supergalaxie ($i = 5$) supposée formée des électrons) à trois dimensions spatielles, du rayon a^0 on a (en notant $n^0_5 = n^0$, $d_5'' = a^0$)

$n^0 \backsimeq \lambda^4$, $a^0 = B = e\lambda^3 \backsimeq 10^{27}$ cm, $g \backsimeq 10^{26}$ cm ($g_0 \backsimeq 10^{54}$ grammes).

Le volume dans lequel est plongé chaque électron est alors

$$V_1' \backsimeq 4\pi \; a^3\lambda^2/3 \backsimeq 1 \text{ cm}^3, \text{ son rayon} \backsimeq a\lambda^3/_2 \backsimeq 1 \text{ cm}.$$

Sur le volume B^n ($n = 1, 2, 3$) reviennent respectivement par approximation B^n électrons aux poids totales

mB ($\backsimeq a^2$), mB^2, mB^3 (donc approximativement 1 gramme, 10^{27} grammes, 10^{54} grammes).

4^0. *Grandeurs du photon.*

α) *Théorie de de Broglie.* En théorie classique, l'énergie de repos d'un photon étant égale à son impulsion relativiste, la masse totale du photon $\mu_0 = 0$. La nouvelle théorie du photon (v. de Broglie, 25) est une synthèse du continu et discontinu et aussi une double quan-

tification du champ électromagnétique. En théorie de de Broglie μ_0 est fini, mais

(54) $$\mu_0 \leq 10^{-45}\,\text{gr.}$$

β) *Physique d'action.* En physique d'action, la masse d'ordre 2 ($p_5 = 2$) des progressions (IV 41) est d_2 (électron, proton etc) ; les masses d'ordre 4 ($p_5 = 4$) sont $d_4'' = e\lambda^{-2}$, $b_4'' = l\mu^{-2}$ (spatiale resp. temporelle). Pour l'électron (voir IV 43,44), les masses d''_{40} et b''_{40} vérifient la condition de de Broglie. En physique d'action, constantes cosmiques, électroniques et quantiques s'unifient donc en même loi.

5^0. *Grandeurs temporelles.*

α) *Théorie de* Haldane. Donnée une relation exponentielle

(55) $$Q_0 = t^0 E^\tau\,, \quad \tau = (t_1 - t^0)/t^0\,,$$

entre temps dynamique Q_0 et temps cinématique t_1 (ou τ), t^0 étant une constante cosmique (astronomique) temporelle, t_1 et τ des variables des dimensions temporelle resp. nulle, on a pour $t_1 = t^0$, aussi $Q_0 = t^0$. Les échelles de temps Q_0, τ (ou Q_0, t_1) seront sensiblement les mêmes pour $t \backsimeq t_0$, et diffèrent d'une manière croissante dans l'avvenir ou passé lointain. En théorie de Haldane, le rayon de la supergalaxie est minime pour $t_1 = t^0$ situé dans le passé

(55') $$t^0 \backsimeq 10^9 \text{ années} \backsimeq 10^{16} \text{ sec} ;$$

on a contraction pour $t_1 < t^0$ et expansion pour $t^0 < t_1$.

β) *Physique d'action.* Posons pour la supergalaxie ($i = 5$),

(55'') $$t^0 = b_{50}'',\ ct^0 = b_5'',\ \tau = (t_1 - b_{50}'')\,/\,b_{50}'' = (ct_1 - b_5'')/b_5''.$$

Introduisons $b_5'' = b\mu^2$ comme étalon cosmique temporel, (correspondant au rayon spatial $d_5'' = d\lambda^2$ de la supergalaxie) en posant $t_1/b_5'' = t$, donc

(55''') $$\tau = ct - 1,\ d\tau = cdt,\ dq = q\ cdt,\ dq^0 = q^0\ cdt$$

(voir IV B),

$$Q = \mu^2 q, \quad Q_0 = Q/c\ ;$$

alors Q_0 est donnée par la formule (55) de Haldane. Des formules analogues seront valables pour les variables spatielles. Pour une supergalaxie supposée formée des électrons, les progressions (43,44) de la physique d'action donnent

$$b_5'' \backsimeq 10^{34} \text{ cm},\ b_{50}'' \backsimeq 10^{24} \text{ sec.} \backsimeq 10^{17} \text{ années},$$

pour une supergalaxie formée des protons,

$$b_5'' \backsimeq 10^{25} \text{ cm},\ b''_{50} \backsimeq 10^{15} \text{ sec} \backsimeq 10^8 \text{ années},$$

voisine à la valeur 10^{17} années de Haldane.

γ) *Interprétation.* Au contraire des interprétations idéalistes métaphysiques d'Eddington, James Jeans etc. t^0 n'a pas la signification d'une période fini de l'évolution (durée) de l'univers, déterminée par une création ou explosion d'un atome primitif; t^0 est simplement une constante astronomique temporelle liée à la supergalaxie. D'une façon analogue, d_s'' et d ne constituent pas des frontières spatiales finies *absolues* de l'univers, d'un système ou d'un corpuscule. Chaque particule, système comme aussi l'univers est *infini* (et interpénétré avec des autres systèmes) en *temps* et *espace.* Les constantes d''_{i,p_5} et b''_{i,p_5} donnent alors les frontières *relatives* (spatiales on temporelles) de l'individualité des divers systèmes. (Unité des contraires „complémentaires" 1) individualité = pluralité = fini = discontinuité et 2) collectivité = unité = infini = continuité en totalité).

3. *Décomposition des coordonnées en facteurs.*

1⁰. *Les facteurs.*

α) On a les décompositions de rang β

$$
\begin{aligned}
&0 \ldots x_s = r'_s\ \eta_s \quad x_t = q'_s\ \xi_s \\
&1 \ldots r'_s = d_s\ r^0_s \quad q'_s = b_s\ q^0_s \\
&2 \ldots d_s = e\ \lambda_s \quad b_s = l\ \mu_s \\
&3 \ldots e = u\ \gamma \quad l = u\ \gamma^{-1}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

donc

$$
\begin{aligned}
x_s &= u\gamma\,(\lambda_s\ r^0_s\ \eta_s). \\
x_t &= u\ \gamma^{-1}(\mu_s\ q^0_s\ \xi_s)\,.
\end{aligned}
\tag{40'}
$$

β) Les 3 décompositions successives d'ordre $\beta = 1, 2, 3$ de x_s, x^t correspondent aux trois couples (III 2); la décomposition du rang β décompose chaque longueur respectivement en rapport (facteur physique pour x_s et géométrique pour x_t) et longueur (facteur géométrique pour x_s et physique pour x_t); le dernier se décompose à son tour.

Les variables géométriques (espace, gravitation, métrique) correspondent respectivement à l'individualité relative (limité par le collectif) du corpuscule) les variables physiques (temps, électromagnétisme, matière) correspondent aux caractères collectives relatives (limités par l'individualité) (voir pag. 649).

γ) Parmis les longueurs d'ordre 3 nous distinguons: a) les coordonnées algébriques r_s et q_s; b) les coordonnées géométriques r'_s et q'_s; c) les coordonnées physiques r_{s_0} et q_{s_0}, hétérogènes telles que

$$(56)\qquad \begin{cases} r_s = d_1\, r_s^0, \quad r'_s = d_s\, r_s^0, \quad r_{s_0} = d_{s_0}\, r_s^0 \\ q_s = b_1\, q_s^0, \quad q'_s = b_s\, q_s^0, \quad q_{s_0} = b_{s_0}\, r_s^0. \end{cases}$$

2⁰. *Constantes et variables.*

α) *Conclusions fondamentales :* en physique d'action, les notions des constantes et variables ne seront plus des grandeurs d'opposition irréductible, métaphysique. Les „constantes" (d_s, b_s ; e, l ; u) ou les rapports „constants" (λ_s, μ_s ; $\gamma_{1,2}$) seront des „variables" et des „constantes" toutefois, comme les „variables" $r_s^0\,\xi_s$ et q_s^0, η_s aussi. Chaque grandeur est constante par rapport aux grandeurs d'ordre inférieur et variable par rapport aux grandeurs d'ordre supérieur. Les grandeurs d_s, b_s sont beaucoup plus fondamentales que r_s^0, q_s^0 et constantes par rapport à celles-ci. Aussi e, l (donc γ) par rapport à d_s, b_s (et λ_s, μ_s), comme aussi u par rapport à e, l.

β) *Dépendance.* r^0 et q^0 (et η_s, ξ_s) varient pour chaque particule à part ; λ, μ dépendent de la nature de la particule (élémentaire ou composée d'un nombre variable n_i^0 des particules élémentaires). γ (comme δ, c, k_0) sont beaucoup plus „constantes".

γ) Variables de base. En considérant u et les rapports (γ ; c, δ, k_0) comme „constants", les coordonnées propres x_τ s'expriment en fonctions de 4 variables r^0, q^0 ; λ, μ (dont les deux dernières seront considérées comme constantes par rapport aux premières). Ce cas correspond à 4 variables métriques $k_{1,7}$; $k_{6,12}$ de la géométrie abstraite (III, pag. 623) ou encore à 8 équations

$$(57)\qquad \begin{array}{ll} \Pi x_i^0 - 1 = 0 ; & \Pi x_i^0 - 1 = 0 ; \\ \text{(1 équation)} & \text{(1 équation)} \\ x_i^0\, x_{p_5}^0 = 1 ; & x_j^0\, x_{q_5}^0 = 1 \\ \text{(3 équations)} & \text{(3 équations)} \end{array} \qquad \left(x_\tau^0 = \frac{x_\tau}{u'_\tau} \right).$$

Restent donc 4 variables indépendantes. En considérant encore λ, μ constantes, les variables spatielles et temporelle (r^0, ϱ^0) sont les variables „fondamentales".

3⁰. *L'étalon.*

α) *La variable d'étalon.* Au lieu d'une seule variable d'étalon, la physique d'action en pose plusieurs variables u_s', u_t' en considérant les constantes comme variables d'étalon, spécifiques pour chaque coordonnée (d'une façon plus précise, comme variables d'étalon groupales). Il en reste à vrai dire une seule variable d'étalon arbitraire (soit u') ; mais son choix est en physique d'action déterminé par les constantes physiques elles-mêmes, donc par la quantification (voir ci-dessous, et théorie du potentiel).

Cette thèse fondamentale de la physique d'action est située sur le chemin indiqué par Riemann (B 37). En opposant les espaces continus aux espaces discontinus constitués des éléments isolés, Riemann définit la *mesure* de chaque élément d'un espace discontinu par le *nombre* des éléments de cet espace. „Le problème de la valabilité des hypothèses géométriques sur l'échelle infiniment petite est lié au problème des fondements internes de la mesure de l'espace"... Quand à l'ensemble discontinu, le principe de la mesure est déjà contenu dans la notion de cet ensemble ; quand à l'ensemble continu, ce principe doit avoir d'autres sources. La réalité fondamentale de l'espace doit donc constituer un ensemble discret, ou bien le fondement de la mesure doit être trouvé ailleurs, en certaines forces de liaison qui vont actionner sur celle-là". Cette distinction riemannienne va anticiper la physique et géométrie relativiste (continue) comme aussi la physique et géométrie quantique (discontinue). La théorie mathématique de l'unité du continu et discontinu d'une part, de la métrique et de la matière d'autre part, unité fondée sur bases matérialistes, est la tâche fondamentale de la physique moderne.

En particulier : $u_s' = d_s u'$, $u_t' = b_s u'$; α_1) ($u' = 1$) (étalon naturel) (voir IV 40, 40') ; α_2) étalon cosmique ($u' = 1/\lambda\mu$) (voir 57_1).

β) *L'étalon cosmique.*

β_1) Choix de u'. En divisant les coordonnées r_τ et q_τ par les rayons d_3'' respectif b_3'' (étalon cosmique, voir IV 53") on obtient les coordonnées

$$r_\tau/d_3'' = r_\tau^0/\lambda\,; \quad q_\tau/b_3'' = q_\tau^0/\mu. \tag{57}$$

On doit donc poser pour l'étalon

$$x_s/u_s' = r_s^0 q_t^0\,, \quad x_t/u_t' = r_t^0\, q_s^0,$$

$$u_s' = d_s\, u',\ u_t = b_s\, u',\ u' = 1/\lambda\mu \tag{57_1}$$

tel que

$$x_s = u'\, r_s'\, q_t^0 = ds\frac{r_s^0}{\lambda}\frac{q_t^0}{\mu}, \qquad x_t = u'\, q_s'\, r_t^0 = b_s\frac{q_s^0}{\mu}\frac{r_t^0}{\lambda}\,. \tag{57_2}$$

β_2) Les r_s^0/λ et r_s^{02}/λ. On a par exemple pour l'électron ($d_3'' = A$).

$$r_1/A = r/A, \quad r_3/A = 2m/e - e/r, \quad r_5/A = e/(a - r)$$

$$r_6/A = a/A - r/A, \quad r_2/A = a^2/Ar = e/r, \quad r_4/A = er/(r - a).$$

On a donc pour les carrés des coordonnées, les développements

$$r_1^2/A^2 = r^2/A^2, \quad r^2{}_3/A^2 = A^2/A^2 - 4m/r + e^4/r^2,$$

$$r_5/A^2 = e^2/(a - r)^2 = e^2/r^2 + \ldots$$

$$r_6^2/A^2 = A/A^2 - 2r/B + r^2/A^2, \quad r^2{}_2/A = e^2/r^2,$$
$$r_4^2/A^2 = e^2 r^2/(r-a)^2 = a^2/A^2 + 2m/r + 2e^2/r^2 \ldots$$

(en développant en séries pour $r > a$). On obtient donc les constantes atomiques m, e (et les autres) et la constante cosmique B [voir encore la théorie du potentiel (IV 66', 68')] par la division des coordonnées $r_s^0 = r_s/a$, où ne figurent pas d'autres constantes que le rayon classique a de l'électron, par une simple division par la constante cosmique $A = e^3/(2m)^2$; de même pour les autres corpuscules.

β_3) Symétrie des constantes cosmiques et atomiques. Pour les couples des carrés des coordonnées métriques-matérielles, à l'étalon cosmique d_3'', la transformation $r_{p_5} = d_1^2/r_1$ (= permutation des 2 grandeurs complémentaires, soit du rayon vecteur spatial r et de l'énergie potentielle r_2) effectuée pour les couples $r_{1,6}^2$, $r_{3,2}^2$, $r_{5,4}^2$ permute les termes métriques et matérielles, donc les régions internes et externes du corpuscule (soit l'électron), donc aussi les constantes atomiques et cosmiques B et $2m$, A et e. Il en résulte une nouvelle signification des constantes cosmiques B, A. On a par exemple

$$57_3) \qquad x^2 = (r_3^2 - r_6^2)/A^2 = -(a^2/A^2 - 2ar/A^2 + r^2/A^2) +$$
$$+ (a^2/A^2 - 2a^3/A^2 r + a^4/A^2 r^2) = -2r/B + r^2/A^2 - 4m/r + e^2/r^2.$$

La transformation $r_2 = a^2/r^2$ donne

$$57_4) \qquad x^2 = -4m/r_2 - e^2/r_2^2 - 2r_2/B + r_2^2/A^2.$$

Donc les termes

$$r/B = 2m/r_2 \text{ et } 2m/r = r_2/B ; \quad r^2/A^2 = e^2/r_2^2 \text{ et } e^2/r^2 = r_2^2/A^2$$

se correspondent, donc aussi les constantes B et $2m$; A et e.

4°. *Suites des variables.* En remplaçant les suites (21', 21'') par H_n, H_φ (58_1, 58_2), les suites des variables cosmiques ($58_{1\text{-}5}$) correspondent aux suites des espaces (III 5-9) ou aux systèmes (II 42-46). Aux indices près, les transformations-réductions des unités bisextiques (II 13, 14 ; 40 ; III 2) dérivent des relations fonctionnelles (de type $13_{1,2}$) des variables cosmiques, en remplaçant la multiplication (division) par l'addition (soustraction), donc en prenant les logarithmes naturels des variables cosmiques. La décomposition de chaque longueur cosmique d'ordre β_1 en 2 facteurs d'ordre β (longueur et rapport) revient donc à la décomposition de „l'espace géométrique„ H_{n_1} (d'ordre β_1) en „espace factoriel" H_n (= „espace des variables géométriques réduites" d'ordre β) et „l'espace complémentaire" H_φ (= l'espace des variables physiques réduites" d'ordre β).

	β	0	1	2	3
(58_1)	H_δ	$H_1(r_i)$	$H_3(r_i)$	$H_6(r_i, r_p/\lambda^2)$	$H_{12}(r_i, r_p/\lambda^2; q_i q_p/\mu^2)$
(58_2)	H_n	$H_{12}(r_i, r_p/\lambda^2; q_i, q_\gamma/\mu^2)$	$H_4(-a, -m; -b, -m)$	$H_2(e, l)$	$H_1(u)$
(58_3)	H_φ	$H_{12}(\eta_i, \eta_p\,;\ \xi_i, \xi_p)$	$H_8(r^0_{6,4}, r^0_{3,5}; q^0_{6,4}, q^0_{3,5}$	$H_2(-\lambda, -\mu)$	$H_1(\gamma)$
(58_4)	H_m	$H_0(0)$	$H_3(r_i)$	$H_2(-a, -m)$	$H_2(e, l)$
(58_5)	H_m'	$H_0(0)$	$H_3(r_i)$	$H_2(r_1, r_p/\lambda^2)$	$H_2(r_1, q_1)$.

B. *Géométrie infinitésimale.*

a) *Différentielles et intégrales.*

1. *Différentielles.*

Pour le paramètre exponentiel ζ_i (σ_i, τ_i) on a les formules symétriques

$$(60)\qquad d\zeta_3 = -\zeta_5\, d\zeta_1\,,\quad d\zeta_5 = -\zeta_4\, d\zeta_1\,,\quad \text{donc}\quad \Sigma\, d\zeta_i = 0$$

$$(60')\qquad \Sigma\, d\zeta_i^2 = -2\sum_{i'\neq i} d\zeta_i\, d\zeta_{i'} = 2\, d\zeta_1^2\,(l - E^{\zeta_1} + E^{\bar{}\zeta_1})\,/\,(l - E^{\zeta_1})^2 = 2\,(d\zeta_i^2 - d\zeta_{i'}\, d\zeta_{i''})$$

$(i' \neq i'' \neq i)$. Il est donc possible de représenter l'espace S_i sur chacun des espaces aux formes métriques

spatielle $d^2_{\sigma_i} - d_{\sigma_{i'}}\, d_{\sigma_{i'}}$ et temporelle $d\tau_i^2 - d\tau_{i'}\, d\tau_{i''}$,

aux cordonnées réelles $d\zeta_i$ ou hyperimaginaires $d\zeta_i\, e_i$.

$$(60'')\qquad d\zeta_i\, d\zeta_{p_5} = d\zeta_i^2\ (i, p_5 \text{ complémentaires})\,;\ \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_i & z_{p_5} \\ dz_i & dz_{p_5} \end{vmatrix} = -d\zeta_i.$$

2. *Intégrales.*

1⁰. *Les coordonnées comme fluxes du champ.*

α) *Les* r_s. Chaque r_s (ou q_s) peut être défini par une intégrale simple (dans l'espace physique de quatre dimensions comme intégrale triple étendue sur un champ sphérique ayant l'origine au centre O du corpuscule). Introduisons la „densité" (61) $\Phi_s = \dot{r}_s/r^2$; $\dot{r}_s$ est la dérivée de r_s par rapport au rayon vecteur $r = dE^\sigma$, telle que pour un changement des coordonnées cartesiennes en coordonnées sphériques r, ω_1, ω_2, en produit de Φ_s avec le déterminant fonctionnel $r^2 \sin \omega_1$, la grandeur r^2 s'éliminera. Pour les couples supplémentaires on a

$$(61')\qquad \Phi_1 = -\Phi_6 = 1/r^2,\quad \Phi_3 = -\Phi_2 = d^2/r^4,$$
$$\Phi_5 = -\Phi_4 = d^2/r^2\ (1 - r/d)^2.$$

Chaque variable r_s est donc une intégrale de la forme

$$(62) \qquad r_s = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{r_\alpha}^{r} \Phi_s \, r^2 \sin \omega_1 \, dr \, d\omega_1 \, d\omega_2 = \int_{r_\alpha}^{r} \Phi_s \, r^2 \, dr ,$$

la limite inférieure r_α étant la valeur du r qui va annuler r_s, donc

$$r_\alpha = 0, \; d, \; \infty ; \quad \infty, \; 0, \; d \quad \text{pour} \quad s = 1, \; 3, \; 5 ; \quad s = 2, \; 4, \; 6.$$

Les cordonnées r_s se présentent donc comme fluxes du champ pour une surface fermée autour d'un des points O, A, I; la matière vient d'apparaître comme réalité physique plongée dans le cadre espace-temps donnée d'avance.

β) *Les* a_s. Plus particulièrement, toutes les constantes sont des fluxes du champ; l'intégrale s'étend alors du „zéro" à „l'unité" de la fonction r_s respectivement. En multipliant les intégrales par d_s/d, on obtient les constantes géométriques homogènes (longueurs) d_s (ou b_s). Pour l'électron, au lieu de la constante „algébrique" d (ou b pour les grandeurs temporelles q_s)

$$(63) \qquad a = \int_0^{a} dr, \; m_3 = m = {}^1/_2 \int_a^{\infty} e^2 \, r^2 \, dr ; \; a_5 = e = e \int_{\infty}^{0} a dr/(a - r)^2 ,$$

$$m_2 = m = \int_{\infty}^{a} (-e^2) \, dr/r^2, \; e_4 = e = \int_0^{\infty} e dr/(a - r)^2,$$

$$(63') \qquad a_6 = a = -a \int_a^0 dr .$$

2^0. *Changements des variables.* Les permutations des variables reviennent aux transformations des intégrales vis-à-vis de la nouvelle variable de base (soit par ex. $r_2 = a^2/r$). Soit Φ'_s la densité de r_s calculée par rapport à r_2 ; on a

$$\dot{r}_2 = \Phi'_2 \, r_2^2 = 1, \; \Phi'_2 = 1/r_2^2, \text{ donc } r_2 = \int_0^{r_2} dr_2$$

$$\dot{r}_1 = \Phi'_1 \, r_2^2 = -a^2/r_2^2, \quad \Phi'_1 = -a^2/r_2^4, \quad r_1 = \int_0^{r_2} (-a^2 \, dr_2)/r_2^2 \text{ etc}$$

Posons

$$r_2 = \bar{r}_1, \; r_1 = \bar{r}_2 \text{ (et donc } r_3 = \bar{r}_6 , \; r_6 = \bar{r}_3 ; \; r_5 = \bar{r}_4 ; \; r_4 = \bar{r}_5)$$

r_2 et r_1 s'écrivent

$$\bar{r}_1 = \int_{\infty}^{\bar{r}} d\bar{r}_1 , \; \bar{r}_2 = \int_{\infty}^{\bar{r}} (-1/2 \, a^2 \, d\bar{r})/\bar{r}^2 \text{ etc.},$$

donc exactement les formules (IV 62), en changeant r_s en $\bar{r}_s$. En restant invariante au point de vue arithmétique, chaque intégrale change comme fonction. De même pour les constantes

Si la masse r_3 et la charge r_4 (et particulièrement m et e) sont respectivement le flux du champ gravifique (Weyl 11) et électromagnétique (Faraday) pour une surface fermée autour du O (où s'annulle $r_1 = r$), en physique d'action, le rayon vecteur r (et particulièrement le rayon classique a) se présente aussi comme flux d'un certain champ pour une surface fermée autour de A respectivement O (zéros de r_3 respectivement du r_4) ; il en résulte donc l'interprétation matérialiste de l'espace.

b. *Théorie des potentiels.*

1. *Relations générales.*

1⁰. *Définitions.* x_τ ($= x_s$, $x_t = y_s$) étant les 12 variables, la forme métrique fondamentale quadratique est

$$d_s^2 = V'(dx_\tau) = B'(dx_\tau)\, j_1 + D'(dx_\tau)\, m_1 = \\ = U'(dx_\tau)\, e_1 + W'(dx_\tau)\, e'_1 \,. \tag{64}$$

En remplaçant a_τ par x_τ, toutes les formes quadratiques (particulièrement B', D' et U', W') et formes linéaires (particulièrement les réduites dh_τ, dk_τ, dl_τ) de la géométrie abstraite (III) se transposent ici.

2⁰. *Coordonnées cosmiques.* En considérant les variables λ, μ et aussi u'_τ comme constantes et r_s^0, q_s^0 et ξ_s, η_s comme variables fonctions de deux variables $r = dr^0 = dE^\sigma$, $q = bq^0 = bE^\tau$ respectivement (voir IV 12'), il en résultent certaines formes à deux variables (dont V' à coefficients hypermaginaires j_1, m_1 respectivement e_1, e'_1), (voir 55''') soit

$$g'_{11}\, dr^2 - g'_{00}\, dq^2 + 2g'_{01}\, dr\, dq = g_{11}\, d\sigma^2 - g_{00}\, c^2\, dt^2 + 2g_{01}\, d\sigma\, cdt \tag{65}$$

(forme quadratique)

et

$$\varphi'_1\, dr + \varphi'_0\, dq = \varphi_1\, d\sigma + c\,\varphi_0\, dt \text{ (forme linéaire).} \tag{65'}$$

Par l'hypothèse (IV 12) on a, aux facteurs u'_τ près

$$dx_s = \dot{n}_s\, r_s^0\, cdt + n_s\, \dot{r}_s^0\, d\sigma\,; \quad dy_s = \dot{\xi}_s\, \dot{q}_s^0\, cdt + \dot{\xi}_s\, q_s\, d\sigma\,.$$

Les ξ_s et n_s sont les „potentiels générateurs", les $g_{ff'}$, et φ_f, (f, $f' = 0, 1$) les „potentiels totals".

3⁰. *Séries.*

α) Donnée une certaine forme quadratique différentielle, dévelop-

pons g_{00} suivant les puissances de r^0 en région extérieure ($r^0 > 1$, $r > d$) en supposant

(66) $$g_{00} = (\tau_0 + \tau_1\, 1/r^0 + \tau_2\, 1/r^{02} + H_3 + \tau^1\, r^0 + \tau^2\, r^{02}).$$

$H_3 = H_3(r^0)$ contient les puissances du $1/r^0$ supérieures à 2, les coefficients $\tau^{\varepsilon'}, \tau_\varepsilon$ étant fonctions de q^0 (temps) ($\varepsilon = 0, 1, 2\ldots$; $\varepsilon' = 1, 2$). De même pour g_{11}, g_{10}. Posons

(67) $g_{00}\, c^2\, dt^2 = \left(\frac{1}{\lambda^2}\right) g_{00}\, c^2\, dt'^2$, $dt' = \lambda\, dt$ (étalon cosmique). On a

(66') $$\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) g_{00} = \tau_0 \frac{1}{\lambda^2} + 2\tau_1\, d_3/r + \tau_2\, e^2/r^2 + H_3/\lambda^2 + \\ + \tau^1\, r/d''_5 + \tau^2\, r^2/d''^2_3.$$

$e^2\, g_{00}$ resp. $e^2\, g_{00}/\lambda^2$ étant le carré de la vitesse de la lumière.

Si dans la région de q considérée (soit q grand) les τ sont de l'ordre de l'unité et $\tau_1 < 0$, $\tau_2 > 0$, il en résulte une première approximation du potentiel de Schwarzschild-Weyl $-2d_3/r + e^2/r^2$ avec la masse gravifique $r_3' = d_3 - e^2/2r$, avec les termes correctifs H_3; pour $\tau^2 < 0$ le potentiel de de Sitter r^2/d_3^{02}, ($d_3^0 = e^3\,|\,/2d_2\,|^2$) avec le terme correctif r/d_5''; donc symétrie en r et $1/r$, r^2 et $1/r^2$ (aux coefficients τ_ε, $\tau^{\varepsilon'}$ près).

β) D'une façon analogue supposons dévelopée φ_0, (pour une certaine forme linéaire) en région extérieure $r^0 > 1$, $r > d$) en supposant

(68) $$\varphi_0 = (\tau_0 + \tau_1\, 1/r^2 + \tau_2\, 1/r^{02} + H_3 + \tau^1\, r^0),$$

donc pour l'étalon cosmique

(68') $$\frac{1}{\lambda}\varphi^0 = \left(\frac{\tau'_0}{\lambda} + \tau'_1\, e/r + \tau_2\, e^3/(2d_2)^3\, r^2 + H_3/\lambda + \tau'^1\, r/d_3'\right).$$

φ^0 donne alors l'approximation du potentiel *maxwellien* (*coulombien*) $-e/r$ (avec certains termes correctifs H_3 à puissances supérieurs en $1/r$ ei le terme $\tau^1 r/d_3''$ correspondant à l'expansion de l'univers) donc symétrie en r et $1/r$ aux coefficients τ'_ε. τ'^1 prés)

$$(\varepsilon = 0, 1, 2, \ldots).$$

4°. g_{00} *comme forme quadratique*. Soit dans les formes quadratiques différentielles $U'\ W'\ D'\ B'$

$$\Sigma\,(\xi_i^2 - \xi_p^2)\, dq_i^{02} = \alpha_{ii} \qquad \Sigma\,(\xi_i \xi_{i'} - \xi_p \xi_{p'})\, dq_i^0\, dq_{i'}^0 = \alpha_{ii'}$$

$$\Sigma\,(r_i^{02} d\eta_i^2 - r_p^{02} d\eta_p^2) = \beta_{ii} \qquad \Sigma\,(r_i^0\, r_{i'}^0\, d\eta_i\, d\eta_{i'} - r_p^0\, r_{p'}^0 d\eta_p d\eta_{p'}) = \beta_{ii'}.$$

On a donc pour les formes

$$U'\ldots\ 2g^{00}\,c^2\,dt^2 = (2\alpha_{ii} - \alpha_{ii'} - 2\beta_{ii} + \beta_{ii'})$$

$$W'\ldots\ 2g_{00}\,c^2\,dt^2 = (3\alpha_{ii} - 3\beta_{ii'})$$

$$D'\ldots\ g_{00}\,c^2\,dt^2 = (\alpha_{ii} + 2\alpha_{ii'} - \beta_{ii} - 2\beta_{ii'})$$

$$B'\ldots\ g_{00}\,c^2\,dt^2 = (\alpha_{ii} - \alpha_{ii'} - \beta_{ii} + \beta_{ii'})\,.$$

Soient $g^{i}_{00}\,c^2\,dt^2$ et γ_{ii}, $\gamma_{ii'}$; δ_{ii} $\delta_{ii'}$, les fonctions obtenues en conservant en

$$g_{00}\,c^2 \text{ et } \alpha_{ii}, \alpha_{ii'} ; \beta_{ii}, \beta_{ii'}\,.$$

les termes aux indices impairs seuls.

2. Potentiels groupales.

1°. *Généralités.* α) *Potentiels groupals.* $r_t^0 \subset R_{24}$ et $q_t^0 \subset Q_{24}$ étant des éléments groupales, posont (conformément à IV 12'')

$$\xi_s = r_t^0,\ \eta_s = q_t^0 \text{ donc } d\xi_p = -d\xi_i = dr_t^0,\ d\eta_p = -d\eta_i = dq_t^0\,.$$

β) *Les valeurs du* g^{00}. Les valeurs principales, tertiaires et quarternaires des éléments $q^0{}_\tau$ sont singularités des différentielles dq_s et $d\eta_s$ (donc des dx_t et dx_s). Dans le voisinage d'une telle valeur, dominent pour $g_{00}\,c^2\,dt^2$ et $g^{i}_{00}\,c^2\,dt^2$, les termes α_{ii}, β_{ii} (respectif γ_{ii}, δ_{ii}) à termes quadratiques et $dq_t{}^2$ (respectivement $dq_i{}^{02}$). Comme cas particulier, pour grandes valeurs de q, les signes des coefficients τ et τ' des formules (IV 66', 68') sont déterminés par les signes des termes $dq^{02}{}_1 = q^{02}\,dt^2$. Les τ_ε, τ'_ε proviennent des termes β_{ii}, $\beta_{ii'}$ et δ_{ii}, $\delta_{ii'}$.

γ) Dans le voisinage d'une telle valeur „singulière" de q, les signes des τ, τ' sont les mêmes pour les formes U', D', B' ; de même pour $U'(a_i)$, $D'(a_i)$, $B'(a_i)$. Au contraire, W' et $W'(a_i)$ ne contiennent que les termes différentiels mixtes (en $dq^0{}_t\ dq^0{}_{t'}$).

2°. *Formes quadratiques.*

α) *Formes gravitationnelles.*

α_1) Les formes $U(a_i)$, $D(a_i)$, $B(a_i)$. Le terme principal du $c^2\ g^{i}_{00}\ dt^2$ pour $U(a_i)$, $D(a_i)$, $B(a_i)$ est

$$\xi^2{}_1\ dq^{02}{}_1 = \frac{1}{\lambda^2}\,r^{02}{}_7\ q^2\ c^2\ dt'^2 =$$

$$\left(\frac{\alpha^2}{\lambda^2} - 5\,\alpha\,.\,2d_3/r + 15\,e^2/4r^2 + H_3/\lambda^2\right) q^2\ c^2\ dt'^2 = \tag{69}$$

$$= c^2\,(1/\lambda^2 - 5\,.\,2r_3'''/r' + H_3/\lambda^2)\ q'^2\ dt'^2\,;$$

$$(\alpha r = r',\ \alpha q = q',\ 2\alpha = \sqrt{3} + 1,\ \lambda dt = dt')$$

donc en première approximation le potentiel de Schwarzschild-Weyl. Comme masse gravifique on a ici (au facteur 5 près)

$$r_3''' = d_3 - \frac{3}{4} e^2/2r' = d_3 - (3/4)\, ma/r', \tag{69'}$$

l'énergie potentielle électromagnétique pour $r' = a$ étant precisément la valeur de Lorentz 3/4 m.

Le temps est mesuré par $dt' = \lambda dt$, la vitesse de la lumière correspondante au terme principal pour $r \to \infty$ est $c' = c/\lambda$ tel que $c'dt' = cdt$. On a le terme correctif H_3/λ^2.

On a pour le terme en r_1^2 dans g_{00} des formes $U(a_i)$, $D(a_i)$, $B(a_i)$ l'expression

$$\begin{aligned} -r^{02}_1\, dq^{02}_7 &= -\frac{9}{4}\frac{r^{0'2}}{\lambda^2} c^2\, dt'^2\, q'^2/(q' + 1/2)^4 = \\ &= -\frac{9}{4} c^2 \frac{r'^2}{d''^2_3} q'^2\, dt'^2/(q' + 1/2)^4 = -\frac{r'^2}{d''^2_3(q)} c^2 dt'^2. \end{aligned} \tag{70}$$

Comme constante astronomique apparaît une fonction de temps q, à savoir

$$d_3''(q) = \frac{2}{3} d_3''\, (q' + 1/2)^2/q'.$$

Donc

$$\begin{aligned} &\lim_{q \to \infty} d_3''(q) = \lim_{q \to 0} d_3''(q) = \infty, \lim_{q' \to 1} d_3''(q) = \\ &= \lim_{q \to 1/\alpha} d_3''(q) = \frac{3}{2} d_3''\,;\ d_3'' = e^3/(2\, d_2)^2 \end{aligned} \tag{70'}$$

(voir IV 53'') (contraction et expansion successives).

α_2) les formes totales U, D, B. Pour q grand, le terme principal de $g_{00}\, c^2\, dt^2$ est dans ces formes

$$\begin{aligned} (\xi_1^2 - \xi_6^2)\, dq^{02} &= (2r_7 - 1)\, q^2\, c^2\, dt^2 = c^2\, (\sqrt{3}/\lambda^2 - \\ &- 3.2d_3/r + 3\beta e^2/r^2 + H'_3/\lambda^2)\, q^2\, dt'^2 = \\ &= c^2\, (\sqrt{3}/\lambda^2 - 3.2r''''_3/r + H'_3/\lambda^2)\, q^2\, dt'^2 \end{aligned} \tag{71}$$

donc encore en première approximation le potentiel de Weyl-Schwarzschild. Comme masse gravifique (au facteur 3 près) vient d'apparaitre,

$$r''''_3 = d_3 - e^2/r' = d_3 - (1/2)\, \beta e^2/r. \tag{71'}$$

Le temps est mesuré par

$$dt'' = \frac{\sqrt[4]{3}}{\lambda}\, dt',$$

la vitesse de la lumière pour $r \to \infty$ est

$$c'' = c\sqrt[4]{3}/\lambda$$

telle que

$$c''\, dt' = c dt''.$$

Le terme en r_1 dans $g_{00}\, c^2\, dt^2$ est

$$-(r_1{}^{02} - r_6{}^{02})\, dq_7{}^{02} = -(1 - 2r^0{}_1)\, dq^{02}{}_7 =$$

$$(72) \qquad = -c^2\,(1/\lambda - 2r/d''_5).\frac{9}{4}\, q^2\, dt'^2/(q+\beta)^4\,;$$

comme rayon de la supergalaxie apparaît

$$a'^0\,(q) = d''_5 \cdot 4/9\,(q+\beta)^4/q^2.$$

On a $\lim\limits_{q \to \infty} a''^0(q) = \lim\limits_{q \to 0} a'^0(q) = \infty$; $\lim\limits_{q \to \frac{1}{\alpha}} a'^0(q) =$

$$(72') \qquad = \frac{1}{\alpha^4}\, d''_5\,; \quad d''_5 = e^4/(2\,d_2)^3 \text{ (voir IV 53')}.$$

3°. *Formes linéaires.*

α) *Les formes linéaires électromagnétiques* (à indices paires).

α_1) En posant

$$h^0{}_6 = c\varphi^6{}_0\, dt + \varphi^6{}_1\, d\sigma, \text{ on a}$$

$$(73) \quad \begin{cases} c\varphi^6{}_0\, dt = (3/2)\, cdt'\ [r^0{}_6/\lambda\,(q^0+\beta)^2 + r^0{}_2/\lambda\,(q\alpha - 1)^2 + \\ + r^0{}_4/\lambda\ (\beta q - \alpha)^2] = -(3/2)\, cdt'\ [(1/\lambda - r/d''_3)/(q^0+\beta)^2 + \\ \qquad + e/r\,(q\alpha - 1)^2 + (1/\lambda + e/r + \ldots)/(\beta q - \alpha)^2]. \end{cases}$$

Pour les grandes valeurs de q, domine le terme

$$(73') \qquad r^0{}_4/\lambda\ (\alpha q - \beta)^2 = (1/\lambda + e/r + -)/(\beta q - \alpha)^2,$$

multiplié par $-(3/2)\, cdt'$,

donc en première approximation, le potentiel coulombien $\sim e/r$.

α_2) Dans $h^0{}_{12}$ on a le terme en dt

$$(74) \quad c\varphi_0{}^{12}\, dt = -cdt'\ [r^0{}_7\, q^0/\lambda + 1/q^0\,\lambda\, r^0{}_9 + r^0{}_{11}/\lambda\,(1 - q^0)^2].$$

Pour les grandes valeurs de q, domine le terme

(74') $r^0{}_7\ q^0/\lambda = \alpha/\lambda - 3e/2r + 3d_1\ e/2r^2 \ldots = \alpha/\lambda - (3/2)r'''_4/r + \ldots$

multiplié par $- cdt'$.

Comme charge électromagnétique apparaît ici, au facteur 3/2 près,

(74'') $$r'''_4 = e\ (1 - \beta d_1/r) = e\ [1 - (1/2)\ d_1/r'_1]$$

analoguement à la masse gravifique de Weyl

$$r'_3 = m\ (1 - d_1/r_1);$$

on a en première approximation, $r^0{}_7\ q^0/\lambda \doteq \alpha/\lambda - 3e/2r + \ldots$

α_3) Dans les formes $c\varphi^6{}_0\ dt$ et $c\varphi^{12}{}_0\ dt$ on a le terme en r,

(75) $$- r^0/\lambda\ (q^0 + \beta) = - r/d''_3\ (q^0 + \beta)^2.$$

Comme constante astronomique apparaît $d''_3\,(q) = d''_3\,(q^0 + \beta)^2$, dont on a les limites

(76) $$\lim_{q \to \infty} d''_3(q) = \infty, \lim_{q \to 0} d''_3\,(q) = \beta^2\, d''_3, \lim_{q \to 0} d''_3\ (q) = q\,\beta^2\, d''_3.$$

α_4) Dans les formes

$$k_6 = \Sigma\, dx_i - \Sigma\, dx_p = \Sigma\,(dr_i + dr_j),\ k_{12} = \Sigma\,(dq_i + dq_j)$$

les coefficients différentiels du dt et d_6 sont fonctions de q (respectivement r) seul. De même pour les formes

$$l_{6,12} = \Sigma\,(dr_i \pm dr_j + dq_i \pm dq_j).$$

β) *Formes gravifiques et électromagnétiques.* En tout cas, on obtient en physique d'action, par symétrie, à côté des formes *quadratiques, gravifiques* et des formes *linéaires électromagnétiques* correspondantes aux théories classiques, des formes *quadratiques „électromagnétiques"* et des formes *linéaires „gravifiques"*—par rapport à la *parité de l'indice.* Mais par rapport aux *développements en séries* suivant les puissances de r^0, il en résultent pour *toutes* les formes linéaires (h, k, l) à indices pairs ou impairs, des potentiels électromagnétiques (c'est à dire en première approximation—e/r); de même on obtient pour *toutes* les formes quadratiques (à indices quelconques, pairs ou impairs) des potentiels gravifiques (c'est à dire en première approximation—$2/mr$). Ces faits tiennent à la division des termes quadratiques par λ^2 d'une part, à la division des termes linéaires par λ d'autre part.

V. Les conséquences de la physique d'action.

A. *La méthode dialectique en physique d'action.*

a) *Le principe de l'interdépendance.*

1. *Le principe comme tel.*

La physique d'action signifie la vérification totale du principe de l'interdépendance :

1°. L'interdépendance des couples temps-espace, électromagnétisme gravitation, matière (= énergie + charge) - métrique et leur relativisation (interdépendance par rapport à l'observateur).

2°. L'interdépendance des constantes atomiques et cosmologiques ; interdépendance du nombre des particules élémentaires et des constantes.

3°. L'interdépendance des corpuscules, unité de l'interdépendance cinématique (relativiste), électrogravifique, dynamique (Heisenberg). A chaque échelle β, l'interdépendance est unité des contraires „complémentaires" relatives, individualité et collectivité ; l'individualité des corpuscules correspond aux variables géométriques, la collectivité aux variables physiques.

2. *Relatif et absolu.*

La relativisation par rapport à l'observateur des grandeurs physiques et géométriques, due à leur interdépendance, comme termes de la même forme ds^2, basée sur le groupe G_{12} de la physique d'action, n'est pas une relativisation absolue, mais relativisation à son tour relative, limitée. Elle s'interpénètre avec l'invariance de la forme quadratique ds^2 (et donc de l'hypervolume) et plus généralement de toutes les lois de la nature.

1°. L'invariance par rapport aux transformations des coordonnées.

α) D'une façon générale, toute transformation devient une transformation linéaire des différentielles des coordonnées de tous les 3 couples de la physique d'action. Comme en théorie de Veblen, les formes linéaires sont encadrées en formes quadratiques ; mais la forme quadratique ds^2 est hypercomplexe.

β) Particulièrement, l'invariance des lois de la nature par rapport à la permutation des coordonnées r_τ resp. q_τ (du groupe R_{24} resp. S_{24}), pour le couple temps-espace comme aussi pour les couples électromagnétisme-gravitation et matière-métrique. La symétrie fondamentale d'un groupe fini domine la physique d'action en réalisant l'unité des contraires, unité et pluralité, absolu et relatif, quantité et qualité. Particulièrement, les lois de l'intérieur et de l'extérieur du corpuscule s'uni-

fient par le changement des variables métriques et matérielles ; ici encore l'unité des contraires.

2⁰. L'invariance par rapport aux transformations de l'étalon.

α) D'une façon générale, l'invariance est valable pour toute transformation de l'étalon géométrique comme aussi pour le changement de l'étalon (variables) physiques en étalon (variables) géométriques.

β) Particulièrement, les coordonnées groupales r_τ et q_τ sont invariantes par rapport à l'étalon.

b) *Le principe de la transformation.*

1. Le principe comme tel. Le principe dynamique s'impose à la physique de l'action par :

1⁰. L'unification des quantités physiques et géométriques en même groupe, dans la même forme fondamentale ds^2. Il en résulte l'inexistence de toute géométrie euclidienne ou pseudo-euclidienne (liée à l'univers vide de matière), son remplacement définitif par la géométrie infinitésimale de l'univers courbe, variable.

2⁰. La dépendance des grandeurs physiques et géométriques par rapport ou mouvement de l'observateur en espace hypercomplexe. L'interdépendace est donc de nature dynamique.

3⁰. L'interprétation des constantes physiques comme variables. A savoir :

α) Sur l'échelle $\beta = 0$, on a les variables „potentiels générateurs", donc expansion on contraction de l'univers en temps et espace, électromagnétisme et gravitation, matière et métrique.

β) Sur l'échelle $\beta = 1$, on a les variables r_s^0, q_s^0, les constantes d_s, b_s, deviennent alors des valeurs principales des coordonnées variables r_s^0, q_s^0.

γ) Sur l'échelle $\beta = 2$, on a les variables λ, μ ; donc interprétation des constantes physiques d_s, b_s, (et d_s'', b_s'') (et donc des grandeurs d'étalon) comme variables. Il en résulte l'unification des variables „coordonnées" et „étalon" ; particulièremet comme valeurs quantiques de certaines variables.

2. *Absolu et relatif.* La relativisation dynamique est liée à l'existence des constantes absolues (e, l; δ, c, k_0.) ; l'étalon même est lié à la quantification (voir Riemann cité à la pag. 656). Donc encore interpénétration des contraires relatif (variation) et absolu (invariance).

c. *Le principe de la transformation des changements quantitatifs en changements qualitatifs.*

1. *La synthèse qualitative des éléments en systèmes supérieurs.* La transformation de la quantité en qualité parcourt en physique d'action trois étapes :

1⁰. L'étape du groupe algébrique abstrait G_{12}. Dans cette étape se situent les relations de la multiplication des éléments du groupe.

α) Le couple métrique-matière ($I_1 \subset I_3$, $I'_1 \subset I_3$) se décompose en triple I_3 : $g_{1,3,5}$ (métrique, énergie, charge). Les éléments matériels sont d'ordre 3.

β) Le couple gravitation-électromagnétisme correspond à $L_2^{\mathfrak{p}}$ (g_1 = gravifique, $g_{\mathfrak{p}}$ = électromagnétique), donc à $I_3 \subset I_6$ et $I'_3 \subset I_6$. Les éléments électromagnétiques $g_{\mathfrak{p}}$ sont d'ordre 2 noncommutatifs.

γ) Le couple temps-espace correspond à I_2 (g_1 = espace, g_7 = temps) donc à $I_6 \subset I_{12}$ et $I'_6 \subset I_{12}$. Les éléments temporelles sont d'ordre 2 (en réalité, quand aux signes, d'ordre 4).

Les différences des atributs de groupe des éléments se transforment qualitativement en oppositions = algébriques concrètes, géométriques et physiques entre espace-temps, gravitation-électromagnétisme, métrique-matière.

2⁰. L'étape des *groupes algébriques concrètes hypercomplexes* (finis ou continus) E_{12}, C_{12}, S_{12} (groupe bisextique, système bisextique espace bisextique). Ici se présente une nouvelle relation : l'addition algébrique.

α) La décomposition en sous-groupes invariants et factoriels du G_{12} devient : décomposition du C_{12} en trois systèmes irréductibles ; en S_{12} : décomposition en sous-espaces factoriels symétriques (géométriques) et sous-espaces complémentaires non symétriques (physiques), donc suite en pluralité hypercomplexe.

A chaque couple des contraires (III 2) correspond une „réductibilité totale", „cosmique" de C_{12} et S_{12} (réductibilité en sens restreint du groupe multiplicatif fini). Mais cette réductibilité est réelle pour les couples 1, 2 et complexe-ordinaire pour le couple 3. Au contraire, à la décomposition de la matière en énergie et charge ne correspond aucune réductibilité totale du S_8. Il n'est guerre possible qu'une „décomposition propre" par rapport à $i_{3,5}$ du S_8 et une réducttion totale „cosmique", complexe-ordinaire, du sous-espace gravifique du S_8.

β) En particulier, se présentent les signes des e, o, $\bar{o}$, d'où des nouvelles oppositions = qualitatives entre éléments physiques et géométriques : l'opposition des signes des unités temporelles e_t, électromagnétiques $e_{\mathfrak{p}}$ et matérielles j_t, j_ψ ($t \neq 1$) (et j) devient opposition passé-futur (temps) „électricité" positive-négative, énergie positive-négative.

L'existence des unités négatives (conjuguées) des espaces complémentaires d'ordre β revient à l'existence des unités primitives (physiques) pour chaque système c_m ou c'_m correspondant. De même l'apparition des unités imaginaires (j_3, e_7) et les matrices anticommutatives correspondantes est liée aux grandeurs physiques opposées aux grandeurs géométriques „réelles" (j_1, e_1) du sous-système respectif.

3⁰. *L'étape des groupes géométriques-physiques concrets* des transformations projectives Z_{24} [R_6 (resp. R_{24}) Q_6 (resp. Q_{24})]. A cette étape apparaissent la variabilité et la dépendance fonctionnelle.

α) L'opposition algébrique abstraite transformée en opposition concrète (hypercomplexe) devient ici différence qualitative fonctionnelle, géométrique des coordonnées r_τ et q_τ, qui devient à son tour opposition physique.

La correspondance des suites des systèmes (espaces) hypercomplexes et des suites des variables cosmiques en signifie transformation des relations-reductions des unités (ou coefficients) hypercomplexes en relations fonctionnelles des variables cosmiques on leurs logarithmes.

β) La dépendance fonctionnelle détermine :

β_1) le nombre des dimensions indépendantes ;

β_2) les singularités (pôles = infinis), les constantes physiques et les zéros (les points où s'annullent les fonctions r_τ et s_τ) ;

β_3) la quantification comme transformation de la quantité en qualité.

2. *La transformation par sauts.* La physique classique est la physique du continu. La théorie de la relativité exclue encore la discontinuité ; en théorie de Weyl l'intérieur de l'électron se soustrait aux lois relativistes ; la matière apparaît comme une singularité (discontinuité absolue) au delà du champ.

Du point de vue géométrique (physique), la physique de l'action introduit dès le debut une triple discontinuité, pour les variables spatielles comme pour temporelles, pour les variables gravifiques comme pour les variables électromagnétiques : le discontinu (l'infini) métrique, le discontinu (infini) de la charge, le discontinu (infini) énergétique. Du point de vue algébrique les discontinuités prennent encore un aspect triple : zéros, infinis (pôles), unités.

1⁰. Les zéros. Le zéro (point de l'annulation) d'une fonction groupale r^0_τ ou q^0_τ est l'infini (pôle) de la fonction complémentaire, donc unité de continu et discontinu. Le discontinu métrique, discontinu de la charge et le discontinu énergétique déterminent respectivement l'expansion de l'univers, la repulsion ou l'attraction électroma-

gnétique, la gravitation. L'existence quantitative (métrique, geométrique) de zéro (l'infini) se transforme en action qualitative, (dynamique, physique).

2⁰. Les infinis. Les „rayons" ds, bs (et $d''s$, $b''s$) sont des frontières relatives du corpuscule pour chaque couple géométrique-physique. Au point de vue mathématique, l'infini est lié à la transformation des changements quantitatifs en changements qualitatifs. Au point de vue physique, la réalité matérielle est unité du fini (individualité, pluralité, discontinu) et de l'infini (collectivité, unité, continu) pour chaque corpuscule, système, univers.

3⁰. Les unites. La physique d'action est unité du continu et du discontinu (quantification triple de l'espace S_{12}, en particulier quantification métrique et matérielle).

En synthèse: 1⁰. les constantes physiques comme „unités", les pôles (infinis) et les zéros sont des valeurs principales des coordonnées. 2⁰. Unité géométrique (fonctionnelle) du triple discontinu qui se permutent suivant les lois des fonctions de base; unité algébrique (groupale) du triple discontinu. 3⁰. La réalité est continue et discontinue (zéro et pôle, finie et infinie, continue et quantifiée): unité totale du continu et du discontinu.

Par son existence même, l'infini détermine la force gravitationnelle, la répulsion du champs électrique, l'expansion de l'univers. L'existence mathématique, géométrique de l'infini se transforme dans une action qualitative, dynamique.

d. *Le principe de l'unité des contraires.*

1. *L'interpénétration des contraires.*

1⁰. La physique d'action signifie une unité plus avancée, une interpénétration dialectique des couples des contraires – unité vers laquelle tend l'évolution de la physique: α) „matière" (énergie+charge)–métrique; β) électromagnétisme – gravitation; γ) temps – espace. La théorie générale de la relativité vient réaliser l'unité dialectique „espace-temps". La théorie générale de la relativité vient réaliser une unité géométrique des coefficients métriques et matériels (l'unité des coefficients g_{ik} et du potentiel gravifique) et donc une certaine synthèse métrique-matière. Mais cette synthèse (interdépendance) n'est pas encore une unité véritable entre la métrique ds^2 et l'énergie T_{ik} elles mêmes (voir première section). De même les théories unitaires classiques constituent une unification des potentiels gravifiques g_{ik} et potentiels électromagnétiques φ_i, mais pas encore l'unité entre l'énergie T_{ik} et la charge s_i (voir première section). La physique d'action signifie l'unification de la

matière et de la métrique d'une part et l'unification de la gravitation et de l'électromagnétisme d'autre part ; ensuite une unité plus complète de l'espace et du temps.

2⁰. Leur unité dialectique ne signifie pas l'inexistence des trois couples des contraires, mais l'unité de ces contraires qui les dépasse ; elle va créer le cadre de leur développement (mouvement) : la décomposition du monde en 12 dimensions en temps-espace, matière-métrique, électromagnétisme-gravitation.

La décomposition est l'expression physique de la décomposition du groupe G_{12} en produit de sous-groupes resp. en somme des classes secondaires, ou encore expression de la reductibilité du système (espace) bisextique en trois systèmes (espaces) partiels irréductibles.

b. *La transformation par contradictions* se trouve réalisée pour chaque étape.

1⁰. Le groupe G_{12}, admettant des sous-groupes cycliques (I 17') d'ordre $B = 1, 2, 3$ respectivement le développement successif des puissances d'un élément primitif d'un groupe donné de (I 17') signifie le développement de la contradiction géométrique-physique (a, b), du couple correspondant d'ordre β (voir III 2). La contradiction *interne* géométrique-physique contenue en germe dans l'élément primitif donné devient contradiction *externe* des puissances successives de l'élément primitif ; le groupe cyclique considéré comme totalité, est l'unité des contraires développés.

2⁰. *Les groupes concrets* E_{12}, C_{12}, S_{12}. Pour l'étape hypercomplexe les quantités correspondantes à l'antithèse (b) (réalité physique) présentent une nouvelle contradiction interne (basée sur les signes) : α) pour le temps, la contradiction entre le passé et le futur (irréversibilité du temps), β) pour l'électromagnétisme, la contradiction entre l'électricité positive et négative ; γ) pour la matière (énergie) la différence entre l'énergie positive et négative.

La théorie de Weyl avait soupçonnée une liaison entre l'irréversibilité du temps et l'existence de deux électricités contraires (Weyl, 11 éd. IV). Dirac, en théorie du positron (théorie des lacunes) établit une liaison hypothétique entre l'électicité positive et négative d'une part et entre l'énergie positive et négative d'autre part (v. Kahane, 24). En physique d'action :

α) La contradiction passé-futur du temps est contradiction interne.

β) La contradiction positive-négative est interne-externe, c'est à dire interne pour le neutron externe, pour l'électron ou proton, externe-

interne pour l'atome considéré comme unité des électrons négatifs et protons positifs (on neutrons).

γ) La contradiction énergie positive-négative est totalement extérieure (fait, lié à l'existence quasi fictive de l'énergie négative en théorie de D i r a c-problème dont la solution complète reste une tâche future).

Pour β croissant, la contradiction des signes contenue en antithèse (la réalité physique *b* de III 2) devient donc d'une contradiction extérieure, une contradiction interne et inversement.

3⁰. Le groupe Z_{24}. La permutation des coordonnées groupales (R_{24} resp. Q_{24}) et l'invariance correspondante des lois de la nature, implique l'interpénétration des contraires. Une coordonnée quelconque donnée prend des expressions fonctionnelles diverses et se permute avec les autres coordonnées par le choix de la variable (base). Cela signifie l'invariance arithmétique de chaque coordonnée et sa variation fonctionnelle par permutation des bases.

B. L'interprétation matérialiste de la physique d'action.

a. géométrie et physique en physique d'action. L'unification croissante matérialiste - dialectique des contraires du chaque couple a lieu en physique relativiste et quantique par deux chemins : α) synthèse en forme métrique fondamentale ds^3 et donc encore en hypervolume infinitésimal), β) synthèse en grandeur d'action. Ces deux voies s'unifient en physique d'action ; d'autre part, la synthèse devient une véritable unité.

1. *La forme quadratique ds^2 du S_{12}.*

1⁰. *L'unité des contraires géométrie-physique.*

α) *L'unité comme telle.* Nous avons désigné les éléments (*a*) de la suite (III 2), comme „réalités géométriques", les éléments (*b*) de la suite (III 2) comme „réalités physiques". Réalité géométrique et physique en constituent sur chaque des trois étapes (β) de la décomposition du monde physique, des pôles opposés (thèse et antithèse) d'un couple. La conception classique vient considérer la réalité géométrique, comme cadre abstrait, à priori, des phénomènes physiques. En réalité notre espace géométrique n'est pas de nature abstraite à priori, mais lié aux phénomènes physiques concrets en faisant partie de la réalité physique. D'une manière inverse, la réalité physique est représentable par certaines unités hypercomplexes et les dimensions (grandeurs) correspondantes en S_{12} ; en ce sens la réalité géométrique est physique et inversement. En termes de la physique quantique la réalité extensive (= cinématique = géométrique) et extensive (= dynamique = physique) et inversement. En langage mathématique

relativiste : les intensités (= tenseurs = grandeurs géométriques) sont représentables par quantités (= densités tensorielles = grandeurs physiques) et inversement.

β) *Unité extérieure et intérieure.* La contradiction entre géométrie et physique n'a pas donc plus le sens classique d'une opposition irréductible antagoniste, métaphysique, idéaliste ou mécanique, d'un cadre et d'un contenu indépendants. La contradiction subsiste d'une manière nouvelle, mais dépassée dans une unité supérieure, matérialiste-dialectique. Cette nouvelle définition de l'opposition et unité des couples géométriques-physiques, donné en physique d'action est lié à la *théorie des groupes finis*, precisément à la théorie des sous-groupes *invariants* et sous-groupes *factoriels* de G_{12} d'une part, à la décomposition de G_{12} en facteurs d'autre part.

β_1) *Unité extérieure.* A chaque sous-groupe invariant I_δ d'ordre β correspond une réalité géométripue, à chaque sous-complexe I'_δ une réalité physique de même ordre. L'unité du I_{δ_2} et I'_{δ_2} d'ordre β_2 en sous-groupe invariant supérieur I_{δ_1} est unité géométrique-physique d'ordre β_1 ; par rapport à chaque sous-groupe invariant supérieur I_δ, I_{δ_1} devient à son tour réalité géométrique, point de depart (thèse) d'une nouvelle triade : I_{δ_1} s'oppose on sous-complexe (antithèse) physique I'_{δ_1} d'ordre β_1 tel que $I_\delta = I_{\delta_1} + I'_{\delta_1}$ sera une nouvelle unité supérieure ; synthèse d'ordre β. De même pour les sous-systèmes C_δ, C'_δ et les sous espaces S_δ, S'_δ.

β_2) *Unité intérieure.* Chaque sous-espace factoriel S_n d'ordre β du S_{12} représente une réalité géométrique ; chaque base de S_n est unité intérieure du couple géométrie-physique de l'ordre inférieur β_1, unité plus profonde en comparaison à „l'unité extérieure" réalisée per I_δ. Le sous-espace complémentaire S_φ d'ordre β correspond à la réalité physique de rang β respectif. Pour β croissant, la décomposition successive de S_{12} en espaces factoriels représente donc une transformation croissante (développement, Entfaltung) de la contradiction géométrie-physique extérieure, en contradiction intérieure. D'une manière inverse, pour β décroissant.

La correspondance entre unités (coefficients) bisextiques (espaces factoriels et complémentaires) et variables cosmiques („espaces" des variables, les constantes incluses) va déterminer aussi pour celles-ci une transformation croissante de la contradiction externe (contradiction entre variables propres x_τ) en contradiction interne (contradiction des facteurs = variables cosmiques x'_τ de chaque variable propre).

2⁰. *Développement de la contradiction.*

α) *Le développement générale.* Des 3 suites des sous-groupes invariants ($I_{16,16',16''}$), la décomposition (I_{16}) en sous-groupes invariants *symétriques* et *alternes* est fondamentale. De I_1 à G_{12} (β croissant) l'unification des contraires géométrie-physique va croissant, jusqu'à l'unité totale en G_{12} (la réalité physique = géométrique totale). Inversement pour β décroissant : de G_{12} à I_1, la contradiction géométrie-physique contenue en germe en G_2 se développe d'une manière croissante. A savoir, au point de vue expérimental :

α_1) La contradiction du temps et de l'espace apparaît comme contradiction entre terme dynamique (irréversible) et statique (réversible). En relativité générale même, la contradiction est dépassée par la possibilité de la courbure de temps.

α_2) La contradiction de l'électromagnétisme et de la gravitation apparaît comme contradiction entre force „réelle" et la force „apparente". En relativité générale même, la contradiction est dépassée à l'échelle intégrale ; la densité de l'énergie gravitationnelle t_i^k a alors une signification physique précise et l'intégration donne des lois de la conservation invariantes de l'énergie et de la change.

α_3) La contradiction de la matière et de la métrique [= en réalité triple contradiction (énergie-métrique-charge)] apparaît comme contradiction entre conservation des densités énergétiques t_i^k et des densités électriques s_i), et la nonconservation des grandeurs métriques ; en physique quantique, contradiction entre vitesse („grandeur dynamique") et localisation („grandeur cinématique").

La contradiction tend d'être dépassé : en relativité générale par la valabilité des „lois de la conservation" valables pour les densités tensorielles géométriques $G_i^k = -T_i^k$, en théorie unitaire par une loi de la „conservation de l'espace" (vecteur de divergence nulle). En physique d'action, par l'unification de la quantification matérielle et métrique d'une part, par la représentation de l'espace-temps comme flux de champ (ça d'une façon analogue à la masse et charge) d'autre part. La solution du problème reste une tâche future.

D'un couple à l'autre, (β décroissant), la contradiction des 2 termes „physique" et „géométrie" s'approfondit : il en résulte le développement (Entfaltung) du caractère physique d'une part, du caractère géométrique d'autre part.

Ce développement de la contradiction fondamentale géométrie-physique s'enchaîne avec le développement de la contradiction des signes de l'antithèse (voir : transformation par contradictions).

β) *L'interpénétration des couples*, La physique d'action est :

β_1) Interpénétration, l'unité (homogénéisation) en espace polidimensionnel, de chaque couple de contraires d'ordre β, considéré à part.

β_2) L'interpénétration des 3 couples de contraires et leur unité (homogénéisation dans l'espace polidimensionnel total S_{12}). La physique d'action signifie donc :

γ_1) la matérialisation (physicalisation) de la thèse (a) (géométrie) et métrisation (géométrisation) de l'antithèse (b) (physique) pour chaque couple.

γ_2) Pour β croissant la géométrisation de la contradiction de chaque couple, par l'interpénétration avec les couples postérieurs ; matérialisation de la contradiction de chaque couple, par l'interpénétration avec les couples antérieurs. Ainsi, la contradiction entre matière et métrique (couple 1) se géométrise et trouve son expression dans l'univers espace-temps (voir l'expression quadruple spatio-temporelle du principe d'Heisenberg) ; aussi l'opposition de l'énergie et de l'impulsion, devient opposition des composantes temporelles et spatielles de l'énergie cinétique totale. Inversement, la contradiction du temps et de l'espace (couple 3) (irréversibilité du temps et réversibilité de l'espace) reçoit une base réelle par l'existence d'une vitesse maximum [donc par l'existence de la matière (masse) appartenant au couple 1 et sa croissance avec la vitesse].

2. *Le volume infinitésimal et l'action.*

1⁰. *La physique relativiste.* La physique relativiste et unitaire demontre :

α) L'invariance de l'hypervolume quadridimensionnel $d\sigma$ (ou réduit à deux dimensions $d\sigma = cdt\,dx$). Elle est la conséquence des transformations qui conservent la forme quadratique ds^2, donc conséquence de l'unité temps-espace.

β) La synthèse de la métrique (g_{ik} resp. φ_i) et de la matière (T_i^k resp. s^i) (comme aussi la synthèse de la gravitation et de l'électromagnétisme et la synthèse de l'espace et du temps) en grandeur d'action (à savoir unité dans la densité L de l'action). Cette synthèse est purement algébrique (formelle). Elle n'est pas encore unité véritable ; donc foncièrement différente de l'unité du temps et de l'espace réalisée en monde absolu à 4 dimensions.

2⁰. *La physique quantique.* En physique quantique, l'énergie et le temps (et d'une manière analogue l'impulsion et la longueur) se joignent

dans quantum h d'action : à l'échelle atomique par la quantification des orbites de l'électron autour du noyau ; à l'échelle des corpuscules élémentaires, par le principe d'Heisenberg et par la quantification de la métrique et de l'énergie-impulsion comme du magnétisme.

3°. *La physique d'action.*

α) *L'action comme hypervolume en* S_{12}. La matière se géométrise sur base hypercomplexe comme le temps relativiste en espace quadridimensionnel ; le produit de la longueur et de l'impulsion (ou du temps et de l'énergie) constitue un élément de surface (respectivement de hypervolume) dans l'espace hypercomplexe. Cet élément de surface est justement l'action homogénéisée. Inversement, l'action homogénéisée représente un hypervolume (dans l'espace hypercomplexe).

En conséquence, la synthèse entre métrique et matière, gravitation et électromagnétisme, espace et temps, en grandeur d'action, réalisée par la physique relativiste et quantique classique, devient, d'une synthèse purement formelle (algébrique), une synthèse géométrique et physique et d'une synthèse une unité véritable. A la fois avec la matière et la métrique, l'action se géométrise et se matérialise en quelque sorte.

β) *La quantification de l'action.* L'invariance de l'hypervolume quantifié spatio-temporel $cdtdx$ et le principe d'Heisenberg se correspondent en physique d'action ; la quantification du hypervolume (surface) de S_{12} donne le quantum d'action h (ou l^2).

Aussi la quantification de l'énergie et la quantification de la métrique trouvent leur unité dans le quantum d'action h qui apparaît, de plus en plus comme une réalité physique fondamentale qui se subordonne à la métrique (espace-temps) et la matière comme les autres 2 couples (III 2). En physique d'action, la quantification des longueurs (matérielles ou métriques) se subordonne donc à la quantification de l'hypervolume de l'univers polidimensionnel.

b. *Matérialisme dialectique, matérialisme mécanique et idéalisme en physique unitaire.*

1°. *Interprétation de* Weyl. En théorie générale de la relativité et en physique unitaire classique, l'interprétation de Weyl vient réaliser une synthèse incomplète, donc en quelque sorte encore dualiste et mécanique : la matière et la métrique seront des réalités irréductibles transcendentes, diamétralement opposées quoique interdépendantes (par moyen de g_{ik} et φ_i) ; les relations des champs gravifiques et électromagnétiques seront des équations véritables.

Il résulte chez Weyl une interprétation idéaliste (à priori) de la

nature, de l'espace et du temps et une interprétation matérialiste-mécanique de la matière qui deviendra réalité au delà de l'espace et du temps.

2⁰. *L'interprétation* d'Eddington est monisme absolu et idéalisme : la matière est la courbure métrique elle-même ; les relations du champ gravitationnel et électromagnétique seront des véritables identités. L'univers deviendra un univers purement géométrique, quadridimensionnel (réel-imaginaire).

3⁰. *La physique d'action.*

α) *Physique d'action et théories unitaires classiques.* La physique d'action n'est point tout simplement une unité géométrique des coefficients géométriques g_{ik} et φ_i d'une part et les potentiels gravifiques et électromagnétiques d'autre part. (unité réalisée par les théories relativites et unitaires classiques). Elle n'est point tout simplement interdépendance entre matière et champ (métrique, gravitationnel et électromagnétique), donc pas une simple synthèse entre métrique et matière, gravitation et électromagnétisme mais une théorie unitaire de la matière (T_i^k et s^i resp. r_i, φ_i et r_p, φ_p) et de la métrique, de l'électricité et de la gravitation elles mêmes en S_{12}.

β) *Géométrisation et matérialisation.*

β_1) En physique d'action, la matière se géométrise, mais les unités algébriques correspondantes ne sont ni réelles ni imaginaires, mais hypercomplexes d'ordre 2 ou 3 (resp. 4 ou 6). Aussi l'électricité se géométrise comme la gravitation, mais les unités algébriques correspondantes à l'électricité ne sont pas commutatives. La contradiction profonde entre matière et métrique, n'est pas ni apparence (à la manière d'Eddington) ni dualité irréductible (à la manière de Weyl), mais transformation qualitative de la contradiction profonde, entre hypercomplexe et complexe ordinaire (= réel + imaginaire). La contradiction entre gravitation et électromagnétisme est transformation qualitative de la contradiction entre commutatif et non commutatif. La contradiction entre espace et temps est la transformation qualitative de la contradiction entre réel et imaginaire.

β_2) Les relations du champ gravifique et électromagnétique sont des identités différentielles, mais ces identités résultent de deux fonctions non-identiques et algébriquement différentes, l'une réelle, l'autre affectée d'un coefficient hypercomplexe. D'une manière analogue, la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction monogène $z = f(x, y) + i\,g(x, y)$ vérifient les identités $f_x' = g_y$, $f_y' = -g_x'$.

γ) Caractère matérialiste de la physique d'action.

La géométrisation de l'antithèse de la physique (matière, électromagnétisme, temps) constitue l'aspect dialectique, mathématique ; la matérialisation de la thèse (a) (= de la géométrie métrique, gravitation, espace) constitue l'aspect matérialiste, physique de la tendance matérialiste-dialectique de la physique moderne et en particulier de la physique d'action. Comme instrument formel mathématique du calcul unifié, la géométrisation de la matière pourra paraître la tendance fondamentale. Comme instrument d'interprétation réelle, de la découverte des résultats physiques nouveaux et fondamentaux, c'est la *matérialisation* de la géométrie, au contraire, qui est la conclusion *essentielle*. La matière (correspondant aux quantités hypercomplexes) est l'élément fondamental, par rapport à la métrique, ainsi que l'électricité par rapport à la gravitation et que le temps par rapport à l'espace.

γ_1) Mathématiquement cette priorité résulte du fait qu'en chaque couple de contraires, la thèse (= la géométrie) peut être obtenue par les produits (ou puissances) des quantités appartenant à l'antithèse (= la physique) mais non pas inversement. Les grandeurs complexes ordinaires sont subordonnées aux grandeurs hypercomplexes C_{12} comme sous-algèbre groupale invariante.

γ_2) Du point de vue physique, la géométrie (et particulièrement la métrique) suppose la physique (et particulièrement la matière). L'univers métrique (spatio-temporel) „vide de matière" est une abstraction dont l'interprétation absolue mène à l'idéalisme, comme l'espace tridimensionnel réel par rapport au continu quadridimensionnel relativiste espace-temps aussi.

Le rattachement nécessaire des dimensions réelles et imaginaires aux dimensions hypercomplexes, résout l'antagonisme métaphysique entre „l'univers vide de matière" de de Sitter et le monde matériel, „plongé en temps et espace" considéré comme cadre d'avance, donnée par Weyl.

δ) Contre l'idéalisme. La matérialisation de la géométrie (= la géométrisation de la physique) réalisée en physique d'action, s'oppose à toute interprétation idéaliste. La physique et particulièrement la matière ne peut être interprétée d'une manière purement géométrique, en prenant le mot „géométrique" dans le sens *classique*. Autrement dit la matière ne peut être réduite aux dimensions réelles ou complexes ordinaires et fondée seulement sur une structure continue (comme jonction des éléments géométriques infinitésimales). Cette tentative conduira à un idéalisme masqué. A savoir :

δ_1) Du point de vue structurel, une telle réalité, purement géométrique, aura un degré de réalité plus réduit que l'entier (la matière). Si la synthèse des éléments dans un entier supérieur est une synthèse qualitative, créatrice — l'analyse, la décomposition de l'entier, poussée au delà d'une limite déterminée, est destructive. Elle conduira aux certaines abstractions mathématiques qui n'ont pas d'existence indépendante. Comme structure, l'entier (la matière) n'est point bâti sur les éléments différentielles continues, purement géométriques, mais sur les éléments discontinus (corpuscules et quanta) physiques, interpénétrés avec la continuité.

δ_2) Du point de vue algébrique, la matière suppose des grandeurs hypercomplexes, comme le temps suppose des grandeurs imaginaires, et l'électricité, des quantités hypercomplexes non-commutatifs. L'existence objective physique spécifique (et particulièrement la matière) est donnée par des éléments hypercomplexes. La priorité vis-à-vis des éléments purement géométriques (priorité qui est le fondement de toute théorie matérialiste) est fondée sur le caractère des éléments hypercomplexes ($e_{3,5}$; e_p ; e_t) comme éléments primitifs (générateurs) des sous-algèbres groupales du C_{12} et du C_{12} lui-même. L'homogénéisation métrique des composantes de la métrique et de la matière s'interpénètre avec son contraire, l'hétérogénéité des unités hypercomplexes ; leur unité est le vecteur hypercomplexe de S_{12}.

ε) *Contre le matérialisme mécanique.* D'autre part, la physique moderne et surtout la physique d'action, se dirige contre le mécanisme positiviste, contre „l'évidence" qui atteint son comble dans le matérialisme mécanique, dans un dualisme irréductible entre physique et géométrie (en particulier matière et métrique). La science est éternel dépassement dialectique des données immédiates ; son résultat n'est pas dualisme, mais unité matérialiste-dialectique des contraires en unité vive. Son tâche est précisément la définition mathématique (ici hypercomplexe-réelle) de l'unité des contraires physique-géométrie (ou matière-métrique) et non pas la simple constatation empirique de son existence. Le seul critère de la conception matérialiste est la reconnaissance de la réalité objective, au dehors de la conscience (Lénine). Si la réalité de l'électron est inépuisable-d'après Lénine-il est clair que le matérialisme dialectique doit prendre une nouvelle forme, avec chaque progrès de la science (Engels).

φ) *Les fondements matérialistes-dialectiques de la physique quantique.* Ces résultats sont situés sur le chemin de l'évolution fondamentale autant de la physique du champ continu (les théories relativistes
i aires) comme aussi de la physique du discontinu (la théorie

quantique et ondulatoire), sur la direction de l'unification matérialiste-dialectique du continu et du discontinu, de la métrique et de la matière.

L'évolution de cette théorie est située sur le chemin fondamentale futur de la physique théorique, comme montre de Broglie, le créateur de la mécanique ondulatoire, dans son livre. „Continu et discontinu en Physique moderne" (Paris 1943). „Il se trouve (et toute la Physique classique repose implicitemet sur cette constatation) que le cadre de l'espace-temps construit par notre esprit pour y loger les phénomènes et les objets à notre échelle se comporte comme s'il était indépendant des phénomènes et des objets qui viennent y trouver leur place. Le cadre de l'espace et du temps nous apparaissait donc finalement comme un cadre idéal indépendant de son contenu et cette indépendance avait fini par sembler si certaine et si naturelle,qu'on en était arrivé à considérer les notions d'espace et de temps comme des notions innées et à priori... A l'échelle très fine des phénomènes atomiques, où la valeur du quantum d'action cesse d'être négligeable, la localisation précise d'un objet dans l'espace et dans la durée ne paraît plus indépendante de ses propriétés dynamiques et en particulier de sa masse" (pag. 71).

„... Les incertitudes quantiques dérivant de l'existence même du quantum d'action, expriment en dernière analyse l'insuffisance de la conception d'un espace-temps indépendant des phénomènes dynamiques qui s'y déroulent" (pag. 74). „Il s'agit de savoir si la théorie physique, disposant un jour de connaissances qui nous manquent aujourd'hui, et peut-être aussi de concepts qui ne sont pas encore élaborés, pourra établir des règles permettant de prevoir rigoureusement les phénomènes sur l'échelle atomique. Il nous semble que l'intervention du quantum d'action dans les phénomènes de la Physique microscopique nous fournit quelques indications à ce sujet. La notion même du quantum d'action implique, en effet, une sorte de liaison entre le cadre de l'espace et du temps et les phénomènes dynamiques que nous cherchons à y localiser, liaison tout à fait insoupçonnée de l'ancienne Physique. Si donc une théorie future nous permettra de voir plus clair dans les questions quantiques, ce ne pourrait être sans doute qu'en modifiant profondément nos idées sur l'espace et sur le temps (y compris les conceptions relativistes sur l'espace-temps)" (pag. 66).

(Reçu le 26 Septembre 1948).

Séminaire Mathématique
de l'Université de Jassy

Bibliographie.

(Dans le texte, les travaux cités sont notés par B ou par le nom de l'auteur suivi d'un nombre).

I. Algèbre et géométrie (groupes, matrices, systèmes hypercomplexes; cubiques gauches).

1. B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra* 2 vol. (Berlin, Springer 1930).
2. Speiser, *Theorie der Gruppen endlicher Ordnung* (Berlin, Springer).
3. Zassenhaus, *Lehrbuch der Gruppentheori* .
4. J. H. M. Wedderburn, *Lectures on matrices* (New York, 1934).
5. Study, *Hyperkomplexe Grössen* (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften I).
6. Weyl, *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (Leipzig, Hirzel 1928).
7. B. L. van der Waerden, *Gruppentheoretische Methoden der Quantenmechanik* (Berlin, Springer 1932).
8. Moisil, *Curs de algebră (II. Algebră lineară)*, Jassy 1930.
9. Wood, *The Twisted cubic.*
10. Staude, *Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitte.*

II. Géométrie affine et métrique. Physique relativiste, quantique, mécanique et ondulatoire.

11. Weyl, *Raum, Zeit, Materie* (Berlin, Springer, éd. IV ; 1923, éd. V).
12. V. Pauli, *Relativitätstheorie* (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften V).
13. Einstein, *Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie* (Ann, Physik 49 ; 769-822).
14. Kaluza, *Zum Unitätsproblem der Physik* (S. B. preuss. Akad. Wiss. 9, 966-972).
15. Eddington, *Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung* (Berlin, Springer 1925).
16. Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie* (Physik 37 ; 895-906).
17. Einstein; Mayer, *Einheitliche Theorie von Gravitation und Elektrizität* (Deux mémoires ; S. B. preuss. Akad. Wiss. 10 ; 130-137).
18. Einstein, *Sur la structure cosmologique de l'espace* (Paris, Hermann 1933).
19. De Sitter, *On the curvature of space* (Ver. d. Akad. v. Wetensch. Amsterdam 1917).
20. Veblen, *Projektive Relativitätstheorie* (Berlin, Springer 1933).
21. Eddington, (Proceed. of the R. Soc. London, pag 605, vol. 123 A, 1931).
22. Eddington, (Monthly notices, vol. 92, pag. 3 ; 1931).
23. Mineur, *L'univers en expansion* (Paris, Hermann, 1933).
24. Kahane, *Radioactivité et transmutation* (Paris, Armand Collin, 1936).
25. De Broglie, *Le photon. Une nouvelle théorie de la lumière* (1943, Paris).
26. De Broglie, *Continu et discontinu en Physique moderne* (Paris, Albin Michel 1941).
27. Ambarzunian ; Iwanenko, *Zur Frage nach der Vermeidung der unendlichen Selbstrückwirkung des Elektrons* (Zeitschrift für Physik, vol. 64, pag. 563, 1930).
28. Iwanenko, *Die Beobachtbarkeit in der Diracschen Theorie*, (Zeitschrift für Physik, vol. 72, pag. 621, 1931).

29. Markoff, *Über die Ableitbarkeit der Weltmetrik aus der „Früher-als"-Beziehung* (Phys. Zeitschrift der Sowjet Union, III, 1932).
30. Vescan, *Simultaneitate și Ulterioritate* (Gazeta matematică, București).
31. Bachelard, *Le nouvel esprit scientifique.*
32. Bachelard, *La valeur inductive de la relativité.*
33. Mie, *Grundlagen einer Theorie der Materie.*
34. Vrânceanu, *Théorie unitaire nonholonome.*
35. Valeriu Novacu, *Gândirea leninistă și fizica modernă* (Annales soviéto-roumaines No. 8).
36. Léninе, *Matérialisme et empiriocriticisme.*
37. Riemann, *Über die Tatsachen welche der Geometrie zugrunge liegen* (Göttingen 1868).
38. Laberenne, *L'origine des mondes* (Paris. 1947).

NOTE SUR LE CALCUL DU FRETTAGE DES TUYAUX EN BETON

par

CYP. DEMARS

Résumé. — Après avoir rappelé, succintement, la méthode de calcul utilisée par le B. C. B., en la commentant, l'auteur en expose une autre basée sur la théorie des frettes.

L'hypothèse principale – frettage par anneaux de fil à section carrée—est maintenue, il en résulte que les tensions et pression calculées, même par la seconde méthode, ne correspondent pas, exactement, à celles qui se manifestent dans une réalisation utilisant du fil rond.

La mise en oeuvre, pour le frettage, de fil à section carrée — et ceci ne présente aucune difficulté qui ne puisse être vaincue — permettrait une connaissance plus certaine des sollicitations, la réalisation correspondant, alors, au cas envisagé par la théorie, et, partant, permettrait de pousser l'économie au maximum.

De la comparaison des résultats obtenus pour un même problème, il se déduit, en faveur de la seconde méthode, un bénéfice de 20 % sur le poids de fil-frette à poser sur la conduite envisagée ($d_i = 1$ m, $d_e = 1,2$ m ; $p_i = 25$ kg/cm^2).

Introduction.

Afin d'éviter les fissures qui peuvent apparaître à l'intrados d'une conduite en beton, dès la mise en service, et maintenir son étanchéité, on lui impose — à vide — des contraintes initiales de compression, tant annulaires que radiales, en la frettant.

Le frettage se fait au moyen d'un fil d'acier, à haute résistance enroulé, sous tension, sur le tuyau vide, cette tension étant telle que, annulairement, sous charge, la paroi interne de la conduite :

1) ne soit pas sollicitée,

ou 2) reste soumise à compression.

Le problème qui se pose est de rechercher :

I. – le diamètre du fil à utiliser pour que sa tension unitaire

maxima ne dépasse pas une valeur R_{ff} imposée, quand la conduite sera sous pression,

II. – le nombre de spires à poser par unité de longueur d'axe de la conduite,

III. – la tension R_{if} (charge unitaire initiale dans la frette) de pose du fil d'acier sur le tuyau vide, tension qui doit être telle que, quand la conduite sera sous pression, la charge unitaire annulaire interne R_{fit} (charge unitaire finale à l'intrados du tuyau) y soit: ou nulle ou une compression de valeur *à priori* fixée.

Nous rappellerons, tout d'abord, succintement, la méthode de calcul suivie par le B. C. B., puis en développerons une autre, à notre avis plus correcte, et qui par rapport à la première permet une économie appréciable de *fil-frette*, la sécurité étant identique, sinon plus grande.

Observations concernant les notations.

n avec indice (s) littéral (aux) inférieur (s) = charge unitaire

n_1 cf. formule 20

R charge unitaire

i *seul* indice inférieur = (à l') intérieur

e *seul* indice inférieur = (à l') extérieur

i *premier* indice inférieur = initial

f *premier* indice inférieur = final

i *deuxième* indice inférieur = à l'intrados

e *deuxième* indice inférieur = à l'extrados

t *premier, deuxième,* ou *troisième* indice inférieur = dans le tuyau

f *premier, deuxième,* ou *troisième* indice inférieur = dans la frette

η coefficient de Poisson

E coefficient d'élasticité longitudinale.

Première méthode (méthode du B. C. B.)

„Soit, fig. 1, la coupe de la conduite en beton.

A un niveau r, la fibre annulaire, d'épaisseur dr, est soumise du fait du frettage à une charge unitaire

$$(1) \qquad \frac{p_i r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}\left(\frac{r_e^2}{r^2} + 1\right) - \frac{p'' r_e^2}{r_e^2 - r_i^2}\left(\frac{r_i^2}{r^2} + 1\right)^{1)}.$$

Les charges unitaires it correspondant :

1) formule de Lamé.

à l'intrados (n_{it}) et
à l'extrados (n_{et})
s'explicitent comme suit :

$$n_{it} = p_i \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} - 2p'' \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} = \quad (2)$$

$$= 2p_i \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} - p'' \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}. \quad (3)$$

Pour que la charge unitaire n_{it} soit nulle, il faut que, du fait du frettage, naisse, quand la conduite est sous pression, entre frette et tuyau, une pression réciproque p'', déduite de la relation 2, égalée à zéro.

Cette pression s'explicite comme suit :

$$p'' = 0{,}5\, p_i \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2}. \quad (4)$$

Si n désigne le nombre de spires à poser par unité de longueur d'axe du tuyau, s la surface de la section droite du fil-frette et R_{ff} la charge unitaire finale dans la frette (quand la conduite est sous pression) on écrit :

$$2n\, s\, R_{ff} = 2 r_e\, p'' \quad (5)$$

d'où l'on déduit :

$$n = \frac{p'' r_e}{s R_{ff}} \quad (6)$$

soit, en tenant compte de (4) :

$$n = 0{,}5 \frac{p_i}{R_{ff}} \frac{r_e^2 + r_i^2}{s r_e}. \quad (7)$$

La tension de pose R_{if} du fil se calcule en tenant compte du fait que la déformation de la fibre extérieure du tuyau doit être égale à l'allongement de la frette :

1°. Le reccourcissement radial $\Delta_1 r_e$ du rayon extérieur du tuyau soumis à la charge unitaire n_{et} est :

$$\Delta_1 r_e = \frac{n_{et}}{E_t} r_e$$

or

$$n_{et} - n_{it} = p'' - p_i = 0{,}5\, p_i \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2} - p_i =$$

$$= -0{,}5\, p_i \frac{r_e^2 - r_i^2}{r_e^2} = n_{et}$$

d'où

$$\Delta_1 r_e = -0{,}5 \frac{p_i}{E_t} \frac{r_e^2 - r_i^2}{r_e} ; \tag{8}$$

2°) l'allongement radial $\Delta_2 r_e$ du rayon intérieur de la frette est :

$$\Delta_2 r_e = \frac{R_{ff}}{E_f} r_e . \tag{9}$$

Le calcul se poursuit, exposé comme suit :
l'écartement entre frette et tuyau serait donc :

$$\varepsilon = \Delta_2 r_e - \Delta_1 r_e$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon = \frac{R_{ff}}{E_f} r_e + 0{,}5 \frac{p_i}{E_t} \frac{r_e^2 - r_i^2}{r_e} . \tag{10}$$

Pour éviter cet écart, il faut donner à la frette un serrage initial

$$\varepsilon \fallingdotseq \frac{R_{ff}}{E_f} r_e .$$

La pression $\overline{p''}$, entre frette et tuyau vide – lors de la pose –, se calcule, dans cette méthode, comme suit :
sous l'effet de $\overline{p''}$, le raccourcissement $\overline{\Delta_1 r_e}$ du rayon extérieur du tuyau vaut :

$$\overline{\Delta_1 r_e} = -\frac{\overline{p''}}{E_i} \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} r_e \tag{11}$$

et l'allongement radial $\overline{\Delta_2 r_e}$ du rayon intérieur de la frette est :

$$\overline{\Delta_2 r_e} = \frac{\overline{p''}}{E_f} \frac{r_e^2}{s\,n} \text{ (cf. 6).} \tag{12}$$

L'écart entre frette et tuyau sera :

$$\bar{\varepsilon} = \overline{p''} \left(\frac{1}{E_f} \frac{r_e^2}{s\,n} + \frac{1}{E_t} \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} r_e \right). \tag{13}$$

Egalant (10) et (13), il vient :

$$\frac{R_{ff}}{E_f} r_e + 0{,}5 \frac{p_i}{E_t} \frac{r_e^2 - r_i^2}{r_e} = \overline{p''} \left(\frac{1}{E_f} \frac{r_e^2}{s\,n} + \frac{1}{E_t} \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} r_e \right) \tag{14}$$

d'où $\overline{p''}$.

Pour obtenir, lors de l'enroulement du fil d'acier, la pression $\overline{p''}$ entre frette et tuyau, il faut réaliser une tension de pose déduite de la relation :

$$R_{if} = \frac{\overline{p''} r_e}{s\,n}$$

et s'exprimant comme suit :

$$R_{if} = \frac{R_{ff} + 0{,}5 \frac{E_f}{E_t} p_i \frac{r_e^2 - r_i^2}{r_e^2}}{1 + \frac{E_f}{E_t} \frac{s}{r_e} \frac{n}{r_e} \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}}.$$

Application numérique.

Frettage d'une conduite de rayon intérieur égal à 500 mm, dont l'épaisseur est égale à 100 mm et qui est soumise, en service, à une pression de 25 kg/cm².

Le diamètre de la section droite du fil-frette utilisé est de 12 mm, et $R_{ff} = 20$ *kg/mm².*

De la relation (7) on déduit :

$$n = 56.$$

La tension initiale de pose (cf. 16) est :

$$R_{if} = 12{,}86 \text{ kg/mm}^2.$$

Le calcul des charges annulaires, dans le beton, conduit aux valeurs suivantes :

1⁰) conduite vide :	$n_{it} = -88{,}5$ kg/cm²		
	$n_{et} = -75{,}0$ kg/cm²		
2⁰) $p_i = 12{,}5$ kg/cm² :	$n_{it} = -43{,}5$ kg/cm²		compression
	$n_{et} = -39{,}5$ kg/cm²		
3⁰) $p_i = 25$ kg/cm² :	$n_{it} = 0$ kg/cm²		
	$n_{et} = -3{,}8$ kg/cm²		
4⁰) $p_i = 32{,}5$ kg/cm² :	$n_{it} = 27{,}5$ kg/cm²		traction.
	$n_{et} = 18{,}2$ kg/cm²		

Remarques.

Dans cette méthode, on se fixe, *à priori*, sans règle directrice, le diamètre du fil-frette et on ne s'y inquiète, en aucune manière, des dimensions des diamètres intérieur et extérieur de la frette par rapport à l'axe de tuyau. Le calcul des déformations radiales successives de la frette, sous l'effet des pressions p'' et $\overline{p''}$ s'y fait, en effet, en admettant que le diamètre intérieur initial de la frette est égal au diamètre extérieur initial du tuyau[a].

Méthode présentée par l'auteur.

A. *Cas du frettage par spires jointives.*

Nous admettrons :

a) comme il est, implicitement, admis, d'ailleurs, plus avant, que le frettage est fait par anneaux, alors, qu'en réalité, le fil est enroulé en spirale sur le tuyau,

b) que le fil est de section carrée.

Considérons, séparément, à l'état neutre un anneau frette et la portion de tuyau sous jacente. Ils sont dessinés, en coupe, aux fig. 2 et 3. Un élément d'anneau-frette ou de tuyau, d'angle au centre $d\varphi$, est sollicité par des forces unitaires radiales (symboles : n_f' et n_t') et annulaires (symboles : n_f et n_t).

1) Les forces agissant sur chacun de ces éléments se font équilibre et, en les projettant sur la bissectrice de l'angle au centre, nous obtenons :

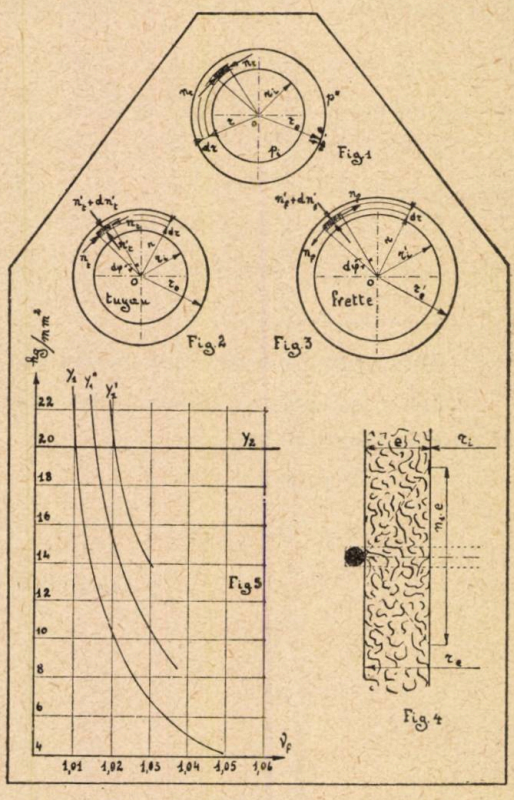
Frette

$$(I)\quad (n_f + n_f')\frac{dr_f}{r_f} = -\,dn_f';$$

Tuyau

$$(I')\quad (n_t - n_t')\frac{dr_t}{r_t} = dn_t'\ .$$

2) Les déformations proportionnelles radiales (i_f' et i_t') et les déformations proportionnelles annulaires (i_f' et i_t) s'explicitent comme suit :



Frette

$$(1)\quad i_f' = -\frac{n_f' + \eta \cdot n_f}{E_f} = \frac{du_f}{dr_f}\ ^{1)}$$

$$(2)\quad i_f = \frac{n_f + \eta \cdot n_f'}{E_f} = \frac{u_f}{r_f}\ ^{1)}$$

Tuyau

$$(1')\quad i_t' = \frac{-n_t' + \eta \cdot n_t}{E_t} = -\frac{du_t}{dr_t}\ ^{1)}$$

$$(2')\quad i_t = \frac{-n_t + \eta \cdot n_t'}{E_t} = \frac{u_t}{r_t}\ .$$

De ces relations nous déduisons, respectivement :

(II) $$(n_f + n_f')\frac{dr_f}{r_f} = -\frac{dn_f + \eta \,.\, dn_f'}{1 + \eta}$$

(II') $$(n_t - n_t')\frac{dr_t}{r_t} = -\frac{dn_t - \eta \,.\, dn_t'}{1 + \eta}$$

et, par suite :

(3) $dn'_f = dn_f$ (cf. I, II) (3') $dn'_t = -dn_t$ (cf. I', II')

d'où :

(III) $n'_f - n_f = A_f$ [2]) (III') $n'_t + n_t = A_t$ [2])

Des relations (I,) (3,) (I') et (3') nous pouvons déduire :

(IV) $r^2 (n_f + n'_f) = B_f$ [2]) (IV') $r_t^2 (n_t - n'_t) = B_t$ [2])

et des relations III, IV, III' et IV' :

(4) $$\boxed{n_f = 0{,}5\left(\frac{B_f}{r_f^2} - A_f\right)}$$ (4') $$\boxed{n_t = 0{,}5\left(\frac{B_t}{r_t^2} + A_t\right)}$$

(5) $$\boxed{n' = 0{,}5\left(\frac{B_f}{r_f^2} + A_f\right)}$$ (5') $$\boxed{n' = -0{,}5\left(\frac{B_t}{r_t^2} - A_t\right)}$$.

Détermination des constantes A_f, B_f, A_t et B_t.

Les constantes se déduisent des relations (4), (5), (4') et (5') où, successivement, nous faisons :

$n_f' = p_e$ pour $r_f = r_e'$ $\quad$ $n_t' = p''$ pour $r_t = r_e$ [1])

$n_f' = p''$ pour $r_f = r_i'$ [3]) $\quad$ $n_t' = p_i$ pour $r_t = r_i$.

En posant :

$$\boxed{\frac{p_e}{p''} = \mu_f \qquad \frac{r_e}{r_i} = \nu_f} \qquad \boxed{\frac{p_i}{p''} = \mu_t \qquad \frac{r_e}{r_i} = \nu_t}$$

nous obtenons :

---

1) après déformation, un anneau de rayon r est devenu un anneau de rayon $r \pm u$, suivant qu'il s'est dilaté ou comprimé et du est la déformation de dr.

2) Les termes A et B sont des constantes d'intégration.

3) p'' désigne la pression entre frette et tuyau quant, après déformation, les rayons r_e et r'_i sont devenus égaux.

(6) $$A_f = 2\frac{\mu_f \cdot \nu_f^{\,2} - 1}{\nu_f^2 - 1} p''$$

(7) $$B_f = 2\,(1-\mu_f)\frac{r_e'^{\,2}}{\nu_f^2 - 1} p''$$

(6') $$A_t = 2\frac{\nu_t^2 - \mu_t}{\nu_t^2 - 1} p''$$

(7') $$B_t = 2\,(1-\mu_t)\frac{r_e^{\,2}}{\nu_t^2 - 1} p''$$

En remplaçant dans (4), (5), (4') et (5'), nous obtenons les expressions des charges unitaires annulaires & radiales, tant pour la frette que pour le tuyau (voir tableau I).

Frette	*Tuyau*
pour $r_f = r_e'$	pour $r_t = r_e$
$n_{.ef} = \dfrac{2 - \mu_f(1 + \nu_f^2)}{\nu_f^2 - 1} p''$	$n_{.et} = \dfrac{1 + \nu_t^2 - 2\mu_t}{\nu_t^2 - 1} p''$
$n'_{.ef} = \mu_f p'' = p_e$	$n'_{.et} = p''$
pour $r_f = r_i'$	pour $r_t = r_i$
$n_{.if} = \dfrac{1 + \nu_f^2\,(1 - 2\mu_f)}{\nu_f^2 - 1} p''$	$n_{.it} = \dfrac{2\nu_t^2 - \mu_t(1 + \nu_t^2)}{\nu_t^2 - 1} p''$
$n'_{.if} = p''$	$n'_{.it} = \mu_t p'' = p_i$

Tableau I

Sous l'effet du frettage, quand, entre frette et tuyau, existe une pression p'' (les pressions extérieure et intérieure étant, respectivement, p_e et p_i), les rayons r_i' (frette) et r_e (tuyau) sont, l'un et l'autre, devenus égaux.

Désignons par ce rayon commun des surfaces des contact. Les déformations proportionnelles correspondantes ($\iota_{.if}$ pour l'intérieur de la frette, $\iota_{.et}$ pour l'extérieur du tuyau) s'expriment comme suit :

(8) $$\iota_{.if} = \frac{\varrho - r_i'}{r_i'} = \frac{n_{.if} + \eta \cdot n'_{.if}}{E_f}$$

(8') $$\iota_{.et} = -\frac{r_e - \varrho}{r_e} = -\frac{n_{.et} - \eta \cdot n'_{.et}}{E_t}$$

d'où nous déduisons :

(9) $\varrho = r_i' \left(1 + \frac{n_{.if} + \eta . n'_{.if}}{E_f} \right)$ (9') $\varrho = r_e \left(1 - \frac{n_{.et} - \eta . n'_{.et}}{E_t} \right)$

tenant compte des expressions des $n_{.f}$, $n'_{.i}$, $n_{.t}$ et $n'_{.i}$ explicitées au tableau I et après avoir égalé les valeurs de (9) et (9') de ϱ, nous obtenons :

$$(10) \qquad \frac{r_i'}{r_e} = k = \frac{1 - \frac{p''}{E_t} \left(\frac{1 + \nu_t^2 - 2\mu_t}{\nu_t^2 - 1} - \eta \right)}{1 + \frac{p''}{E_f} \left(\frac{1 + \nu_f^2 (1 - 2\mu_f)}{\nu_f^2 - 1} + \eta \right)} .$$

Le rayon extérieur r_e' de la frette – ou, tout aussi bien : ν_f – devra être tel que la tension maxima $n_{.if}$ soit, tout au plus, égale à la charge unitaire R_{ff} *à priori* admise, or

$$(11) \qquad n_{.if} = \frac{1 + \nu_f^2 . (1 - 2\mu_f)}{\nu_f^2 - 1} p''$$

et ν_f se déduira de la relation :

$$(12) \qquad \frac{1 + \nu_f^2 . (1 - 2\mu_f)}{\nu_f^2 - 1} p'' \leq R_{ff}.$$

Calcul de la pression p''.

Si nous désirons que la charge unitaire annulaire à l'intrados du tuyau (n) soit nulle ou une compression, quand le tuyau est sous pression, il conviendra (cf. tableau I), que :

$$(13) \qquad \mu_t \leq \frac{2\nu_t^2}{1 + \nu_t^2}$$

c'est-à-dire :

$$(14) \qquad p'' \geqslant \frac{1 + \nu_t^2}{2\nu_t^2} p_i .$$

Si nous choisissons :

$$p'' = \frac{1 + \nu_t^2}{2\nu_t^2} p_i$$

la relation (12) s'écrit :

$$(15) \qquad \frac{1 + \nu_f^2 . (1 - 2\mu_f)}{\nu_f^2 - 1} \frac{1 + \nu_t^2}{2\nu_t^2} p_i \leq R_{ff}.$$

De la relation (12) – pour la valeur adoptée de p'' – nous pourrons déduire (voir 15) la valeur du rapport ν_f en deça de laquelle il convient de ne pas descendre, c'est-à-dire, aussi, la valeur minima possible pour r_e', puisque r_i' est fixé – pour la valeur du rapport ν_f admis – par a relation (10).

Nombre de spires.

La mesure minima c du côté de la section du fil devant servir de frette est :

$$c = r_e' - r_i'. \tag{16}$$

Le nombre de spires à utiliser par unité de longueur d'axe du tuyau, vu la méthode de calcul suivie, se déduira de la relation

$$n = \frac{1}{c} \tag{17}$$

et les spires sont jointives.

La longueur du fil enroulé est :

$$L = 2\pi \frac{r_e' + r_i'}{2} n$$

et il pèse :

$$P = L \cdot c^2 \cdot \delta.$$

Calcul de la tension de pose du fil-frette.

Il reste à calculer la tension de pose du fil d'acier, telle que quand la conduite sera sous charge, l'intrados du tuyau ne soit pas – annulairement – tendu, c'est-à-dire telle, que n_{it} soit, alors, nulle ou une compression.

Pour ce faire, partant des valeurs des rayons r_e, r_i, r_e', r_i', les uns fixes *à priori*, les autres venant d'être calculés, nous évaluerons les tensions dans la frette, lors de la pose, quand le tuyau est vide, c'est-à-dire quand :

$$p_i = 1 \text{ kg/cm}^2.$$

Nous désignerons pour ce cas, par $\bar{p}''$ la pression réciproque entre frette et tuyau au niveau de la surface de contact de rayon $\bar{\varrho}$. Evalué à partir des relations (9) et (9'), le rayon $\bar{\varrho}$ se déduit de la relation suivante :

$$\bar{\varrho} = r_i' \left(1 + \frac{\bar{n}_{.if} + \eta \cdot \bar{n}'_{.if}}{E_f} \right) = r_e \left(1 - \frac{\bar{n}_{.et} - \eta \cdot \bar{n}'_{.et}}{E_t} \right), \tag{18}$$

$\bar{n}_{.if}$, $\bar{n}'_{.if}$, $\bar{n}_{.et}$, $\bar{n}'_{.et}$ se rapportant au cas envisagé.

La relation (18) transformée (cf. 10) comme suit :

$$r_i' \left\{ 1 + \frac{\bar{p}''}{E_f} \left[\frac{1 + \nu_f^2 (1 - 2\bar{\mu}_f)}{\nu_f^2 - 1} + \eta \right] \right\} = r_e \left\{ 1 - \frac{\bar{p}''}{E_t} \left[\frac{1 + \nu_t^2 - 2\bar{\mu}_t}{\nu_t^2 - 1} - \eta \right] \right\}^{1)} \tag{19}$$

1) $\bar{\mu}_f = \frac{\bar{p}_e}{\bar{p}''}$, $\bar{\mu}_t = \frac{\bar{p}_i}{\bar{p}''}$ avec $\bar{p}_e = \bar{p}_i = 1$.

permettra la détermination de $\bar{p}''$.

Il nous sera, alors, possible de calculer les tensions unitaires $\bar{n}_{.if}$ et $\bar{n}_{.ef}$ [1] dont la demi-somme peut être admise comme tension unitaire de pose (R_{if}).

L'effort total de pose sera donc :

$$T_p = s\ R_{if}$$

s désignant la mesure de la section droite du fil.

Calcul des charges unitaires annulaires dans la frette pour une pression p_i' différente de p_i.

Ce calcul se poursuit comme au paragraphe précédent, qui n'est, d'ailleurs, qu'un cas particulier du cas général envisagé ici (celui correspondant à $p_i' = 1\ kg/cm^2$).

Calcul des charges unitaires annulaires dans le beton.

Ces charges unitaires se calculeront à partir des relations explicitées au tableau I en y remplaçant p'' par la valeur ad-hoc.

Cas du frettage par spires non jointives.

Nous désignerons par c la mesure du côté du fil-frette et admettrons que l'effet d'une frette se répartit sur une longueur $n_1\ e$ $(n_1 = 8)$ de l'intrados du tuyau (Annales des ponts et chaussées de France, avril 1936).

L'hypothèse que nous faisons, nous autorise à conclure que les calculs seront poursuivis comme plus haut, à condition de considérer comme pression intérieure une pression p_i' déduite de la relation suivante :

$$p_i'\ c = p_i\ n_1\ e$$

c'est-à-dire :

$$p_i' = \frac{n_1\ e}{c}\ p_i. \tag{20}$$

La pression réciproque p''' au niveau de la surface de contact entre frette et tuyau, quand la conduite sera sous charge, vaudra :

$$p''' = \frac{1 + \nu_t^2}{2\nu_t^2}\ p_i' \tag{21}$$

suivant que la charge unitaire à l'intrados du tuyau devra être ou nulle ou une compression.

---

1) $\bar{n}_{.if} = \dfrac{1 + \nu_f^2\ (1 - 2\bar{\mu}_f)}{\nu_f^2 - 1}\bar{p}''$ et $\bar{n}_{.ef} = \dfrac{2 - \bar{\mu}_f\ (1 + \nu_f^2)}{\nu_f^2 - 1}\bar{p}''$.

La charge unitaire n_{if} s'exprime (voir tableau I) comme suit :

$$n_{if} = \frac{1+\nu_f^2\,(1-2\mu_f)}{\nu_f^2-1}\,p_i''' \tag{22}$$

elle sera égale ou inférieure à une charge R_{ff}, *à priori* fixée, ce qui permettra le calcul de

$$\nu_f = \frac{r_e'}{r_i'} = 1+\frac{c}{r_i'}. \tag{23}$$

Le rapport $k = r_i'/r_e$ se déduira de la relation

$$k = \frac{1-\dfrac{p'''}{E_i}\left(\dfrac{1+\nu_t^2-2\mu_t}{\nu_t^2-1}-\eta\right)}{1+\dfrac{p'''}{E_f}\left(\dfrac{1+\nu_f^2(1-2\mu_f)}{\nu_f^2-1}-\eta\right)} \tag{24}$$

où :

$$\mu_t = \frac{p_i'}{p'''} = \frac{1+\nu_t^2}{2\nu_t^2} \quad \text{et} \quad \mu_f = \frac{p_e}{p'''} \tag{25}$$

l'intrados étant, alors, à l'état neutre.

Application numérique.

Il s'agira de l'exemple examiné par le le B. C. B. en fin de la théorie qu'il met en oeuvre. Nous avons rappelé l'un et l'autre:

I) *Cas du frettage par spires jointives.*

Nous ne notons que quelques résultats intermédiaires, pour arriver, finalement, à la connaissance de :
c, n et T_p (tension totale de pose).

$$p'' = 0{,}2118 \text{ kg/mm}^2 \text{ (cf. 13) pour } n_{it} = 0$$

$$\mu_f = 0{,}0474$$

ν_f se déduit de la relation (12), soit de :

$$0{,}2118\,\frac{1+0{,}9052\,\nu_f^2}{\nu_f^2-1} \leq 20.$$

Cette relation traduite par les lignes Y_1 et Y_2 (respectivement : 1er et 2d membre de la relation précedente) de la fig. 5 nous indique que ν_f doit être supérieur à 1,01.

Adoptons $\nu_f = 1{,}012$.

Il y correspond : $R_{ff} = 17$ kg/mm^2.

Des calculs de μ_t, k, r_i', r_e', nous déduisons, finalement ;

$c = 7{,}2$ mm

$n = 138{,}5$ sp./m.

$T_p = 620$ kg.

II. *Cas du frettage par spires non jointives.*

1°. *Nous admettons* :

$$\frac{n_1 e}{c} = 2$$

et calculons, successivement :

$p_i' = 0{,}5$ kg/mm^2

$p''' = 0{,}4236$ kg/mm^2

$\mu_t = 1{,}18$

$\mu_f = 0{,}0236$.

ν_f, pour que R_{ff} ne dépasse 20 kg/mm^2 doit être supérieur à 1,0211 (cf. fig. 5, courbes : Y_1' et Y_2).

Adoptons : $\nu_f = 1{,}025$, il y correspond $R_{ff} = 17{,}25$ kg/mm^2.

Des calculs de k, r_i', r_e' nous déduisons, finalement :

$c = 15$ mm

$n = 34$ sp /m

$T_p = 1618$ kg.

2°. *En admettant* $\frac{n_1 e}{c} = 1{,}482$, rapport qui correspond au nombre de sprires préconisé par le B.C.B. pour l'exemple envisagé, nous avons obtenu, en application de la méthode proposée, tous calculs faits (cf. fig. 5, courbes Y_1'' et Y_2).

$c = 9{,}5$ mm pour $R_{ff} = 20$ kg/mm^2

$c = 11$ mm pour $R_{ff} = 17$ kg/mm^2

le nombre de spires étant 56.

Comparaison des poids de fil-frette à utiliser pour l'exemple considéré suivant les deux méthodes exposées.

Nous désignerons par :

$P_{D.C.D.}$ le poids de fil-frette par mètre de longueur du tuyau calculé à partir de la méthode présentée par l'auteur,

$P_{B.C.B.}$ le poids correspondant calcule par le B. C. B.

frettage par		méthode	R_{ff} kg /mm²	$\frac{n_1 e}{c} =$	$n/sp./m$	$\frac{P_{D.C.D.}}{P_{B.C.B.}} =$
spires jointives	a	D. C. D. B. C. B.	17 20	1	138,5	$\frac{7,2^2 . 138,5}{12^2 . 56} = 0,89$
spires non jointives	b	D. C. D. B. C. B.	17 20	2	34 56	$\frac{15^2 . 34}{12^2 . 56} = 0,95$
	c	D. C. D. B. C. B.	17 20	1,482	56 56	$\frac{11^2}{12^2} = 0,84$
	d	D. C. D. B. C. B.	20 20	1,482	56 56	$\frac{9,5^2}{12^2} = 0,665$

Le cas *d* correspond exactement à la même condition de réalisation ($R_{ff} = 20$ kg/mm²) pour les deux méthodes de calcul. Pour les *a*, *b*, *c*, le bénéfice correspondant serait plus grand (au bénéfice de la méthode D. C. D.) que celui signalé pour chacun d'eux s'il avait été tenu compte dans l'application de la seconde méthode d'une charge R_{ff} égale à *20* kg/mm² au lieu de *17*.

Conclusions.

Les méthodes de calcul B. C. B. et D. C. D. ont posé, la première implicitement, la seconde, explicitement, comme hypothèse de départ, que le fil-frette est de section carrée, alors que le fil est rond.

Les résultats obtenus, même par la seconde méthode, ne donnent donc pas, pour le cas réel, la valeur exacte des éléments calculés, vu que, dès l'abord, on peut affirmer que les pressions, aux zônes de contact, sont plus grandes que les pressions calculées.

Il en irait autrement, si on utilisait, au lieu de fil rond, du fil carré, puisqu'alors la réalisation correspondrait exactement au cas qu'envisage le calcul. Il n'y aurait d'ailleurs aucune difficulté,

qui ne pourrait être surmontée, à utiliser ce genre de fil, ni à créer l'outillage nécessaire à sa mise en place.

Un avantage tiré de l'emploi du fil carré sera, vu la concordance plus grande entre réalisation et cas théorique, une sureté plus certaine. D'autre part, bénéfice plus directement sensible, dû à la méthode D. C. D. plus correcte, le poids du métal à utiliser par rapport à celui déduit de l'autre méthode, est plus faible.

Université de Liége
et l'Ecole Industrielle Supérieure de Liége

(Reçu le 31 Mars 1948).

PRINCIPES MODERNES EMPLOYÉS À LA CONSTRUCTION DES APPAREILS DE VOIE

par
N. IOSIPESCU

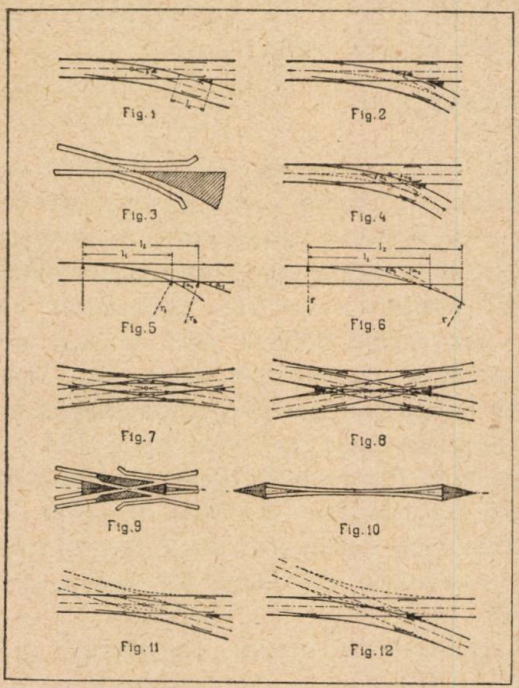
On connait assez bien les anciens principes d'après lesquels on construisait et on construit encore en majeure partie les appareils de voie de chemin de fer, même ceux de types assez modernes, standardisés, employés par différents réseaux. Selon ces principes les coeurs de croisement devaient être construits avec les deux côtés de roulement absolument droits. Ces coeurs doivent être montés par conséquent en un alignement droit de la voie déviée de l'appareil, dont on doit interrompre la courbure sur une certaine longueur, avant la pointe du coeur et jusqu'au talon de cette pièce (Fig. 1). D'après cette ancienne conception, la ligne déviée d'une branchement présente donc une discontinuité de courbure au niveau du coeur de croisement. On observe bien à la circulation ce défaut, qui est une des causes qui imposent des restrictions de vitesse au passage des trains sur ces appareils.

Depuis quelque temps, certains constructeurs ont pourtant osé renoncer à cet ancien prejugé, qui faisait croire que la sécurité même de la circulation dépendait en première ligne de ce mode de construction. On a donc commencé à construire des appareils de voie avec une courbure continue de la voie déviée, la courbe allant de la pointe des aiguilles jusqu'au delà du coeur de croisement (Fig. 2). Ceci a entraîné naturellement le besoin de construire et d'employer des coeurs dont l'un des côtés de circulation soit en courbe (Fig. 3). La disparition de l'avantage de l'interchangeabilité des coeurs de croisement, entre les branchements à déviation droite ou gauche de l'ancienne construction, a été largement compensée par l'avantage d'un meilleur roulement des trains.

Ces nouvelles constructions d'appareils de voie, du système ayant la courbe continue et le coeur de croisement situé en courbe, présentent donc des grands avantages pour la circulation. Elles devraient être

par conséquent étudiées et adoptées partout, par les administrations de chemins de fer modernes. C'est ce qu'on a déjà fait en certains pays, les chemins de fer italiens, par exemple, ayant adapté à leurs conditions locales de tels appareils très bien réalisés. On peut le constater dans une belle étude des Mrs. Giovanni Robert et Amleto Pizzoli, publiée dans le numéro d'Avril 1937 de la revue „Ingegneria Ferroviaria".

Un autre avantage de ce système d'appareil de voie consiste dans la possibilité d'obtenir, avec les mêmes pièces, des branchements avec des angles de déviation différents. On réalise ceci tout simplement en prolongeant plus ou moins la courbe de la ligne déviée au delà du coeur de croisement, jusqu'en un point où la tangente à l'axe de la courbe fait avec l'axe de la ligne directe l'angle de déviation désiré (Fig. 4). Ainsi, tandis que les appareils de voie normaux, aux coeurs situés en alignement, sont d'autant plus longs que l'angle de déviation est petit (Fig. 5), pour les appareils du nouveau système la longueur est d'autant plus petite que l'angle de déviation est moins grand (Fig. 6). En même temps chez les premiers, le rayon de courbure de la voie déviée varie en sens inverse à la valeur de cet angle, tandis que pour les seconds le rayon de courbure reste constant.



Nous citons comme exemple d'un tel appareil le *„Rbrv-49-190-1 : 7,5 | 1 : 6,6"*, employé par les chemins de fer allemands, pour lequel, avec un rayon de courbure de la voie déviée de 190 m. on a pu obtenir les deux angles de déviation de tangentes 1 : 7,5 et 1 : 6,6.

Un autre très intéressant appareil de voie introduit en usage depuis quelque temps est la traversée-jonction double désignée quelquefois par le nom du constructeur Bässeler. La principale caractéristique de cet appareil est que les aiguillages, au lieu d'être situés à

l'intérieur du losange de la traversée proprement dite, entre les coeurs de croisement, comme c'est le cas pour les types communs de traversées-jonctions (Fig. 7), sont installés en dehors de ces coeurs (Fig. 8).

Il résulte de ce mode de construction la nécessité de l'emploi des coeurs de croisement triple spéciaux qu'on observe sur le dessin et qui résultent à cause des multiples intersections de rails. Cet appareil présente en plus la particularité d'avoir les rails de la file extérieure de chaque courbe de jonction constitués, au milieu de leur longueur, là où ils se touchent tangentiellement, en un seul profil de rail commun. Sur ce rail le roulement des roues des véhicules se fait alternativement de l'un ou de l'autre côté, cette pièce étant donc sujette à une usure plus rapide.

Ce genre d'appareil a déjà été employée sur le réseau des chemins de fer roumains en 1932, à l'occasion de la construction du nouveau triage de Ploeşti, adapté aux conditions locales qui ont alors imposée sa nécessité. Son emploi n'a pas été généralisé pour d'autres points du réseau surtout pour la raison du besoin permanent de pièces de rechange, dû à l'usure extrême causée par la circulation intense. Cet appareil, sous une forme moderne et bien étudiée, qu'on peut constater dans l'étude mentionnée, a été aussi adopté en Italie, ainsi que dans d'autres pays.

Le grand avantage de cet appareil de voie est celui de permettre d'obtenir des courbes de jonction d'un rayon admissible, même pour un angle plus ouvert de la traversée. Ceci permet de réaliser une inclinaison plus grande des diagonales de liaison, reliant les lignes parallèles d'une station de chemin de fer. On réduit de cette façon les longueurs inutilisables des voies servant pour le stationnement des trains, par comparaison aux dispositifs analogues réalisés à l'aide des appareils „Standard" actuels.

Un autre but important de la construction et de l'emploi de certains de ces appareils spéciaux est encore celui de permettre l'obtentions de rayons de courbure sensiblement plus grands, avec les mêmes angles de la traversée que pour les appareils habituellement employés aujourd'hui sur le même réseau.

Un exemple de la première catégorie est la traversée-jonction double „Krw-49-190-1 : 6,6" des chemins de fer allemands, à laquelle, pour une tangente de l'angle de la traversée de 1 : 6,6, on a employé un rayon de courbure de 190 m. Pour la deuxième catégorie, on peut citer l'exemple de la traversée-jonction double allemande „Krw-49-300-1 : 9", ou encore la „Krw-49-500-1 : 9", avec lesquelles, pour une tangente de l'angle de la traversée de 1 : 9 on a pu obtenir le rayon

de courbure des voies de jonction de 300 m., respectivement 500 m. Des résultats analogues ont été obtenus par les chemins de fer italiens pour les appareils décrits dans l'étude déjà mentionnée. Naturellement, l'emploi de ces appareils de voie spéciaux exige une distance plus grande que d'habitude entre les voies parallèles reliées par les diagonales respectives.

Les parties de ces appareils les plus difficiles à construire sont les coeurs triples de croisement qui résultent de la construction. A cause du rapprochement des trois coeurs simples de chaque extrémité de la traversée, ces coeurs doivent être assemblés en une seule pièce, dont deux des côtés de circulation sont situés en courbe (Fig. 9).

Un autre partie importante de cet appareil est le rail commun à double face latérale de roulement, qui pour quelques-unes de ces constructions, est réalisé sous la forme d'un simple rail droit d'une certaine longueur. Ceci nécessite l'introduction d'un alignement au milieu de la longueur des voies de jonction, condition qui, naturellement, n'est pas avantageuse pour la régularité de la circulation en vitesse. La continuité de ces courbes de jonction pour les nouvelles constructions est réalisée pratiquement par le recourbement de deux simples rails ordinaires. On execute ensuite le rabotage des faces latérales de ces rails, ainsi recourbés, pour enlever les portions des champignons et des patins, sur les parties de sections qui se superposent. Puis, par la soudure des deux rails, ainsi rabotés sur leurs faces latérales de contact, on obtient une pièce unique, nécessitée par la forme de l'appareil (Fig. 10).

Ce qu'il y a d'intéressant encore pour la construction de tous ces nouveaux systèmes d'appareils de voie sont les principes qu'on peut leur appliquer au point de vue de la standardisation. Dans ce but on procède de la même façon que pour les appareils normaux „Standard" actuellement employés par les chemins de fer roumains. Pour ceux-ci on a supposé qu'un branchement simple est obtenu de la forme d'une traversée-jonction double du même angle de déviation, en supprimant toutes les pièces et les rails qui ne sont plus utiles à la nouvelle forme (Fig. 11). Cela permet d'employer, pour les deux différents appareils, les mêmes formes d'aiguillages, ainsi que les mêmes coeurs de croisement.

On peut obtenir de même un branchement à courbe continue, en le supposant déduit de la forme d'une traversée-jonction double aux aiguillages extérieurs par rapport aux coeurs de croisement, avec le même angle total de déviation (Fig. 12). Cela impose naturellement la condition que les courbes de la traversé-jonction double ayent une

courbure de rayon constant sur toute la longueur de l'appareil.

Ces courbes doivent aller continuellement de la pointe de l'une des aiguilles déviatrices, jusqu'à la pointe de l'aiguille de l'autre extrémité, présentant donc la même courbure au milieu de leur longueur. Les files extérieures de rails de ces courbes, dont les sections se superposent partiellement, forment le rail commun spécial à double côté de roulement, réalisé de la façon que nous avons montré plus haut.

On peut obtenir ainsi les deux appareils du système, le branchement et la traversée-jonction, en employant les mêmes formes d'aiguillages. Le fait présente un grand avantage, car ces pièces sont les parties les plus importantes d'un appareil de voie. L'emploi du coeur du croisement n'y est plus commun, comme pour les appareils normaux „Standard", à cause de la nécessité du coeur triple de la traversée-jonction. L'angle total de déviation du branchement de voie à courbe continue est aussi égal à l'angle de croisement de la traversée-jonction. Il résulte de là l'avantage de pouvoir les employer en ensemble, sur une même diagonale de liaison, reliant les voies parallèles d'une station, à un angle d'inclinaison déterminée.

Nous avons essayé de voir ce qu'on pourrait obtenir pour le matériel de voie des c hemins de fer roumains dans le domaine de la construction et de l'emploi de ce genre d'appareils. Dans ce but nous avons calculé les formes géométriques de quelques appareils qui seraient les plus utiles, en tenant compte des angles de déviation actuellement employés sur le réseau. D'après ces calculs préliminaires, on obtiendrait d'assez bons résultats. Ainisi on pourrait obtenir, par exemple, une traversée-jonction double aux aiguillages extérieurs par rapport aux coeurs de croisement, avec une valeur de la tangente de l'angle de la traversée de 1 : 6,5 et avec les courbes de jonction de formes continues, d'un rayon de 260 m. On obtiendrait aisément le branchement, correspondant à courbe continue de même rayon et à déviation double de tg 1 : 8/1 : 6,5, dérivé de la forme précédente d'appareil. Les résultats sont bien avantageux, si l'on tient compte que pour la courbe du branchement „Standard" de tg 1 : 10, actuellement en usage sur le réseau roumain, le rayon de courbure est de 245 m. Et cela sans considérer le cas plus désavatageux encore du branchement de tg 1 : 8, dont le rayon de courbure de la voie déviée n'est que de 160 m.

De la même façon on pourrait obtenir une traversée-jonction double aux aiguillages extérieurs par rapport aux coeurs de croisement, avec une tangente de l'angle de la traversée de 1 : 10 et avec des courbes de jonction de forme continue de 390 m. de rayon. Le

branchement correspondant, à courbe continue de même rayon et à déviation double de tg 1 : 10/1 : 8, obtenu en partant de la même forme, permettrait une circulation à une vitesse supérieure à celles admises par les branchements actuels „Standard" de tg 1 : 10. Cela les rendrait bien utiles pour les voies principales d'une station qui devrait être parcourue en vitesse par les trains.

On obtiendrait de cette manière quelques appareils de voie qui seraient très utiles à la construction des stations, dans le but de réaliser ces travaux avec beaucoup plus de facilité et avec une variété que les actuels appareils de voie „Standard" ne permettent pas. Et cela parce que les courbes et les angles de déviation des appareils existants aujourd'hui ne suffisent plus pour les différents cas qui se présentent dans la pratique constructive, pour correspondre à tous les besoins d'une circulation moderne.

Il est à remarquer aussi que, simultanément à l'adaption de ces nouveaux appareils, on pourrait réaliser encore, dans le cadre d'un même système de standardisation, d'autres branchements aux coeurs situés en alignement et à divers angles de déviation favorables, en utilisant les mêmes pièces principales. Nous nous abstenons pourtant de décrire les principes constructifs de tous ces appareils, par crainte de donner trop de développement à cet article. Notre principal but a été d'y énoncer seulement ces nouveaux principes de construction, dont on devrait tenir compte à l'avenir. Nous avons l'intention de traiter à une autre occasion, d'une manière plus détaillée, cette autre question, concernant les propositions que nous avons à faire pour une nouvelle standardisation de l'ensemble des appareils de voie des chemins de fer roumains.

Laboratoire d'études de matériel de voie de l'Ecole Polytechnique de Jassy

(Reçu le 15 Juin 1948).

Bibliographie

Hartmann, – *Reichsbahnweichen und Reichsbahnbogenweichen.*
A. Schau, – *Eisenbahnbau.*
A. Bloss, – *Oberbau und Gleisverbindungen.*
A. N. Stahanov, – *Soedinenie putei.*
Coffre-Widmon-Chapelle-Derache, – *Service des études du matériel des voies.*
Elsners – *Taschen Jahrbuch für den bautechnischen Eisenbahndienst.*
„Ingegneria ferroviaria", Nr. 4 d'Avril 1947.

54-57

A NEW METHOD FOR THE IDENTIFICATION OF BIOLOGICAL METHYL DONORS

by

WALTER CIUSA and **GIORGIO NEBBIA**

A method is described for the identification in vivo (man) of compounds acting as methyl donors. The method is based on the variation of the expelled trigonellines and nicotinic acid and amide under the influence of tiamine. The following compounds acted as methyl donors: choline, betaine, carnitine, stachydrine, tetramethyl-ammonium formate, methyltriethanolarmonium iodide) sodium cacodylate, 1,3,7-trimethylxanthine (caffeine), 4-dimethylamino-1,5-dimethyl-2-phenyl-3-pyrazolone (pyramidone), lecithin. The following compounds did not act as methyl donors: trigonelline, trigonellinamide chloride, 1-methyl-pyridinium chloride, N-methyl-nicotinamide, 3,4-dihydroxy-alpha-(methylamino-methyl) benzyl alcohol hydrochloride (adrenaline), 1-methyl-4-phenylpiperidine-4-carboxylic acid phenyl ester hydrochloride (dolantin), N-methylglycine hydrochloride (sarcosine).

The biological lability resuls a property inherent to the excited electropositive state ($[sp^3]^{(+)}$ for nitrogen and arsenic) of the atom which the methyl group is bound to.

The characteristics of the so-called methyl donors have been until now ascertained with the help of tests made with substances containing isotopic atoms. In other cases it has been ascertained with methods (employed preferentially upon animals) based on the study of the lipotropic action, the growth of the animal fed on a methyl acceptor diet (for instance homocystine) and the transformations of slices of tissues observed in vitro in presence of a methyl acceptor (for instance glycocyamine).

Such methods have made it possible to identify the following compounds as biological methyl donors: choline, dimethylethylcholine, betaine, dimethylthetin, dimethyl-beta-propiothetin, methionine [1]).

In this paper we shall now describe some experiments made in our laboratory accordingly to a method of our own, a method which permits to test the action of methyl donors upon man himself.

We first thought it would be possible to control the behaviour of a substance as a methyl donor after its introduction into the body, the substance being practically introduced under constantly given conditions and the eventual increase of methylated compounds being detected in the urine. Such a method should have worked out because of the irreversibility of transmethylation, the labile methyl groups of the substances which act as methyl donors being caught by the methyl acceptor substances and loosing then their lability.

However the measurement of the quantities of methylated compounds in the urine before and after introduction of the compounds which were to be classified as methyl donors or not was not always sufficient to support a valid conclusion in particular cases only. As a matter of fact even if the compounds introduced into the body are known to act as methyl donors, their methyl groups are not always used. A more satisfactory conclusion can be obtained with the help of tiamine.

As a matter of fact it has been proved [2]) that tiamine has a favourable influence upon methylation. From experimental datas it resulted that the daily introduction of steady quantities of tiamine was followed during the first days by an increased excretion of methylated compounds: in a short time (1 to 3 days) the excretion of such compounds was normal again. Once the utilization of the labile methyl groups had been regulated in this way any increase of the labile methyl groups contained in the methyl donors introduced into the body caused an icrease of the methylated compounds. Thus any increase in the daily normal quantity of the methylated compounds may be considered a proof of the introduction of a methyl donor into the body.

Once we had recognized these principles we were able to select an easy test for the detection of increased methylation, that is we began making accurate quantitative analysis of the irreversible nicotine acid and amide trigonellines methylation system.

This method first revealed itself especially succesfull when using betaine and choline. Later on it was used with following conclusions:

These compounds act as methyl donors:

carnitine
stachydrine
tetramethylammonium formate [3])

methyltriethanolammonium jodide [3])

sodium cacodylate

1, 3, 7 – trimethylxanthine (caffeine)

4 dimethylamino – 1, 5, dimethyl – 1 – 2 – phenyle – 3 pyrazolone (pyramidone)

lecithin.

Those compounds do not act as methyl donors :

trigonelline [4])

trigonellinamide chloride [4])

1 – methyl – pyridinium chloride

N – methyl – nicotinamide

3, 4 – dihydroxy – alpha – (methylaminomethyl) benzyl alcohol hydrochloride (adrenaline).

1 – methyl – 4 – phenylpiperidine – 4 – carboxylic acid phenyl ester hydrochloride (dolantin)

N – methylglycine hydrochloride (sarcosine).

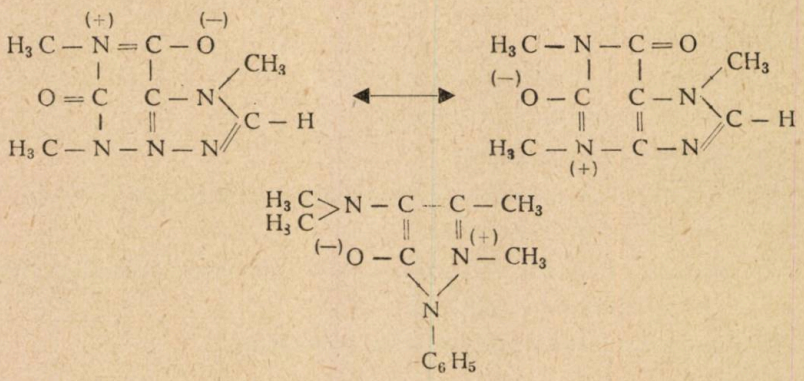
A careful examination of the characteristics of each of the single compounds listed before enabled us to determine the peculiar structure required from a compound to prove a biological methyl donor in analogy to choline and betaine.

From this examination it resulted that the methyl groups wich are bound to an atom in which the fundamental state s^2p^3 has transformed itself into an electropositive excited state $[sp^3]^{(+)}$ and whose possible substitutes are radicals or atoms all more or at least as heavy as the methyl group can be classified among the labile ones.

When the methyl group is bound to a nitrogen atom only one of the methyl groups of the choline and of the betaine resulted labile – as can be found in a paper of Du Vigneaud [5]) –; also only one of the methyl groups of the tetramethylammonium was found to be labile when this compound transformed itself prevalently into trimethylamin. Of course the methylic group in methyltriethanolammonium and stachydrine being the only one in these compounds resulted labile. Analogically we consider only one of the methyl groups in the other natural betaines (for instance the betaines of the beta – aminopropionic acid, of the alpha – delta – diaminovaleric acid, of the histidine, of the N, N – dimethyl – 4 – oxy – pyrrolidin – carboxylic acid, of the pryp-

tophan, of the gamma - dimethylaminobutyric acid, etc.) as labile *).

The methyl groups of caffeine and of pyramidone resulted labile. Until now the formulas of these compounds have been written in a way leading to the conclusion that the nitrogen atom which the methyl group is bound to was in a $s^2 p^3$ state; we think that these substances would be more exactly represented with the help of polar formulas in which the nitrogen atom is to be found in a $[sp^3]^{(+)}$ state. This belief is strenghtened among others by the works of Pauling [6]) and of Kitamura et al. [7]).



Since the methyl group in the trimethylxanthine may be labile either in the 1 or in the 3 position, we assume that not only 1, 3, 7 - rimethylxanthine but also all the derivates of the 1 or 3 methyl substituted purine act as methyl donors **).

We are not actually in a condition to classify certain compounds as methyl donors on the mere knowledge of these facts; for instance when we consider the trypaflavine and the codeine and morphine methylbromides we still must test these compounds to determine whether he methyl group bound to nitrogen atoms in not better identified states are labile or not.

We shall now describe the results obtained with methyl groups bound to a nitrogen atom wich proved not labile.

*) It is well known that after introducing choline and betaine into the body formic acid is to be found in the urine and that after introducing tetramethylammonium formate under given conditions the subjects show eventually evidence of ammonium poisoning. We explain such transformations assuming that not only one methyl group but also the other methyl groups, though not labile, break off successively.

**) It has been known for a long time that caffeine demethylates in the body loosing one methyl group either in 1 or in 3 position but various tests made since could not decide whether the methyl group was used by the body under its labile form.

The methyl group of adrenaline, dolantin and sarcosine did not prove labile ; that is the methyl group in all these compounds is not labile though they own one nitrogen atom in the $[sp^3]^{(+)}$ state when under the hydrochloride form. In these cases the methyl group is not labile because one of the nitrogen bound substitutes is lighter than the methyl group. Analogically we consider the methyl group in methylacetanilide hydrochloride (exalgine) and in all other compounds presenting the same characteristics as described above in the case of adrenaline, dolantin and sarcosine as not labile.

The methyl group of trigonelline, trigonellinamide and methylpyridinium did not prove labile because the nitrogen atom in the pyridine nucleus is strongly electronegative [8]) and can be neutralized introducing a substitute ; whereupon the state of the nitrogen atom turns into an s^2p^3 state.

Analogically we do not consider labile the methyl groups in homarine and all other substances with a $N\text{-}CH^3$ substituted pyridine nucleus.

The methyl group in creatine [9]) and N-methyl-nicotinamide did not prove labile ; as a matter of fact these groups are bound to nitrogen atoms in a s^2p^3 state. Analogically we do not consider labile the methyl groups of mono -, bi and tri-methylamine, etc.

We then undertook the experimental study of an other atom in a $[sp^3]^{(+)}$ state (and with substitutes heavier or at least as heavy as the atom bound methyl group) and chose the arsenic atom in the easily available sodium cacodylate. This compound acted as a methyl donor.

While looking for references in Du Vigneaud's paper [1]) we ware stricken by the fact that the Author had proved dimethylthetin and dimethyl-beta-propiothetin to act as methyl donors. Both are solfonium compounds, that is they have a sulphur atom in the excited state $[s^2p^3]^{(+)}$. Thinking it over we wondered if all compounds with an atom in the excited state $[s^2p^3]^{(+)}$ (be it oxygen, sulphur or selenium) and with substitutes heavier or at least as heavy as the methyl group bound to the atom in the excited state $[s^2p^3]^{(+)}$ would act as methyl donors. The idea expressed above could eventually be validly confirmed by adequate experiments.

Experimental.

Good results can be obtained proceeding as follows :

A regular quantity of aneurine hydrochloride (5 to 20 mg) is

given daily at the same hour, for instance in the evening (orally or by injection) to healthy people living on a standard diet and this for some 10 to 20 days.

If the subjects are fit for such experiments *) an increase of trigonellines expelled in the urine may be observed after the subjects have taken the first doses of tiamine. Later on the amount of the above named compounds expelled in the urine became normal again. When the amount of the compounds expelled has shown normal for 4 or 5 days the compound to be identified as a methyl donor or not is given to subject (orally or by injection). If it happens that the amount of expelled trigonellines increase noticeably and the amount of the expelled nicotinic acid and amide decrease, the compound is most probably a methyl donor.

To measure the expelled methylated compounds the Roggen's method [10]), results satisfactory : this methods lets all the N_1 - methylated pyridine derivatives be determined.

Of these compounds the trigonellines and the methylpyridinium are normally present in the urine [11]). All the urine which subjects let during 24 hours is to be examined and the urine let during the night and the urine let during the day are eventually to be treated separately.

The test is to be considered decisive only after the compound has been given twice or thrice with interval of a few days for the variation of the expelled compounds noticed the first time can be merely incidental. The results must be the same for a certain number of subjects to be worthy of consideration.

An increase of the expelled trigonellines was sometimes observed without needing the introduction of tiamine while trying to identify some compound (for instance pyramidone) as methyl donor.

Results.

Some of the results obtained can be found in the accluded tables. The variations of the expelled compounds resulting obviously we thought we could make the lecture of the tables easier giving at one

*) Healthy young people are to be considered expecially fit for these tests ; their ability to react appropriately to tiamine and to methyl donors is to be tested with the help of an already identified methyl donor (choline) before starting the experiments. Such a test is to be repeated in the same way after the experiment itself.

TABLE I

Choline mg									20	20	20	20	20	20	20	20					
Tiamine mg	5	5	5	5	5	5	5	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5		
Trigonellines expelled during 24 hours mg	13	16	14	20	47	26	37	21	30	27	39	60	31	67	52	21	14	21	10	14	
Days	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

TABLE II

Tetramethylammonium formate mg								10	10	10	10	10	20	20	20	20	20				
Tiamine mg	10	10	10	10	10	10	10	10	10	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20		
Trigonellines expelled during 24 hours mg	19	37	20	9	22	46	23	18	19	21	60	39	20	61	38	35	48	27	69	25	
Days	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

TABLE III

Methyltriethanolammonium iodide mg	575					575			
Tiamine mg	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Trigonellines expelled during 24 hours mg	23	42	17	13	28	21	44	66	23
Urine let during 24 hours cc	1150	1550	1150	1100	1550	1500	1250	1300	900
Days	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TABLE IV

Sodium cacodylate mg					150			150						150	150	150	150	150			
Tiamine mg	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10		
Trigonellines expelled during 24 hours mg.	22	18	17	9	24	39	45	19	37	64	10	28	15	12	79	20	18	12	32		
Urine let during 24 hours cc	1730	1370	1270	720	1000	1200	1060	1430	1240	1590	1200	1500	1610	1690	900	1060	1010	900	1330		
Days	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		

TABLE V

Caffeine mg	250											
Tiamine mg				5	5	5	5	5	5	5	5	5
Trigonellines expelled during 24 hours mg	32	29	35	53	62	55	47	53	111	96	96	65
Urine let during 24 hours cc	1090	1150	800	1030	1100	690	780	700	1070	990	900	1040
Days	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

TABLE VI

Pyramidone mg	200												
Tiamine mg	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
Trigonellines expelled during 24 hours mg	3	10	7	33	29	28	40	48	13	31	55	53	11
Urine let during 24 hours cc	500	790	880	1020	1420	970	1130	950	1000	640	770	690	630
Days	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

TABLE VII

Pyramidone mg	250						
Tiamine mg							
Trigonellines expelled during 24 hours mg	19	14	14	8	31	36	9
Urine let during 24 hours cc	1060	1040	1010	620	900	830	710
Days	1	2	3	4	5	6	7

TABLE VIII

Trigonelline introduced mg						200					
Tiamine mg		10	10	10	10	10	10	10	10		
Trigonellines expelled during 24 hours mg	21	25	38	36	28	20	24	62	47	18	13
Nicotinic acid and amide expelled during 24 hours mg	0,6	1,2	1,0	1,0	1,4	0,9	1,1	2,0	0,8	1,0	1,0
Urine let during 24 hours cc	1130	1080	1730	2050	1820	1130	2280	2360	1160	1250	1000
Days	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

TABLE IX

Trigonellinamide chloride introduced mg							250				
Tiamine mg				10	10	10	10	10	10	10	
Trigonellines expelled during 24 hours mg	14	11	19	15	42	11	9	135	53	9	8
Nicotinic acid and amide expelled during 24 hours mg	2,1	1,8	1,9	2 4	1,8	1,8	3,5	2,1	1,9	1,5	1,3
Urine let during 24 hours cc	1120	960	1180	840	1160	880	1240	1370	1080	810	600
Days	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

TABLE X

N-methyl-nicotinamide mg						400			
Tiamine mg			10	10	10	10	10		
Trigonellines expelled during 24 hours mg	12	12	10	49	11	21	30	21	20
Urine let during 24 hours cc	910	1180	1160	1060	1060	1280	990	1780	1370
Days	1	2	3	4	5	6	7	8	9

time the total amount of the compounds during every 24 hours.

We also report (Table VII) the experimental table of a case in which no tiamine had been given.

Istituto Chimico,
Università degli Studi, Bari

(Reçu le 15 Septembre 1948).

Bibliography

1. Moyer A. W. and du Vigneaud V., J. Biol. Chem., **143**, 373 (1942); Maw G. A. and du Vigneaud V., J. Biol. Chem., **174**, 381 (1948); du Vigneaud V., Moyer A. W. and Chandler J. P., J. Biol. Chem., **174**, 477 (1948).
2. Ciusa W. and Cristini G., Acta Vitaminologica, **1**, 1 (1947).
3. Ciusa W., Farm. Sci e Tec. (Pavia), **3**, 37 (1948); **3**, 40 (1948).
4. Ciusa W., Acta Vitaminologica, **2**, 1 (1948).
5. du Vigneaud V., Chandler J. P., Simmonds S., Moyer A. W. and Cohn M., J. Biol. Chem., **164**, 603 (1946).
6. Pauling L., Zechmeister's Fortschr. Chem. Org. Naturstoffe, Springer, III, 203 (1939).
7. Ochiai E., J. Pharm. Soc. Japan, **58**, 1025 (1938); **58**, 1040 (1938); Ochiai E. and Karii M., ibid., **59**, 18 (1939); Kitamura R., ibid., **60**, 45 (1940); **60**, 51 (1940); Kitamura R. and Sunagawa G., ibid., **60**, 115 (1940); **60**, 120 (1940); Kitamura R., ibid., **61**, 19 (1941); **61**, 24 (1941); Kitamura R., and Sunagawa G., ibid., **61**, 26 (1941); Kitamura R. ibid., **61**, 33 (1941).
8. Wheland G. W. and Pauling L., J. Am. Chem. Soc., **57**, 2086 (1935); Schomaker V. and Pauling L., J. Am. Chem. Soc., **61**, 1769 (1939).
9. du Vigneaud V., Chandler J. P. and Moyer A. W., J. Biol. Chem., **139**, 917 (1941).
10. Roggen J. C., Rec. Trav. Chim., **62**, 137 (1943).
11. Ciusa W. and Nebbia G., Arch. Sci. Biol. (Italy), in press.

SUR LA PRÉPARATION DES SOLUTIONS INJECTABLES DE SUCRE INTERVERTI

par

M. DIMA et EL. DIACONESCU (Mme)

Notre laboratoire, étant sollicité par une entreprise pharmaceutique, de lui indiquer un procédé de préparation des solutions injectables de sucre interverti en partant de la saccharose, (la glucose, ordinairement employée pour la préparation de ces solutions étant chez nous importée), nous avons essayé, en tout premier lieu, de préparer de telles solutions, en utilisant le procédé indiqué par H. Hérissey et P. Fleury *).

D'après ce procédé, l'interversion de la saccharose a lieu, en faisant bouillir doucement, pendant 30 minutes, une solution de 47,5 gr. de saccharose dans environ 925 cm^3 d'eau en présence de 0,67 gr. d'acide phosphorique, soit 1,43 gr. $PO_4 H_3$ pour 100 gr. de saccharose, ce qui représente 0,47 molécule $PO_4 H_3$ pour une molécule ($C_{12} H_{22} O_{11}$) de saccharose. Après avoir neutralisé et complété à un litre avec de l'eau distillée, on a obtenu une solution de 3% de sucre interverti.

En utilisant ce procédé, nous avons remarqué, que seulement les solutions diluées de saccharose (comme celles contenant 47,5 gr. ou tout au plus 95 gr. de saccharose par litre, et qui correspondent par conséquent à des solutions contenant 5%, respectivement 10% de sucre interverti), peuvent être interverties à la température d'ébullition de la solution tandis que, les solutions plus concentrées. comme celles de 20%, 30% et 40% de sucre interverti (concentrations demandées en thérapeutique), ne peuvent pas être préparées d'après ce procédé car à l'ébullition, les solutions se colorent avant que la durée de 30 minu-

*) Ann. Phar. Fr. 2, 144, 77 (1946).

Voir aussi le travail de Cousin et Fagon (Bull. Soc. Pharm. Bordeaux 3, 161 (1937).

tes soit atteinte et cela à cause de la caramélisation du sucre interverti.

Pour éviter cet inconvénient, nous avons dû envisager des conditions d'interversions qui pourraient nous fournir des solutions de sucre interverti non altérées et, dans ce but, nous avons étudié les facteurs suivants :

1. La concentration de la solution de saccharose.
2. L'influence de la température.
3. L'influence de la quantité d'acide phosphorique.

Dans nos essais, nous nous sommes servis d'un sucre bien raffiné, l'interversion étant conduite au bain-marie, à la température de 70° *C*, ainsi qu'à des températures plus élevées. Le degré d'interversion a été établi par la méthode gravimétrique de Fehling, (par pesée du Cu_2O).

Pour connaître la quantité totale de sucre interverti que peut donner le sucre utilisé, à une interversion pratiquement totale, nous avons procédé à l'interversion du sucre par l'acide chlorhydrique, d'après la méthode de Herzfeld (Berl-Lunge, 8-e édition-1934-, vol. 5, page 191).

On prend, d'après cette méthode, 13 gr. de sucre qu'on dissout dans de l'eau distillée ; on amène à environ 75 cm^3, dans un ballon jaugé de 100 cm^3 et puis on fait l'interversion du sucre au bain-marie, à la température de 67-70° *C*, en présence de 5 cm^3 d'acide chlorhydrique concentré ($d = 1,19$). Après l'interversion, on refroidit à 20° *C* et on complète avec de l'eau distillée à 100 cm^3 ; on prend de cette solution, 25 cm^3 (= 3,25 gr. saccharose), qu'on dilue à 500 cm^3 dans un ballon jaugé. De la solution ainsi diluée, nous avons prélevé seulement 10 cm^3 (= 0,065 gr. saccharose) [1]) où on a déterminé le sucre interverti d'après la méthode de Fehling. On a trouvé que 1 gr. de sucre analysé, donne 1,029 sucre interverti, ce qui revient à 102,9 gr. de sucre interverti pour 100 gr. de sucre.

Partie expérimentale.

1. *L'étude de l'influence de la concentration de la saccharose sur l'interversion.*

Pour étudier l'influence de la concentration de la saccharose sur la vitesse de l'interversion, nous avons préparé des solutions de sucre de concentrations variées, en maintenant dans tous les cas, la même

1) Manqué de réactifs, qui à l'heure actuelle se procurent encore assez difficilement, nous avons employé seulement 10 cm^3 de solution de sucre interverti et 30 cm^3 solution de Fehling, proportion que nous l'avons maintenue pendant tous nos essais.

proportion d'acide phosphorique à savoir: 1,41 gr. PO_4H_3 pour 100 gr. de sucre, ou bien 1,34 gr. d'acide phosphorique pour 95 gr. de sucre, quantité qui par interversion donne 100 gr. de sucre interverti (une molécule – 342 gr. – de saccharose, donne à l'interversion, 2 molécules – 360 gr. – de sucre interverti).

Pour chaque essai d'interversion, nous avons pris une quantité de sucre telle, qu'après l'interversion, 100 cm^3 de solution contiennent 10 gr., respectivement 20 gr., 30 gr., etc. de sucre interverti. C'est ainsi que pour la solution qui doit contenir 10% de sucre interverti, nous avons pris, dans un erlenmayer de 250 cm^3, muni d'un refrigérant à reflux, 9,5 gr. de sucre dissout dans la quantité d'eau nécessaire; d'autre part, nous avons ajouté, d'une solution contenant 6,7% PO_4H_3, une quantité de 2 cm^3, soit 0,134 gr. PO_4H_3, ce qui correspond à 1,41 gr. PO_4H_3 pour 100 gr. de sucre. Nous avons procédé de la même manière avec les autres essais; dans ce but, nous avons préparé des solutions contenant 19 gr., respectivement 28,5 gr., 38 gr., 47,5 gr., 57 gr., 66,5 gr. et 76 gr. de sucre, qui après l'interversion donnent des solutions qui contiennent 20%, respectivement 30%, 40%, 50%, 60%, 70% et 80% de sucre interverti.

Dans tous ces essais, la proportion d'acide phosphorique a été de 1,41 gr. PO_4H_3 pour 100 gr. de sucre et la température celle de 70° C.

Pour suivre le procès de l'interversion dans les conditions données, nous avons prélevé des échantillons après chaque heure (pour les solutions plus concentrées après chaque demi-heure). Chaque fois nous avons prélevé, ca. 5 cm^3 de solution, qui a été refroidie à 20° C; de cette solution nous avons pris, dans un ballon de 100 cm^3, une quantité correspondant à 1 gr. de sucre initial; après neutralisation avec de la soude, on a complété à 100 cm^3 avec de l'eau distillée.

De la solution ainsi diluée, nous avons prélevé 10 cm^3 (= ca. 0,1 gr. de sucre), dans lesquels nous avons déterminé le sucre interverti, d'après Fehling. Pour chaque essai d'interversion, nous avons prélevé – dans les conditions indiquées –, tant d'echantillons, jusqu'à ce qu'on ait constaté l'interversion complète du sucre. (En comparaison avec la quantité de sucre interverti, obtenue à l'interversion avec d'acide chlorhydrique).

Les résultats de ces essais sont consignés dans le tableau 1 et dans les graphiques des figures 1 et 2.

De ces données on constate que:

1). Dans les mêmes conditions de travail, (température et proportion d'acide phosphorique), la vitesse d'interversion croît avec la

concentration en sucre. C'est ainsi que pour obtenir 95 gr. de sucre interverti, de 100 gr. de sucre soumis à l'interversion, la durée d'interversion est: de 3 heures pour une solution de 9,5% de sucre

TABLEAU I

Influence de la concentration en sucre dans l'interversion.
(Quantité de sucre en pourcentages, formée pendant l'interversion à 70° C).

Concentration des solutions soumises à l'interversion	Temps d'interversion en heures								
	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6
	Pourcentages de sucre interverti								
9,5 % de sucre (= 10 % de sucre interverti)	—	69,40	—	90,30	—	94,40	97,00	97,50	98,10
19 % de sucre (= 20 % de sucre interverti)	71,50	91,30	96,10	99,20	99,25	99,45	99,57	100,20	100,50
28,5 % de sucre (= 30 % de sucre interverti)	76,50	95,95	99,45	99,65	99,70	99,75	99,85	100,50	100,70
31,35 % de sucre (= 33 % de sucre interverti)	—	96,54	—	99,90	—	100,00	100,32	100,60	100,80
38 % de sucre (= 40 % de sucre interverti)	78,40	99,55	—	102,55	—	102,80	102,90	102,90	—
47,5 % de sucre (= 50 % de sucre interverti)	92,72	101,36	102,80	102,85	102,90	102,90	—	—	—
57 % de sucre (= 60 % de sucre interverti)	92,85	101,60	102,82	102,86	102,90	102,90	—	—	—
66,5 % de sucre (= 70 % de sucre interverti)	97,00	102,20	102,85	102,87	102,90	102,90	—	—	—
76 % de sucre (= 80 % de sucre interverti)	97,50	102,40	102,87	102,90	102,90	—	—	—	—

(10% de sucre interverti), de moins d'une heure et demie pour une solution de 19% de sucre (20% de sucre interverti) et encore de moins d'une heure pour une solution de 28,5% de sucre (30% de sucre interverti).

Pour les solutions contenant 38%, 47,5% et 57% de sucre (respectivement 40%, 50% et 60% de sucre interverti), le temps d'interversion, pour atteindre ca. 95% de sucre interverti, diminue au-dessous d'une heure ; pour les solutions de 66,5% et de 76% de sucre (respectivement de 70% et de 80% de sucre interverti) la temps diminue continuellement, étant moins d'une demi-heure.

On obtient cent pour cent de sucre interverti : en moins d'une

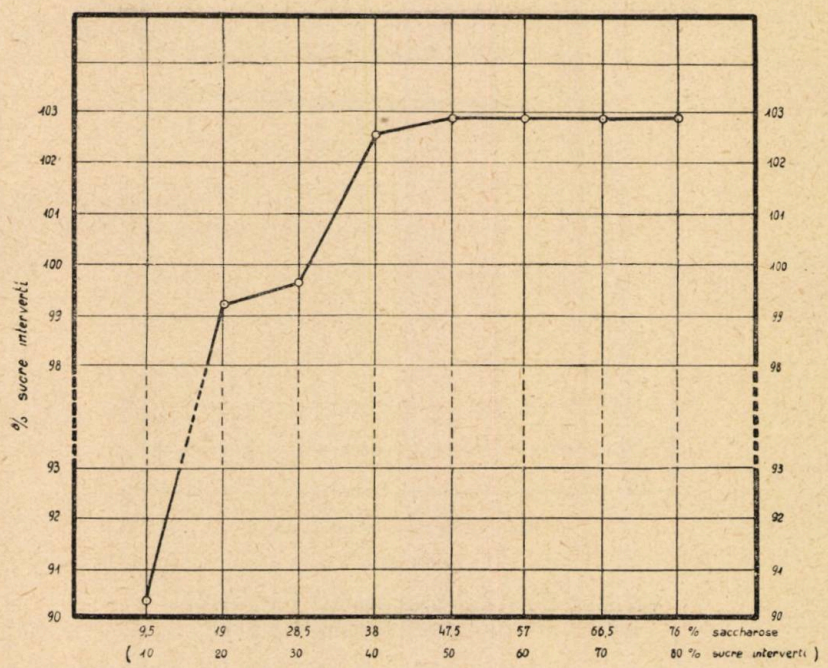


Fig. 1.

INFLUENCE DE LA CONCENTRATION EN SUCRE, DANS L'INTERVERSION

(Variation de la quantité de sucre interverti, dans des solutions de diverses concentrations, après 2 heures d'interversion).

heure pour les solutions contenant 47,5%, 57%, 66,5% et 76% de sucre ; en ca. 1 heure pour la solution de 38% de sucre, en moins de 5 heures pour les solutions de 28,5% et 19% de sucre, et en un temps plus long de 6 heures pour une solution contenant 9,5% de sucre. (Après 6 heures, l'interversion de cette solution n'atteint que 98,10% de sucre interverti).

Par conséquent, l'augmentation de la concentration en sucre de la solution, détermine une croissance de la vitesse d'interversion ; autrement dit, la quantité de sucre interverti, trouvé pour un temps d'in-

terversion donnée, croît avec la concentration en sucre de la solution considérée.

Du graphique de la figure 1, qui représente la variation de la quantité de sucre interverti après 2 heures d'interversion, on peut aussi constater la variation de la quantité de sucre interverti, en fontion de la concentration en sucre des solutions.

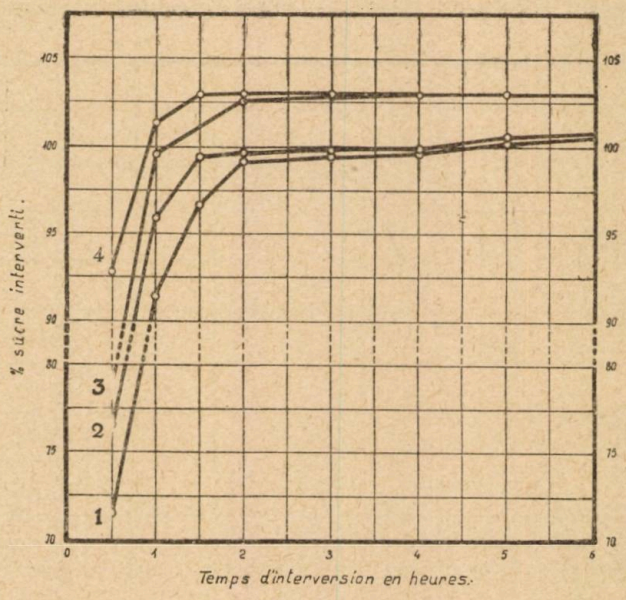


Fig. 2.

VITESSE D'INTERVERSION EN FONCTION DE LA CONCENTRATION EN SUCRE.

Le diagramme 1 se réfère à la solution avec 19% de saccharose.
Le " 2 " " " " " " 28% "
Le " 3 " " " " " " 38% "
Le " 4 " " " " " " 47,5% "

Des mêmes essais, on constate encore, qu'à partir d'une certaine quantité de sucre interverti apparue dans la solution, (quantité qui est en fonction de la concentration en sucre de la solution), ou bien d'une certaine quantité de sucre transformé en sucre interverti, l'interversion va très lentement ; les dernières quantités de sucre s'intervertissent très difficilement. C'est ainsi que, pour les solutions contenant 9,5%, 19%, 28,5%, 38% 47,5%, 57%, 66,5% et 76% de sucre, après la formation dans ces solutions de 97%, respectivement de 99%, 99,45% de ca. 101%, 101,36%, 101,6%, 102,2% et 102,4% de sucre interverti, (voir tableau 1), l'interversion va très lentement, faits qui peu-

vent être constatés aussi des graphiques des figures 1 et 2, où les courbes tendent à devenir parallèles à l'axe d'abscisse.

TABLEAU II

Influence de la température sur l'interversion avec de l'acide phosphorique. (Solution de 47,50 % de sucre, correspondant à 50 % de sucre interverti).

Température d'interversion	Temps d'interversion en heures					
	0,25	0,5	1	1,5	2	2,5
	Pourcentages de sucre interverti					
70°	—	92,72	101,31	102,80	102,85	102,90
75°	—	98 65	101,65	102,85	102,90	102,90
80°	—	100,65	102,25	102,90	102,90	—
85°	—	101,11	102.87	102,90	102,90	—
90°	102,60	102,90	102,90	—	—	—

TABLEAU III

Influence de la température sur l'interversion avec de l'acide phosphorique. (Solution de 47,50 % de sucre, correspondant à 50 % de sucre interverti).

Température d'interversion	Temps d'interversion en minutes					
	5'	10'	15'	20'	25'	
	Pourcentages de sucre interverti					
Température d'ébullition de l'eau (99° C)	98,30	100,90	102,70	102,90	102,90	
Température d'ébullition de la solution à intervertir	99,20	102,00	102,90	102,90	—	

En ce que concerne le temps néccessaire pour l'interversion totale, celui-ci est plus de 6 heures pour la solution de sucre qui correspond

à la concentration de 10% de sucre interverti, d'environ 6 heures pour les solutions qui correspondent aux concentrations de 20% et 30% de sucre interverti, de 3 heures pour les solutions de sucre qui

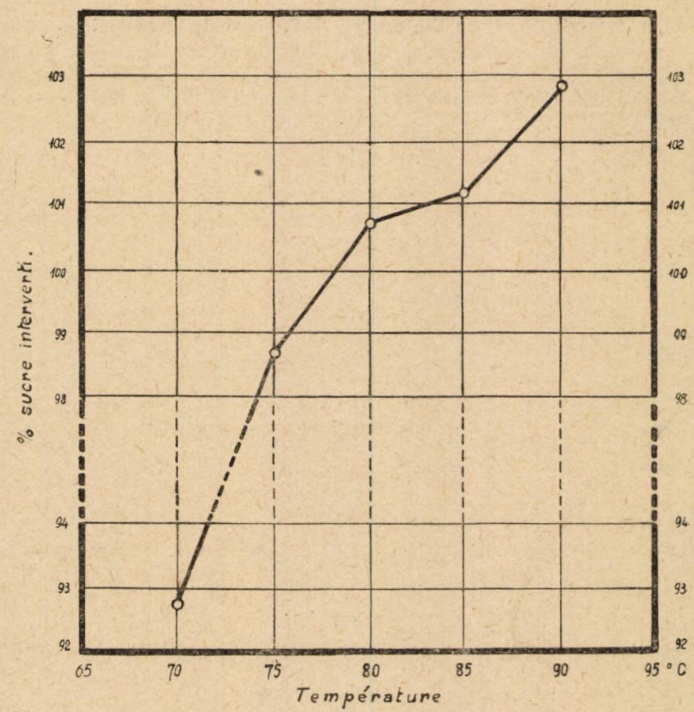


Fig. 3

INFLUENCE DE LA TEMPERATURE, SUR L'INTERVERSION AVEC DE L'ACIDE PHOSPHORIQUE.

Variation de la quantité de sucre interverti, avec la température, après 1/2 heure d'interversion d'une solution à 47,5 % de sucre (= 50 % de sucre interverti).

correspondent à 40% de sucre interverti et de ca. une heure et demie, pour les solutions de sucre qui correspondent à 50%, 60%, 70% et 80% de sucre interverti.

Par conséquent, à partir d'une concentration de 47,5% de sucre (50% sucre interverti), la vitesse d'interversion pour la température de 70° C et la concentration de 1,41 gr. PO_4H_3, est sensiblement la même.

Les essais faits avec des solutions contenant 31,35% de sucre, solutions qui après l'interversion donnent 33% de sucre interverti (de telles solutions étant aussi demandées en thérapeutique) ont conduit,

comme il fallait s'y attendre, à des valeurs intermédiares à celles des solutions contenant 28,5% et 38% de sucre (voir tableau 1).

2). *L'influence de la température.*

Pour constater le rôle de ce facteur, nous avons étudié l'interversion d'une solution qui contient 47,5% de sucre, correspondant donc à 50% de sucre interverti ; la proportion d'acide phosphorique, étant de 1,41 gr. PO_4H_3 pour 100 gr. de sucre.

L'interversion a été conduite à des températures variées, à savoir : 70°, 75°, 80°, 85°, 90°, 99° C (température d'ébullition de l'eau-au-bain-marie-), ainsi qu'à l'ébullition de la solution sucrée.

Les résultats de ces essais sont consignés dans les tableaux 2 et 3

De ces données et du graphique de la figure 3, on constate que la vitesse d'interversion croît avec la température. L'interversion pratiquement totale est atteinte dans une heure et demie pour les températures de 70°, 75° et 80° C ; dans une heure pour la température de 85° C et dans une demi-heure pour la température de 90° C.

A la température de 99° C (température d'ébullition de l'eau) l'interversion va encore plus vite ; c'est-à-dire qu'en 20 minutes tout au plus, l'interversion est presque totale (tableau 3) et à la température d'ébullition de la solution, l'interversion totale s'accomplie en 15 minutes tout au plus (tableau 3).

Il est à remarquer, que pendant le temps nécessaire (20 minutes), pour l'interversion totale à la température d'ébullition de l'eau, la solution de sucre interverti ne se colore pas : mais, quand l'interversion est faite à la température d'ébullition de la solution, celle-ci se colore un peu même après 15 minutes d'ébullition et après 25 minutes la solution devient jaune prononcée.

3). *L'influence de la quantité d'acide phosphorique sur l'interversion du sucre (saccharose).*

Dans ce but, nous avons étudié la manière dont se comporte une solution contenant 47,5% de sucre (50% de sucre interverti), à la température de 70° C, en faisant varier les proportions d'acide phosphorique, à savoir : 0,35%, 0,70%, 1,05%, 1,41%, 1,76% et 2,11% d'acide phosphorique rapporté au sucre. Les résultats de ces essais sont consignés dans le tableau 4.

D'après ces données, on constate que l'augmentation de la quantité d'acide phosphorique, détermine une croissance de la vitesse d'interversion et cela surtout pour les proportions d'acide phosphorique jusqu'à 1,41%. Pour la quantité de 1,41% d'acide phosphorique, la

TABLEAU IV

Influence de la quantité d'acide phosphorique, sur l'interversion.
(Solution de 47,5% de sucre, correspondant à 50% de sucre interverti).

Quantité d'acide phosphorique rapportée au sucre	Temps d'interversion en heurs:							
	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6
	Pourcentages de sucre interverti.							
0,35%	—	81,5	—	90,45	92,45	94,05	94,15	94,25
0,70%	—	96,65	—	101,75	101,95	102,05	102,05	—
1,05%	—	101,0	—	102,0	102,3	102,7	102,75	102,82
1,41%	92,72	101,36	102,85	102,90	102,90	—	—	—
1,76%	95,10	101,70	102,85	102,90	102,90	—	—	—
2,11%	98,65	101,85	102,85	102,90	102,90	—	—	—

vitesse d'interversion est maximum, ce qui concorde avec les essais faits par Hérissey et Fleury [2]; en augmentant la quantité d'acide phosphorique, la vitesse d'interversion est très peu influencée dans les conditions données.

Pour une même quantité d'acide phosphorique, la vitesse d'interversion est influencée, comme nous l'avons montré, par la concentration en sucre de la solution et par la température à laquelle on fait l'interversion. C'est ainsi que pour une solution de 47,5% de sucre, la quantité de 0,70 gr. PO_4H_3, réalise une interversion totale dans un temps plus long que 6 heures, tandis que, pour une solution contenant 66,5% de sucre, le temps pour l'interversion totale est seulement de 4 heures, avec la même quantité d'acide phosphorique.

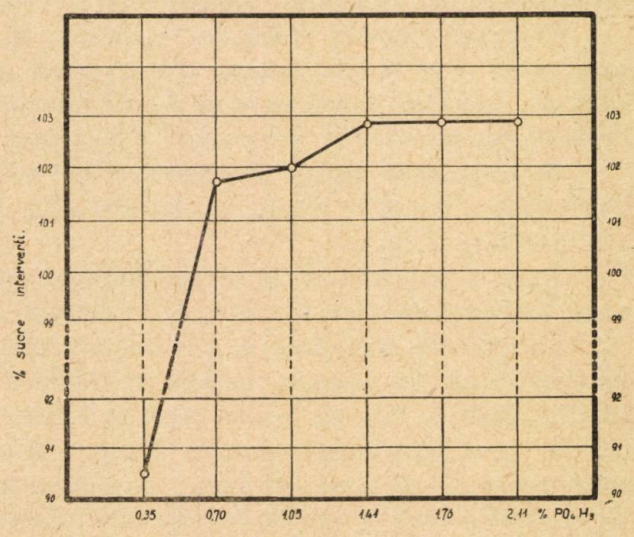


Fig. 4

INFLUENCE DE LA QUANTITE D'ACIDE PHOSPHORIQUE, SUR L'INTERVERSION DU SUCRE, APRES 2 HEURES D'INTERVERSION.

(Solution à 47,5% de sucre, correspondant à 50% de sucre interverti).

Du graphique de la figure 4 on peut constater la croissance du pourcentage du sucre interverti, en fonction de la quantité d'acide phosphorique pendant une durée d'interversion de 2 heures. (Les données de ce diagramme se réfèrent à une solution de 47,5 % de sucre soit 50 % de sucre interverti).

Conclusions.

Des résultats de ces essais, sur l'interversion du sucre avec de l'acide phosphorique, on déduit que :

1). Pour l'obtention des solutions injectables incolores de sucre interverti, il est recomandable de faire l'interversion au bain-marie, dans

2) Loc. cit.

les limites de température comprises entre 70° C. et la température d'ébullition de l'eau.

2). La vitesse d'interversion croît avec la température et avec la concentration en sucre de la solution à intervertir.

Il est avantageux donc de travailler avec des solutions concentrées en sucre, de préférance de 47,5-57% de sucre, concentrations qui correspondent aux solutions contenant 50 et 60% de sucre interverti.

Pour les solutions indiquées ci-dessus, le temps d'interversion totale varie avec la température d'interversion, à savoir : une heure et demie (pour la température de 70° C) jusqu'à 20 minutes quand l'interversion se fait à la température d'ébullition de l'eau.

3). La quantité d'acide phosphorique qui produit une interversion totale dans le temps le plus court, est de 1,40% PO_4H_3, par rapport à la quanttté de sucre.

Dans la technique de la préparation des solutions injectables de sucre interverti, on peut procéder de la manière suivante :

On prépare, tout d'abord, une solution plus concentrée de sucre interverti, soit par exemple un litre de solution à 50% de sucre interverti. Dans ce but, on amène dans un ballon de ca. 1,5 litres, 475 gr. de sucre bien raffiné, on bien 570 gr. de sucre, pour avoir une solution à 60% de sucre interverti ; on dissout le sucre dans 500 cm^3 d'eau distillée et on y ajoute une quantité d'acide phosphorique telle, que pour chaque 47,5 gr. de sucre on ait 0,67 gr. PO_4H_3. (Pour faciliter, on préparera une solution d'acide phosphorique qui contient ca. 26,8 gr. PO_4H_3 pour 100 cm^3 ; 2,5 cm^3 de cette solution correspondent à 0,67 gr. PO_4H_3).

Après avoir ajouté la solution de PO_4H_3, on complète le liquide du ballon à 950 cm^3 avec de l'eau distillée.

(Pour le calcul de la quantité d'eau qu'on doit ajouter pour compléter le liquide à 950 cm^3, on tiendra compte du fait que 1000 gr. de sucre occupe en dissolution ca. 600 cm^3).

Ensuite on chauffe le tout au bain-marie, (le ballon étant muni d'un refrigérant ascendent), un temps qui correspond à la température à laquelle on désire faire l'interversion.

Quand l'interversion est terminée, on refroidit la solution à 20° C et on la neutralise avec une solution normale de *Na OH*.

Pour que la solution de sucre interverti ne se colore pas pendant la stérilisation, – à cause de la caramélisation du sucre interverti, – la neutralisation ne se fera pas jusqu'au phosphate disodique (PO_4HNa_2), mais la solution de sucre interverti devra rester à une acidité correspondant à un $pH = 4,5 - 5$, comme d'ailleurs ont montré aussi les

auteurs cités plus haut. (Quand les ampoules sont confectionnées d'un verre de bonne qualité, on peut neutraliser la solution à une valeur du *pH*, comprise entre 5 et 6).

Dans ce but, on ajoutera à la solution, 2,76 gr. de *Na OH* ou bien 69 cm^3 d'une solution normale de *Na OH*, au lieu de 5,47 gr. *Na OH* qui devrait être ajouter pour neutraliser au phosphate disodique les 6,7 gr. HO_4H_2 qui ont été nécessaires pour l'interversion de 475 gr. de sucre.

En procédant de cette manière, la solution de sucre interverti aura un *pH* de ca. 4, 5.

Pour obtenir des solutions à un *pH* dans les limites de 4,5 - 5, on procédera (dans le cas où on ne dispose pas d'un appareil de mesurer le *pH*) de la façon suivante : on prend, avec la pipette, 25-30 cm^3 de solution intervertie, on y met 2-3 gouttes de metylorange comme indicateur et puis on ajoute, avec une burette, d'une solution de *Na OH n/10* jusqu'à ce que la couleur passe du rouge vers orange-rose. A ce point de neutralisation correspond, d'après la précision de l'appréciation du point du virage, un *pH* de 3,8 - 4,4. A ce moment on continue encore à ajouter, goutte à goutte, la solution de *Na OH*, jusqu'à ce qu'apparaît nettement la couleur jaune. A ce point de virage de l'indicateur, correspond un *pH* de ca. 4,5 - 4,6.

De ce titrage, on peut calculer la quantité de *Na OH* nécessaire, pour amener la solution au *pH* désiré.

Dans ce but, on mesure exactement le volume de la solution restante et par cela on détermine la quantité d'acide phosphorique qui se trouve dans cette solution et qu'on neutralise ensuite, sans ajouter d'indicateur, avec la quantité correspondante de solution normale de *Na OH*, calculé comme plus haut.

Après neutralisation, la solution contenant 50% ou 60% de sucre interverti, est diluée avec de l'eau distillée au volume correspondant à la concentration nécessaire de sucre interverti, (20%, 33% ou 40%), ensuite on filtre la solution soigneusement.

Si c'est nécessaire, on peut ultérieurement ajuster le *pH* de la solution par addition d'une solution d'acide phosphorique ou d'hydroxyde de sodium.

Ainsi préparée, la solution est répartie en ampoules et soumise à la stérilisation.

Laboratoire de Chimie Technologique Anorganique
de l'Ecole Polytechnique de Jassy

(Reçu le 15 Septembre 1948).

LA CONDENSATION DES ISOTHIOCYANATES AVEC LES OXIMES. L'INVERSION OPTIQUE D'UNE MENTHONOXIME GAUCHE SOUS L'ACTION DE L'ISOTHIOCYANATE DE BENZOYLE

par

C. V. GHEORGHIU et C. BUDEANU

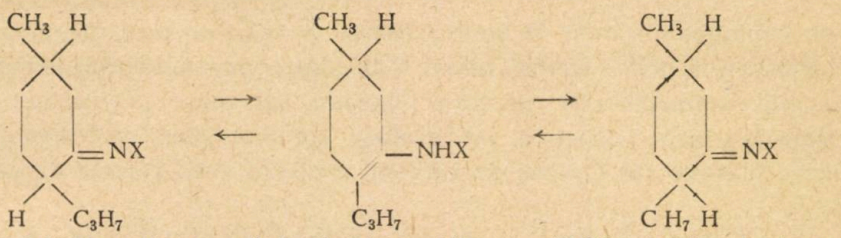
Summary. — The isothiocyanates react with the oxímes and produce non isolable additive compounds that are decomposed or support autoxydation.

Benzoyle isothiacyanate react with a laevorotatory oxíme of an inverted D-menthone and give an isolable dextrorotatory additive compound (N-oxy-D-menthone-(3)-yl-(3)-benzoylthiourea).

Dans les travaux précédents l'un de nous [1]) a montré que les isothiocyanates réagissent avec les oximes en donnant des produits d'addition instables, qui se décomposent, ou subissent une autoxydation.

Dans le cas de la L-menthonoxime nous avons reussi à isoler un produit d'addition avec l'isothiocyanate de benzoyle. Pour exliquer ce fait, nous avons pensé à une isomérisation de l'oxime, sous l'action de l'isothiocyanate, en un dérivé de l'hydroxylamine, qui réagirait ensuite avec l'isothiocyanate pour donner une thiourée asymétrique. En effet, E. Beckmann [2]) depuis longtemps a montré que les dérivés alcoyliques de l'hydroxylamine réagissent facilement avec les isothiocyanates pour donner des produits d'addition (N-oxy-aryle ou alcoyle-thiourées bisubstituées).

En ce qui concerne l'isomérisation de la menthonoxime, elle peut être une tautomérisation (prototropie), liée avec une inversion optique. T. Hiraidzumi [3]) a montré que l'inversion optique des dérivés de l'isomenthone a lieu avec la formation intermédiaire d'un produit tautomérique hypothétique, produit supposé d'ailleurs aussi par E. Beckmann [4]) 41 ans avant :

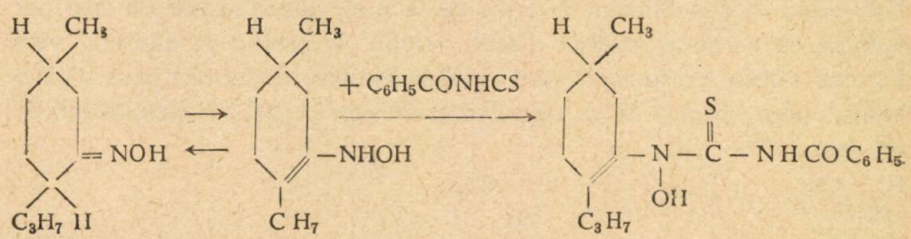


I. Dérivé de la menthone, X = OH, NH NHCONH$_2$ II. Produit intermédiare III. Dérivé de l'isomenthone

En 1938 H. Schmidt [5]) a réussi à isoler un seul acétate de menthonénolate ($[\alpha]_D = +65^0$), en chauffant les deux menthones actives (L et D) avec l'anhydride acétique. Par conséquent il est possible une tautomérisation de la L-menthonoxime en D-menthène-(3)-yl-(3)-hydroxylamine, qui ensuite réagirait avec l'isothiocyanate de benzoyle, la réaction étant liée avec une inversion optique, comme dans le cas de l'acétate de la L-menthone.

La menthone employée par nous, fournie par la maison Rhône-Poulenc il y a 15 ans environ, est une D-menthone invertie [Beckmann [6])] ayant les constantes: Eb. 209^0, $[\alpha]_D^{20} = +16{,}5^0$, l'oxime est gauche $[\alpha]_D^{20} = -16{,}7^0$ et le produit d'addition droit ($[\alpha]_D^{20} = +90^0$).

Le mécanisme de la réaction serait:



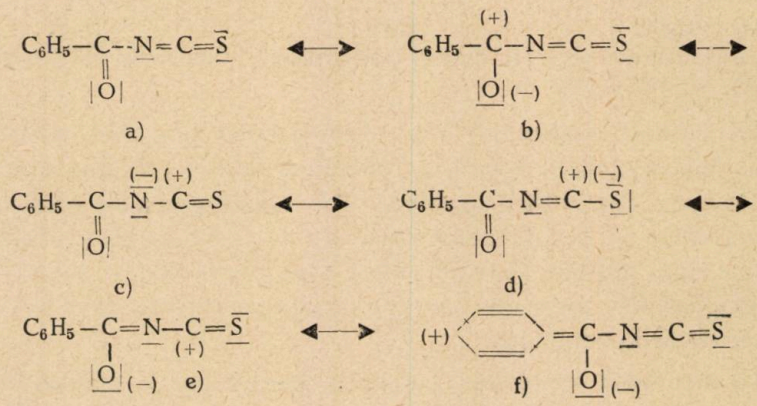
IV. IVa. V. N-oxy-D-menthène-(3)-yl-(3)-benzoylthiourée.

L'inversion optique de la L-menthonoxime est due, sans doute, à la présence de l'isothiocyanate de benzoyle. En effet, en réduisant la menthonoxime nous avons obtenu une menthylamine gauche ($[\alpha]_D^{20} = -15{,}9^0$), qui avec l'isothiocyanate de benzoyle donne une thiourée également gauche ($[\alpha]_D^{20} = -55{,}08^0$).

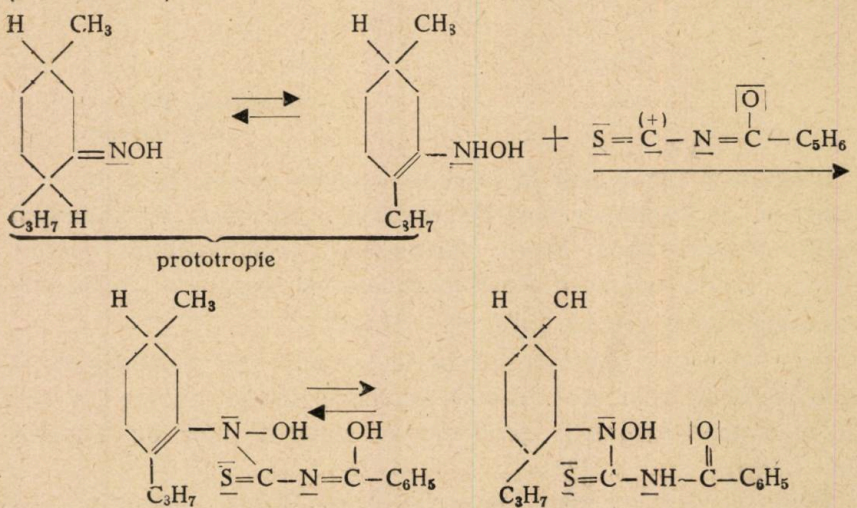
Pour expliquer pourquoi dans la réaction des isothiocyanates avec la menthonoxime seul celui de benzoyle donne un produit isolable, nous envisageons le problème au point de vue de la mésomérie.

Pour cet isothiocyanate, qui contient une double liaison C = O

en conjuguaison avec la double liaison N = C, on peut imaginer une série des formules limites, parmi lesquelles nous considérons la formule *e*, qui représente une structure bipolaire (structure „zwitterionique"), dont la charge négative est localisée sur l'oxygène carbonylique et celle positive sur l'atome de carbone enchaîné avec l'atome de soufre.



Cet ion bipolaire avec les charges éloignées induit la prototropie de l'oxime en dérivé β-hydroxylaminique, qui se traduit par la migration d'un proton de carbone 4 de l'oxime à l'atome d'azote. Ensuite ce proton est capté par un doublet libre d'électrons de l'oxygène carbonylique et concomitent le reste de la molécule d'oxime est fixé par l'atome de carbone chargé positif. Enfin le proton se déplace vers l'atome voisin (prototropie) qui possède encore un doublet libre d'électrons, pour donner la *N-oxy-D-menthène-(3)-yl (3)-benzoylthiourée* (P. fus. 147°).



N-oxy-D-menthène-(3)-yl (3)-benzoythiourée (P. fus. 147°)

Partie expérimentale.

L'action de l'isothiocyanate de benzoyle sur la L-menthonoxime.

La L-menthonoxime fut obtenue suivant les indications de E. Beckmann [4]) en partant d'une menthone, fournie par la maison Rhône-Poulenc, Paris, ayant les constantes: Eb. *209°*, $n_D^{20} = 1{,}4504$, $[\alpha]_D^{20} = + 16{,}5^0$. L'oxime est huileuse, $[\alpha]_D^{20} = - 16{,}7^0$, $n_D^{20} = 1{,}480$. L'isothiocyanate de benzoyle fut obtenu suivant les indications de A. E. Dixon et John Taylor [7]).

Dans une fiole erlenmeyer on introduit 1,63 g d'isothiocyanate de benzoyle dissous dans 5 cmc de benzène, et 1,69 g de L-menthonoxime, dissous aussi dans 5 cmc du même dissolvant. Après quelque temps, par l'évaporation partielle du benzène, il se sépare un produit cristallin, à côté de soufre. Par cristallisation fractionnée dans l'alcool, on obtient 0,9 g de *N-oxy-D-menthène-(3)-yl-(3)-benzoylthiourée* (V), fusible à 147^0. Ce produit est droit ($[\alpha]_D^{20} = 90^0$).

Analyses. - I. Subst. 0,023099 g; CO_2, 0,05562; H_2O 0,01566 II. Subst. 0,02436 gr; 1,88 cc N (25°, 750 mm; III. Subst. 0,09842 g; 0 06892 g SO_4 Ba.

Trouvé: C°/₀ 65, 70; H°/₀ 7,59; N°/₀ 8,73; S°/₀ 9,60. Calculé pour $C_{18}H_{24}O_2N_2S$: C°/₀ 65, 01; H°/₀ 7,28; N°/₀ 8,43; S°/₀ 9,65;

Laboratoire de Chimie organique de l'Université de Jassy

(Reçu la 15 Septembre 1948).

Travaux cités

1. C. V. Gheorghiu, Ann. sci. Univ. Jassy, **16**, 389 (1929); **26**, I, 575 (1940); **27**, I, 536 (1941); An. Obregia et C. V. Gheorghiu, J. pr. Chem. N. F. **128**, 239 (1930).
2. E. Beckmann, J. pr. Chem. **56**, 88 (1897).
3. T. Hiraidzumi, C. **1931**, I, 1277.
4. E. Beckmann, A. **250**, 328 (1889).
5. H. Schmidt, Ber. Schimmel Co äther. Öle, pg 130, 1938; C. **1939**, I, 267.
6. E. Beckmann, B **42**, 846 (1909).
7. E. Dixon et John Taylor, Soc. **93**, 683 (1908); C. **1908**, II, 234.

MÉTHODE PRATIQUE POUR LE CALCUL DE L'EAU ÉVAPORÉE DANS LA STATION D'ÉVAPORATION DE L'INDUSTRIE DU SUCRE

par
T. SĂVEANU

Le contrôle du bon fonctionnement et de la capacité de la station d'évaporation dans l'industrie du sucre se fait par le calcul de la quantité, en $^0/_0$, ou en poids, de l'eau qui s'évapore, eau rapportée au jus léger.

Il faut déterminer d'une part la quantité totale de l'eau évaporée par la totalité des corps qui composent la station d'évaporation et d'autre part la quantité de l'eau évaporée par chaque corps.

La formule qui donne la quantité d'eau évaporée (A), en $^0/_0$, rapportée au jus soumis à l'évaporation, quand le jus passe du brix ox au brix Bx est :

$$A = 100\,\frac{Bx - bx}{Bx}\,.$$

Il faut donc déterminer le brix avant et après l'évaporation. Dans le cas d'une évaporation avec plusieurs corps on prend des probes du jus léger et des jus à la sortie de chaque corps et on détermine leur brix.

Pendant la détermination du brix surviennent les erreurs systématiques suivantes :

— Le brix du jus léger est variable, d'où résulte que les probes qu'on prend dans le même temps de tous les corps ne sont pas comparables ; mais la moyenne des plusieurs déterminations peut être considérée très rapprochée de la valeur réelle.

— On détermine le brix apparent, qui est plus grand que le brix réel. La différence entre le brix apparent et le brix réel ne peut être formulée par une relation mathématique. Les coefficients établis pour passer du brix apparent au brix réel doivent être vérifiés assez fréquement, parce qu'ils changent avec la composition du nonsucre de la betterave.

Enfin les probes sont prises à une température élevée (de 120° à 70° C) et dans ces conditions une quantité d'eau s'évapore, quantité qui est d'autant plus grande que la température est plus élevée. Pour éviter cette évaporation on recomande que les probes soient mises dans des vas clôs, jusqu'à leur refroidissement.

Notont :

A_t = l'eau totale évaporée dans l'évaporation. A_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_n = l'eau évaporée dans les corps respectifs, bx = le brix du jus léger,

Bx_1, Bx_2, Bx_3, Bx_4, ..., Bx_n = le brix du jus à la sortie du corps *1,2,...n.*

En ce cas l'eau évaporée, en %, rapportée au jus léger, par chaque corps,est donnée par :

$$A_1 = 100\frac{Bx_1 - bx}{Bx_1}$$

$$A_2 = 100\frac{Bx_2 - bx}{Bx_2} - \frac{Bx_1 - bx}{Bx_1}$$

$$A_3 = 100\frac{Bx_3 - bx}{Bx_3} - \frac{Bx_2 - bx}{Bx_2}$$

. . . . . .

$$A_n = 100\frac{Bx_n - bx}{Bx_n} - \frac{Bx_{n-1} - bx}{Bx_{n-1}}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = 100\frac{Bx_n - bx}{Bx_n}.$$

Pour simplifier les opérations nous proposons que le calcul se conduit comme dans l'exemple numérique de ci-près. Considérons une évaporation à 4 corps :

	C.1	C.2	C.3	C.4
Brix du jus léger = *15,0*				
a) Brix du jus de chaque corps	*22,0*	*35,0*	*49,5*	*60,0*
b) Brix du jus léger	*15,0*	*15 0*	*15,0*	*15,0*
c) Différence $b - a$	*7,0*	*20,0*	*34,5*	*45,0*
d) $100\frac{Bx - bx}{Bx}$	$100\frac{7,0}{22,0}$	$100\frac{20.0}{35,0}$	$100\frac{34.5}{49,5}$	$100\frac{45,0}{60,0}$

e) Eau totale évaporée jusqu'au corps considéré	*31,4*	*57,1*	*69,7*	*75,0*$=A_t$
f) Eau totale évaporée jusqu'au corps antérieur	—	*31,4*	*57,1*	*69,7*
g) Eau évaporée par chaque corps $= e - f$	*31,4*	*25,7*	*12,6*	*5,3*
h) $A_t = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 =$ $= 75,0$	*31,4*	*25,7*	*12,6*	*5,3*

On peut facilement contrôler s'il n'a pas survenu une erreur car $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ doit donner A_t.

Laboratoire des Industries agricoles et alimentaires de l'Ecole Polytechnique de Jassy

(Reçu le 15 Octobre 1948).

Travaux cités

H. Claassen, - *Die Zuckerfabrikation*, 7 Aufl., (1943), Schallehn et Wollbrück, Magdeburg, pag. 340.

K. Schiebl, - *Wärmewirtschaft in der Zuckerindustrie* (1926), T. Steinkopf, Dresden und Leipzig, pag. 19-23.

ELEMENTS DU MAGNETISME TERRESTRE À JASSY EN 1948

par

ŞT. PROCOPIU et E. IONESCU

Les mesures des éléments magnétiques, D, H et I, à Jassy, commencées en 1931, ont été continuées en 1948. L'emplacement, où on a fait les mesures, est au Jardin Horticole, Copou, de coordonnées.

Jassy, Long. E. Greenwich, $27^0\ 32'$; Lat. N, $47^0\ 11'$ et à 1,5 km, loin de la ligne de tramway.

Les mesures de déclinaison magnétique D et celles de composante horizontale H ont été effectuées avec un théodolite magnétique de la Maison Chasselon de Paris, par St. Procopiu. Les mesures d'inclinaison I ont été faites avec une Boussole d'inclinaison, toujours de la Maison Chasselon, par E. Ionescu.

Dans les tableaux suivants sont portées les valeurs D_1 et D_2 de la declinaison, obtenues avec les deux bareaux magnétiques de l'appareil, ainsi que la valeur moyenne D; les valeurs H_1 et H_2 de la composante horizontale avec les deux bareaux, et la valeur moyenne H; les valeurs I_1 et I_2 de l'inclinaison avec les deux aiguilles magnétiques de la boussole, et la moyenne D. Dans le cas de l'inclinaison. les valeurs I_1 et I_2, portées dans le tableau ont d'abord subi les corrections indiquées par le constructeur : $+5{,}8'$ pour l'aiguille No. 1 et $-0{,}9$, pour l'aiguille No. 2.

Les mesures ont été faites le 19, 20, 21 et 22 Juillet 1948. L'heure des mesures était de 9^h à $10^h\ 30$ pour la déclinaison, de $10^h\ 30^m$ à 12^h pour la composante horizontale ; et de 9^h à $11^h\ 30^m$ pour l'inclinaison, les heures locales (temps Greenw. — 2 heures).

Déclinaison D.

Date	D_1	D_2	D moyen
19 Juillet 1948	$2^0\ 2'$	$2^0\ 0$	$2^0\ 1'$ Est
20 „ „	$2^0\ 6{,}7'$	$2^0\ 3{,}5$	$2^0\ 5{,}1$ „
21 „ „	$2^0\ 3{,}2$	$2^0\ 1{,}3$	$2^0\ 2{,}2$ „
22 „ „	$2^0\ 7{,}5$	$2^0\ 5{,}7$	$2^0\ 6{,}6$ „

La moyenne de ces déterminations est $D = 2^0\,3{,}7'$ Est. Pour le 1 Juillet 1948 on aura

$$D = 2^0\,3{,}3' \text{ Est}$$

et la variation annuelle, 1 Juillet 1947-1 Juillet 1948 sera

$$dD = + 8'.$$

Composante horizontale H.

Date	H_1	H_2	H moyen
19 Juillet 1948	0,21260	0,21323	0,21291
20 „ „	0,21260	0,21305	0,21282
21 „ „	. . . . .	. . . . .	. . . . .
22 „ „	0,21258	0,21321	0,21290

La valeur moyenne des déterminations du 19,20 et 22 Juillet 1948 est

$$H = 0{,}21288.$$

On a donc pour le 1 Juillet 1948, $H = 0{,}21288$ et la variation annuelle, 1947-1948, sera

$$dH = - 0{,}00009 = - 9 \text{ gammas.}$$

On constate que la valeur H_1 est systématiquement plus faible d'environ 40 gammas que la valeur H_2. Il faudrait étalonner de nouveau l'appareil pour corriger les constantes C_1 et C_2 qui entrent dans le calcul de H, pour les deux bareaux. La différence entre les deux valeurs de H ne peut pas provenir de la différence de temps, d'une heure, entre les deux mesures.

Inclinaison magnétique I.

Date	I_1	I_2	I moyen
19 Juillet 1948	63° 22′	63° 19,8	63° 21′ Nord
20 „ „	63° 27,1	63° 12,6	63° 19,9 „
21 „ „	63° 26,5	63° 23,1	63° 24,8 „
22 „ „	63° 24,3	63° 17,2	63° 20,8 „

La moyenne pour les déterminations du 19,20,21 et 22 Juillet est $I = 63^0\,21{,}6'$ mais si l'on observe que la détermination du 21 parait être celle d'un jour d'anomalie, la moyenne pour les trois jours 19,20, et 22 Juillet 1948 sera

$$I = 63^0\,20{,}6' \text{ Nord}$$

et la variation séculaire annuelle 1 Juillet 1947-1 Juillet 1948, sera

$$dI = + 2',7.$$

Le tableau suivant résume nos mesures :

Jassy, 1 Juillet 1948; 1 Juillet 1947-1 Juillet 1948

$D = 2^0 3,3'$	$dD = + 8'$
$H = 0,21288$	$dH = - 0,00009$
$I = 63^0 20,6'$ Nord	$dI = + 2,7'.$

Laboratoire d'Électricité,
Université de Jassy

(Reçu le 15 Octobre 1948).

MÉRNÖKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET
MŰEGYETEM

SUR UNE METHODE SIMPLE DE REGLAGE D'UN EQUATORIAL

par

VICTOR L. NADOLSCHI

La méthode que nous présentons ci-dessous et qui consiste dans une combinaison de la méthode classique de Grubb et de celle proposée par M. André Hamon a les avantages suivantes sur les procédés généralement employés :

1. Elle ne fait pas appel à une pose photographique,

2. Ne nécessite pas de calcul des positions apparentes des étoiles et 3. Ne nécessite pas l'usage d'une pendule sidérale.

La méthode consiste en opérations suivantes qui se justifient aisément par la théorie générale de l'équatorial :

a) On place l'axe horaire de l'instrument approximativement dans la méridien en nous servant d'une méridienne provisoire, déterminée, par exemple, à l'aide d'un théodolite (méthode des hauteurs égales) placé sur le socle de l'équatorial. On donne ensuite à l'axe horaire une inclinaison approximative suivant l'axe du mouvement diurne, à l'aide d'un niveau d'angle.

b) On ajuste le chercheur de la lunette sur un objet terrestre éloigné ou sur une belle étoile.

c) On pointe la lunette sur une étoile équatoriale près du méridien, dans les deux positions de l'instrument, notant l'heure et lisant le cercle horaire. Si la différence des lectures de cercle n'est pas égale à celle des heures, à douze heures près, on règle la perpendicularité de l'axe de la lunette à l'axe de déclinaison jusqu'à l'établissement de cette égalité.

d) On répète l'opération (c) sur une étoile circumpolaire pour corriger la perpendicularité de l'axe de déclinaison à l'axe horaire.

Observations : 1. Pour la lecture des heures on peut se servir d'une montre ordinaire ayant un cadran des secondes ; si l'intervalle qui sépare les observations dans les deux positions de l'instrument est

de 10^m temps moyen (en pratique cet intervalle est beaucoup plus court) la différence entre le temps sidéral et moyen est de $1^s,643$ qui peut être négligée. On peut cependant toujours convertir l'intervalle considéré en temps sidéral, en éliminant ainsi cette cause d'erreur. 2. Si l'équatorial est muni d'un mécanisme passable de mouvement horaire on peut effectuer les opérations (c) et (d) de la manière suivante : en quadrisectant l'image de l'étoile par le croisillon du réticule on met en fonction le mécanisme. On note l'heure et on commence à compter les battements de montre en regardant l'index du cercle horaire. Quand celui-ci arrive vis-à-vis d'une division du cercle on note le nombre correspondant des battements. Après l'avoir transformé en secondes on l'ajoute à la lecture antérieure de montre, ce que nous donne l'heure exacte de l'observation.

e) On prend une belle étoile zénithale, près du méridien, dans les deux positions de l'instrument, en lisant, chaque fois, le cercle de déclinaison. On met l'index à la moyenne des deux lectures.

f) On dispose le réticule de la lunette de manière qu'une étoile équatorielle, en passant par le champ en mouvement diurne, reste en contact avec l'un des fils. Nous appellerons *A* ce fil et *B* le fil perpendiculaire sur *A*.

g) On pointe alors la lunette sur une étoile équatorielle près du méridien Sud, en l'emmenant sur le croisillon des *A* et *B*. On abandonne l'instrument immobile, pendant 10^m, puis, agissant sur le mouvement horaire, on ramène l'étoile sur le fil *B*. Si l'image de l'étoile s'est déplacé vers l'extrémité Sud du fil *B*, il faut pivoter le socle de l'instrument, en azimut, dans le sens des aiguilles d'une montre, et vice versa.

h) On pointe une étoile équatoriale près du premier vertical Est. On abandonne l'instrument immobile pendant 10^m, puis, en le mouvant en ascension droite, on ramène l'image de l'étoile sur *B*. Si l'on constate un déplacement de l'image vers l'extrémité Sud du *B*, il faut éloigner l'axe horaire de la verticale et vice versa.

1. On répète les opérations (g) et (h) en abandonnant l'équatorial fixe pendant 20^m. S'il fût nécessaire une nouvelle correction en azimut et inclinaison, alors :

j) on répète encore une fois les mêmes opérations, en laissant l'instrument fixe de 30^m à 40^m.

k) On place l'axe de déclinaison dans la position horizontale à l'aide d'un niveau sensible (la lunette étant dans la première position). On met l'index du cercle horaire à la division 0 du cercle.

Nous nous sommes servi de la méthode décrite pour le réglage

des deux équatoriaux de l'Observatoire Astronomique de Jassy. Un équatorial réglé de cette manière permet une identification immédiate d'un objet céleste dont on connaît la position apparente. Il permet encore de suivre une étoile pendant plus de quatre heures, sans qu'il soit possible de constater le moindre déplacement en déclinaison de l'image.

Observatoire Astronomique de l'Université de Jassy

(Reçu la 1 Juillet 1948).

Travaux cités

1. G. Bigourdan – *Instructions sur l'usage de l'équatorial.* Ann. de l'Obs. de Paris. Observations de 1885.
2. B. Baillaud – *Cours d'Astronomie* t. *I*; Paris, 1893.
3. A. Hamon – *Méthode visuelle de réglage.* Bull. Soc. Astr. Fr.; Août, 1938.

BUDAPESTI MŰSZAKI KÖZPONTI 1848 KÖNYVTÁR

L'HISTOIRE NATURELLE DANS L'OEUVRE „DANUBIUS" DE MARSIL [1])

par

VICTOR GOMOIU et VIORICA GOMOIU (Mme)

Nous ne sommes pas en mesure d'établir laquelle des hypothèses biologiques émises sur la base des débris fossiles (grands reptiles sauriens, mammouth, élephant, etc.) découverts dans nos régions, est la plus véridique ; c'est à dire, nous ne sommes pas à même de préciser si ces êtres ont vécu dans ces parages de manière permanente ou n'y ont accédé que fortuitement, s'ils ont dû se retirer plus tard, ou périr tous à la fois ou peu à peu, à cause de l'accroissement des groupements humains qui leurs ont fait la chasse, ou par suite d'une épizootie qui les ont décimés, ou plus vraisemblablement, en raison du changement du climat et de tout le mileu, devenus pour eux défavorables.

La vérité semble résider en cela, que, depuis les temps où les glaciers couvraient le sol nordique – jusqu'à la moitié de l'Europe – et jusqu'à ce jour, la surface de notre territoire a subi une série de changements, par suite de l'asséchement des eaux et la destruction des forêts (–par desséchement, incendie, ou défrichement–) qui ont déterminé de profondes modifications du climat. C'est à cause de ces perturbations du milieu, que toute une faune a déserté nos régions pour d'autres plus propices, cependant que d'autres variétés d'animaux et de plantes ont péri ou ont dégénéré jusqu'au stade où nous les rencontrons encore aujourd'hui. Nous ne savons pas de même, si les eaux arrosant le globe ont diminué dans leur ensemble, mais il est certain que nombre de sources, de rivières et de lacs de notre territoire ont tari, et de ce fait l'Histoire Naturelle de nos régions a souffert une série de changements, qui loin d'être déconsidérés, nous imposent de méditer à leur sujet.

---

1) Communication faite au Groupe Roumain pour l'Histoire des Sciences, dans la séance du 15 Février 1948.

Ainsi par exemple, la figuration de l'aurochs dans les armoiries de la Moldavie indique qu'on le rencontrait fréquemment jadis, tandis qu'aujourd'hui on ne trouve plus trace de son existence ; de même l'abeille figure dans l'écu du district de Mehedinţi, réputé autrefois pour grand nombre de ruches et les tonnes de miel qu'on y recoltait, alors qu'aujourd'hui cette région n'en produit plus que des quantités réduites : dans l'écu du district de Vlaşca persiste encore l'ornementation de trois chênes, lesquels témoignent de l'immensité des fôrets qui couvraient naguère cette région, mais combien en compte-t-on aujourd'hui ? La fougère a dégénéré pour ne plus revêtir que l'aspect de deux feuilles que l'on rencontre encore de ci, de là : l'orme a disparu à peu près complètement depuis quelques années, à cause d'une maladie qui a sévi dans notre pays et qui semble n'avoir pas été identifiée ; le cornouiller, le cormier, et d'autres essences, sont devenues uns rareté : et l'on pourrait citer bien d'autres exemples. Cependant, si nous parvenons à nous bien rendre compte ces modifications survenues de notre temps, leur profondeur ne se laisse apprécier qu'au regard du passé.

Ainsi, dans la description du voyage qu'il a entrepris en Scythie mineure (Dobrodja) entre les années 450-420 av. J. Chr., l'historien Hérodote dit entr'autres qu'il n'a pas eu le courage de traverser le Danube pour aborder chez les Gètes, à cause des abeilles qui y pullulaient et qui constituaient un vrai péril pour la sécurité du voyageur. Quant à nous, nous savons fort bien, que depuis très longtemps les colonies d'abeilles ont vu leur nombre décroître jusqu'à leur complète disparition ; elles n'ont plus subsisté en abondance que dans le district de Mehedinţi où croît le figuier, le châtaignier, l'amandier, mais dans les derniers temps elles y sont également devenues rares.

Plus tard, parcourant ces parages (entre les années 85-90) comme médecin des troupes romaines, le vulnéraire Dioscoride a consigné les noms d'un grand nombre de plantes médicinales, dont certaines subsistent avec les mêmes noms et applications, alors qu'on ne parvient que très difficilement à identifier les autres.

Depuis lors toutefois, durant plus de mille ans, nous ne recueillons que fort peu d'informations de nature à projeter quelque lumière sur la passé ; quant à celles-ci, elles sont assez vagues et en somme, isolées.

C'est à peine si en 1692, nous trouvons quelques données intéressantes dans le livre V du missionnaire Ph. Avril (imprimé à Paris, au cours de la même année, sous le titre „Voyage en divers Etats d'Europe" etc.) lequel y a consigné maintes remarques ayant trait à la Physique, à la Géographie, à l'Hydrographie et à l'Histoire.

Plus près de nous cependant, ont paru une série de publications qui nous fournissent certaines informations – telles que „Storia delle moderne rivoluzioni, etc.", de 1718, ayant pour auteur Antonio Maria del Chiaro, puis le livre précieux de Michael Schendus, chevalier de Vanderbech, institulé „Historico-physico-topographica Valachiae Austriacae Cis-Alutanae subterraneae descriptione", qui a paru en 1720 à Albae Carolinae, et qui a été imprimé en même temps que l'édition II de „Auraria Romana-Dacica" de Samuel Köleseri. Or, tous ces ouvrages font l'office de véritables fenêtres à travers lesquelles nous pouvons jeter un regard sur le passé.

C'est pourquoi nous avons jugé utile de propager la teneur de l'admirable ouvrage „Danubius Panonico-Mysicus" du commis Aloysius Ferdinand Marsil[1]) qui – exceptant les travaux d'Aldrovandi et de Gesnerus auxquels il se réfère souvant, – semble avoir été le premier à traiter cette matière et demeura longtemps unique en son genre.

L'oeuvre de Marsil comprend six volumes, entièrement reliés en parchemin, et comptant chacun de 83 à 105 feuillets de papier épais, grand format 57/42; elle fut imprimée en latin en l'année 1726, dans les maisons d'édition P. Gosse, M. Alberto, P. de Hondt de La Haye et de Herman Uytwerr et François Changuion d'Amsterdam; le volume I porte même la signature autographe du dernier des éditeurs.

Malgré son renom, l'oeuvre n'a pu être diffusée pour la raison qu'on n'avait souscrit et édité que 181 exemplaires, en sorte qu'elle est restée inconnue à la grande masse des lecteurs et des bibliophiles; l'exemplaire que nous possédons, numeroté 96, est l'un des quatre souscrits initialement par la librairie Sarrat de Berlin. L'auteur lui même d'ailleurs, membre des Sociétés royales de Paris, Londres et Montpellier, dit dans sa „Praefatio Universalis", qu'il a attendu vingt années avant que son ouvrage ait vu la lumière du jour.

Le premier volume contient tout une série d'observations géographiques, astronomiques, hydrographiques, historiques et physiques, étant agrémenté d'un grand nombre de planches et de gravures, en sorte qu'on peut le considérer plutôt comme un album.

---

1) Luigi Ferdinando Marsigli, nacquit le 10 Juillet 1658 et mourut le 1 Novembre 1730. Il fût un historien érudit et savant naturaliste, mais tout aussi grand aventurier. Il écrit en plus une „Histoire Physique de la Mer" imprimée en 1711 à Venise et rééditée en 1725 à Amsterdam; ainsi qu'une oeuvre posthume „L'état militaire de l'Empire Otomane", imprimé en 1732 à Haye (M. Romanescu-Cantemir, Montesquieu şi Marsigli, Bucureşti, 1944).

La première page, qui double la couverture, est une gravure représentant „Danubius" couché, le bras gauche appuyé sur un pot d'où jaillit le Danube. Cette gravure a été probablement copiée d'après une monnaie trajane, dont nous nous sommes inspirés à notre tour quand nous l'avons reproduite sur la médaille du Congrès International d'Histoire de la Médecine.

Pour le reste, le volume I contient 18 planches retraçant le cours du Danube depuis ses sources jusques en regard de Giurgiu et parmi celles-ci, ce sont les dernières cartes qui nous intéressent particulièrement (XIII-XVIII). Dans ces cartes se trouvent inscrites certaines dénominations qui selon nous seraient de date plus récente, telles par exemple : le rocher „Babagaia", l'île „Banul", et quelques autres. En outre, sur l'île „Banul", (près de Turnu-Severin) sont figurés certains ouvrages de défense entourés de murs fortifiés, quant à l'île d'Adakaleh, elle est seulement représentée sans être nommée.

Le volume II a trait aux vestiges romains des rives du Danube et cite entr'autres l'inscription suivante de Sarmizegetusa : „Divo. Vero, Parth. Max. Fratri Imp. Caesaris M. Aurelii Antoni Aug. Armeniaei Medici Germ. Parthie. Max Tribun. Potestatis XXVI Imp. V. P. P. Cos III Procos. Colonia Ulpia Traiana Aug. Dac. Sarmiza Egethusa".

Le volume III, traite des minéraux et des métaux que l'on trouve dans le lit ou sur les rivages du Danube, et mentionne à ce sujet l'existence du cristal et d'un grand nombre de pierres précieuses, telles que la grenat, la turquoise, l'hyacinthe, l'opale, ou quasi précieuses, comme l'agate, l'amiante, le jaspe, le péridot, le lapis-lazuli, l'antimoine, le gypse, le talc, etc. il y mentionne également l'existence des métaux parfaits (or, argent) et celle des métaux imparfaits (cuivre, fer, mercure, etc.).

Il importe toutefois d'observer que les indications fournies se rapportent surtout au Banat, à la Transylvanie et au cours supérieur du Danube, alors que pour la Valachie, il n'y a guère que les localités „Baja di Rama" (de Mehedinți) et Okna (de Vâlcea) qui soient indiquées.

Le volume IV traite des poissons qui rivent dans les eaux du Danube et dans les lacs avoisinants. Le chapitre I, commence avec la lamproie (Lampetra fluviatilis) et l'anguille (Anguilla), voulant montrer par cela qu'elles abondaient à l'époque, ces expèces étant aujourd'hui en voie de complète disparition. Mais ce qui ne laisse par d'être intéressant c'est l'aveu qu'il fait qu'il ne saurait déterminer exactement l'époque de reproduction de la lamproie. Pour ce qui est de l'anguille, il dit qu'on le trouve même dans les prairies où paissent les bestiaux, alors que d'autres auteurs en contestent l'existence ;

quant en ce qui concerne sa reproduction, il doit avouer que ses observations ne lui ont fourni aucun indice à ce sujet. Cette remarque est des plus intéressantes, si l'on tient compte que l'énigme de la reproduction des anguilles n'a été dévoilée que récemment, lorsqu'on a découvert qu'elle a lieu sur les côtes de l'Amérique et que tous les spécimens qu'on rencontre dans nos eaux était des émigrés. Il n'en est pas moins vrai qu'elles abondaient, il y a soixante ans de cela, dans les étangs du sud de Mehedinţi, et qu'elles constituaient la nourriture des pauvres gens, alors qu'aujourd'hui c'est à peine si l'on s'en souvient.

Il passe ensuite à la description du barbeau (Cobitis aculeata), du silure (Silurus), de la tanche (Nasus), du gardon, etc. ; décrit une série de variétés de carpes (Cyprinus I. II. III), en y adjoignant une série de capitus (fluviatilis, ceruleus, anacronus, barbus, rapax) et d'Alburnus, Gobius, Rubellus, Sarachi, brochet (Lucius et Lucioperca) Perca I, II, III, etc., chaque espèce étant représentée en de gravures admirables. Il représente et décrit le morun (de la famille des esturgeons) Husa I, affirmant qu'il déposait ses oeufs aux Portes de Fer, de l'avis même des pêcheurs qui croyaient que le sterlet se nourrissait de leur laitance, puisqu'on avait observé que ces derniers se suçaient le mucus de l'un à l'autre.

Il décrit et représente plus loin, l'esturgeon (Husa II antaceus), le sterlet (Husa III sturio), la pastruga (Husa IV sturio II) sorte de truite. Husa V (stellatus), Husa VI (rostratus), etc. Mais la plus intéressante nous semble être la variété de poissons désignée par le nom d'Asperpisciculus I et A. p. II, dans laquelle nous croyons avoir identifiée „l'Hirondelle de Mer", ainsi nommée. Cette variété est considérée par les pêcheurs de mer comme étant une espèce très rare qui n'apparait que de manière intermittente et ceux qui pêchent aux Porte de Fer, où elle vient déposer ses oeufs dans les profondeurs des eaux tourbillonnantes entre les pierres, l'ignorent ou la connaissent à peine. Marsil cependant, donne très judicieusement l'explication de ce fait, en montrant que cette variété de poissons vit et se meut seulement dans la profondeur des eaux ; ainsi elle n'apparait à la surface que très rarement, alors qu'elle est entrainée par les courants sous-marins et ce n'est qu'à ces moments qu'on peut la pêcher.

Le volume V traite des oiseaux aquatiques, situant dans le groupe I, ceux qui ne nagent pas sous les eaux, à savoir, les solitaires (le héron), les piscivores (Ardea, Ciconia), ceux qui se nourrissent de limon et les insectivores (Falcinellus, Scolopax, Gallinago, Himanotopus, Vannellus, Pluvialis, etc.).

Dans le groupe II, il fait rentrer les oiseaux nageant sous les eaux, à savoir, les fissipèdes (Gallinulae, Fulicae), et les palmipèdes, parmi lesquels, certains sont tridactyles et d'autres tetradactyles; ces derniers, il les divise à leur tour en deux groupes, situant dans le premier l'Onocrotalus et le Corvus Aquaticus et faisant dans le deuxième groupe une série d'autres subdivisions: oiseaux à bec aiguisé et oiseaux à bec large; et ici, il fait encore des subdivisions, où il mentionne aussi le Cygne. Il semble d'ailleurs, que les cygnes étaient frequents dans nos régions lacustres, puisqu'aussi bien Spallanzani en évoque le souvenir, lors de son passage par Bucarest, mais il semble d'autre part, que maints des oiseaux figurés par Marsii n'existent plus aujourd'hui. Le volume se termine avec la représentation et la description de divers nids et oeufs d'oiseaux aquatiques.

Le volume VI qui clôt l'oeuvre, présente sur le premier feuillet une gravure avec un éléphant portant sur son dos une tour fortifiée, des enfants qui jouent, et une femme (Minerve ?) adossée à un canon sur roues. Les dix premiers feuillets ont pour objet la description des sources du Danube. Dans les 6 feuillets qui suivent l'on décrit l'anatomie de l'aigle (Aquila) et celle de l'onocrotalus; 15 autres feuillets sont consacrés à la description de l'anatomie du morun, et quatre autres à celle de la loutre. Après cela, l'auteur fait des appréciations sur la rapidité des eaux du Danube, et s'occupe dans 14 autres feuillets de la variété des eaux affluentes du Danube. 14 autres feuillets présentent des tableaux où sont énumérées les plantes qui croissent spontanément le long du Danube, et six autres feuillets ont pour objet les quadrupèdes qui vivent sur les rivages du Danube. 14 autres feuillets présentent des tableaux où sont consignées les observations barométriques et thermométriques (météorologiques) de l'auteur, quant aux 8 derniers feuillets, il les consacre à l'étude des insectes que l'on rencontre sur les rivages du Danube.

La remise en lumière de l'oeuvre de Marsil, nous a paru d'autant plus opportune qu'elle a été omise d'être citée, quand ce n'eût été que dans le volume II (Natürliche Geschichte des Banats) de l'ouvrage „Versuch einer politischen und natürlicher Geschichte des temesvarer Banats" (imprimé à Vienne, en 1780) de Franz Griselini, auquel nous nous sommes référé très souvent à l'occasion de nos recherches historiques.

De la même origine – italienne – comme ce Griselini, Marsil a été lui aussi au service de l'Autriche, mais, du fait que ses recherches ont porté aussi sur une portion du Danube arrosant notre sol, il

peut être considéré au début du XVIII-ème siècle, comme le premier et a coup sûr le plus grand de nos naturalistes.

Il est indubitable que sa contribution originale a été dépassée entre les années 1763-1775, par un autre autrichien, qui peut être revendiqué tant par les Croates que par les Polonais. Nous entendons évoquer ici l'oeuvre considérable de Balthasar ou Balsazar Hacquet, qui a publié „Einige Bemerkungen über das Karpathische Gebirge", – „Neueste physikalisch-politische Reise durch die Dachischen und Sarmatischen oder nördlichen Karpathen", – „Über einige Salzstöcke in der Moldau und Siebenbürgen", – „De Salinis Daciae et Sarmatiae montibus existentibus inquisitis", – „Etwas über die Karpathischen-Gebirge und einige Mineralwässer", etc. De plus, toute une série de plantes et d'animaux, découverts par Hacquet, ont reçu son nom en partage, tels par exemple : „Hacquetia Epipactis, Pedicularis Hacqueti, Anophtalmus Hacqueti, Typhlotrecus Hacqueti, Strixnigra Hacqueti, etc. Et ce serait lui rendre assurément un hommage bien mérité, que de rassembler aux fins de réimpression, les ouvrages de ce Hacquet, qui a été sans conteste, un valeureux précurseur de nos grands naturalistes : Szabo ou Csabo, Brândza, Grecescu, Leon, etc.

Quoiqu'il en soit, l'oeuvre de Marsil, rapportée à l'époque où elle a été écrite, demeure unique en son genre et mérite à juste titre, d'être qualitée de „monumentale".

Faculté de Médecine
de Bucarest

(Reçu le 20 Février 1947).

SUR QUEQUES HYDRACARIENS RECUEILLIS EN YOUGOSLAVIE DANS LE BASSIN DE LA BOSNA

par

C. MOTAŞ, M-me J. TANASACHI et N. BOTNARIUC

Les Hydracariens de la faune yougoslave ont fait jusqu'à présent l'objet des recherches et des études dues aux auteurs suivants : K. Thon, F. Koenike, S. Thor, A. Musselius, Z. Georgevič, C. Walter, S. Stankovič, St. Karaman et K. Viets. L'on doit à ce dernier [1]) un intéressant travail d'ensemble sur les Hydrachnelles et les Halacarides yougoslaves au point de vue systématique, faunistique, écologique et zoogéographique. Il y mentionne les travaux parus antérieurement et signale, à cette occasion, les résultats surprenants des recherches de St. Karaman sur la faune des eaux souterraines de ce pays, en donnant une liste (p. 395, Tab. I) d'Hydrachnelles, qui comprend en tout 141 formes (espèces et sous-espèces) dont 14 nouvelles. Parmi ces espèces, 7 ont été trouvées dans les eaux souterraines, à savoir :

Acherontacarus halacaroides Viets, *A. fonticolus* Viets, *Megapus subterraneus* Viets, *M. cisternarum* Viets, *Lethaxona pygmaea* Viets, *Stygohydracarus troglobius* Viets.

Les Halacarides mentionnés par K. Viets dans son mémoire cité ci-dessous ainsi que dans un de ses travaux antérieurs [2]) sont les suivants : *Soldanellonyx chappuisi*, *S. monardi*, *Walterella weberi*, *Copidognathopsis tectiporus* et *C. tectiporus profundus* trouvés dans les eaux épigées, ainsi que *Parasoldanellonyx typhlops* et *Stygohalacarus scupiensis*, vivant dans l'eau phréatique. Il y mentionne aussi deux Acariens phréaticoles de la famille des *Thrombidiidae*, sous-famille des *Stygothrombidiinae* S. Thor et qui, suivant nous, doivent appartenir à la famille des *Stygothrombidiidae* Motaş et Tanasachi [3]). Ce sont : *Stygothrombium karamani* Viets et *Cerberothrombium armatum* Viets, voisins de *Charonothrombium racovitzai* de

Roumanie (Motaş et Tanasachi op. cit.) dont *Stygothrombium chappuisi* Walter [4]) n'est que le synonyme.

Depuis lors K. Viets [5-6]) a signalé et décrit encore trois espèces souterraines d'Hydrachnelles de Yougoslavie: (*Pionella karamani*, *Parabrachypoda montii* et *Kawamuracarus vardaricola*) ainsi que deux espèces épigées, *Atractides connexus* et *Nautarachna crassa*.

Il faut donc compter, jusqu'à présent, 146 espèces d'Hydrachnelles, 7 espèces d'Halacarides et 2 espèces de Stygothrombidiides pour la faune yougoslave.

Tout dernièrement (juillet et août 1947) un de nous (N. Botnariuc) a eu l'occasion de visiter la Yougoslavie, en compagnie d'une équipe d'étudiants de l'Université de Bucarest: La brigade „N. Bălcesco" qui a participé, à cette époque, à la construction d'une voie ferrée traversant la vallée de la Bosna. Il a eu le loisir, accompagné de M. Botoşăneanu, jeune étudiant de notre faculté, de recueillir quelques Hydracariens épigés et quelques Hydracariens phréaticoles de cette région.

Nous, Motaş et Tanasachi [7]), avons déjà donné la description sommaire d'un Hydracarien nouveau de Yougoslavie, trouvé dans l'eau souterraine, à cette occasion, et qui à notre avis, est voisin d'une forme nouvelle découverte récemment en Roumanie par P. A. Chappuis et décrite par L. Szalay [8]).

Nous donnerons ci-après, tout d'abord la liste des localités explorées ainsi que celle des espèces recueillies, et ensuite la description de quelques formes plus rares ou nouvelles.

Liste des localités explorées dans le bassin de la Bosna

I. Vallée de la Bosna

31. VII près du campement de la brigade „N. Bălcescu". Deux prises dans la rivière elle-même. Alt. 370 m:

Sperchon glandulosus Koen. 2♂, 1♀.
Sperchon clupeifer Psg 4♂, 5♀, 2ny.
Sperchonopsis verrucosa (Protz) 1♂, 1♀, 1ny.
Atractides latissimus Viets 3♂, 6♀.
Hygrobates calliger Psg 7♂, 4♀.
Axonopsis gracilis Psg, 1♀.
Mideopsis orbicularis (O. F. M.) 1♂, 2♀.

15. VIII, dans un autre endroit: Hydracariens absents.

17. VIII:

Lebertia (Pilo) saxonica Thor, 1♀.

II. Vallée de la Rybnitza

3. VIII, dans le ruisseau, alt. 370 m;

Sperchon clupeifer Psg 5♂, 3♀, 2ny.
Atractides ellipticus (Maglio) 8♂, 12♀, 2ny
Pseudotorrenticola rhynchota Walt. 1.
Hygrobates calliger Psg 2♂, 2♀, 4ny.
Megapus nodipalpis Thor, 2♂.

4. VIII, dans le ruisseau:

Sperchon clupeifer Psg 1♀, 1ny.

Atractides ellipticus (Maglio) 3♂, 6♀ 1ny.
Pseudotorrenticola rhynchota Walt. 1♂.
Hygrobates calliger Psg 2♂, 6♀, 1ny.
Megapus nodipalpis Thor 1♂, 1♀, 1ny.

6. VIII, dans le ruisseau :
Hygrobates calliger Psg 1♂, 1ny.

6. VIII. dans les sondages près du bord du ruisseau :
Atractides jeanneli Mts et Tschi, 1♀.
Neumania phreaticola n. sp. ♂, 2♀.
Stygomomonia latipes Szalay 1♂, 1♀ ovig,, 4♀ non ovig.

15. VIII, dans un sondage :
Stygomomonia latipes Szalay 1♂, 1♀.
Aturus crinitus Thor 2♀.

III. Vallée de la Lashva affluent de la Bosna.

21. VIII, trois prises dans la rivière. Alt. 370 m :
Sperchon clupeifer Psg 53♂, 12♀, 20ny.
Sperchonopsis verrucosa (Protz) 1 ♂, 1♀, 1ny.
Lebertia (Pilo) saxonica Thor 2♀, 2ny.
Atractides ellipticus (Maglio) 4♂, 18♀, 2ny.
Hygrobates calliger Psg 24♂, 42♀, 38ny.
Megapus nodipalpis Thor 21♂, 19♀, 17ny.
Axonopsis gracilis Psg 1♀.
Aturus scaber Kram. 1♂, 2♀.
Aturus crinitus Thor 2♂. 3♀.

IV. Torrent en face de la gare affluent de la Lashva.

12. VIII :
Hygrobates fluviatilis (Strőm) 1♀.

V. Vallée de la Kuzica affl. droit de la Lashva.

Eau claire, fond de pierres, largeur de 6 à 7 m. Alt. 351 m.

1. VIII, dans le ruisseau :
Sperchon clupeifer Psg 3♂, 8♀, 2ny.
Atractides ellipticus (Maglio) 3♂, 1♀.
Pseudotorrenticola rhynchota Walt. 1♀.
Hygrobates calliger Psg 2♂, 1♀, 1ny.
Aturus crinitus Thor 1♀.

21. VIII, prises faites dans plusieurs sondages près du pont de la Kuzica, Temp. atmosph. à 11h. 30m., au soleil 37°, à l'ombre 34°, temp. de l'eau du ruisseau 18°, de l'eau des sondages, 19° ; terrain pierreux et sableux :
Atractides jeanneli Mts et Tschi 1♂, 2♀.
Pseudotorrenticola rhynchota Walt. 1♂, 1♀.
Axonopsis gracilis Psg 1♀.
Aturus crinitus Thor 1♀.
Kongsbergia pectinigera sinuosa Mts et Tschi 1♂, 4♀.
Balcanohydracarus alveolatus Mts et Tschi 1♀.

Liste des espèces recueillies

1. *Sperchon glandulosus* Koen.
2. *Sperchon clupeifer* Thor.
3. *Sperchonopsis verrucosa* (Protz).
4. *Lebertia (Pilo) saxonica* Thor.
5. *Atractides ellipticus* (Maglio).
6. *Atractides latissimus* Viets.
7. *Atractides jeanneli* Mts et Tschi.
8. *Pseudotorrenticola rhynchota* Walt.
9. *Hygrobates fluviatilis* (Strőm).
10. *Hygrobates calliger* Psg.
11. *Megapus nodipalpis* Thor.
12. *Neumania phreaticola* n. sp. Mts et Tschi.
13. *Axonopsis gracilis* (Psg).
14. *Aturus scaber* (Protz).
15. *Aturus crinitus* Thor.
16. *Kongsbergia pectinigera sinuosa* Mts et Tschi.
17. *Mideopsis orbicularis* (O. F. M).
18. *Stygomomonia latipes* Szalay.
19. *Balcanohydracarus alveolatus* Mts et Tschi.

Dans deux mémoires antérieurs sur les Hydracariens phréaticoles de Roumanie [9-10]) nous avons mentionné le *Stygomomonia latipes* Szal. sous le nom changé de *St. szalayi* Mts et Tschi. Mais pour des raisons que nous verrons plus loin (pag. 761) nous revenons au nom initial, en considérant le second comme synonyme du premier.

Atractides latissimus Viets
(fig. 1 A - K)

L'on ne connaît de cette espèce, trouvée seulement en Yougoslavie, que la femelle (K. Viets, [2]) pp. 369-370, Pl. VII, fig. 22-25). Le mâle, jusqu'à présent,est resté inconnu. Elle se remarque, entre autres, par son contour presque circulaire, son bord frontal réctiligne, ses épimères qui s'étendent très peu en avant de ce dernier. Les individus femelles que nous avons à notre disposition, quoique un peu plus petits, correspondent presque en tout à la description donnée par K. Viets.

Femelle. Un échantillon femelle ovigère, étudié par nous, mesure 806 μ de long sur la face dorsale, 830 μ sur la face ventrale et 766 μ de large. Il est donc plus petit que celui provenant du Jadro à Split et décrit par Viets, et dont la longueur dorsale était de 840 μ, ventrale de 848 μ, et la largeur de 800 μ. La coloration est jaunâtre légèrement teintée de brun.

Le bouclier dorsal mesure, chez notre exemplaire, 680 μ de long et 626 μ de large. Les plaques frontales ont chacune une longueur de 150 μ, les plaques humérales en ont 233 μ, tandis que chez le type elles en ont respectivement 173 et 280 μ.

La distance entre les yeux est de 246 μ, celle des soies antenniformes de 166 μ, tandis que chez le type la première erait de 490 μ (?) et la seconde de 245 μ (?), ce qui évidemment semble être trop exagéré. Certes, il doit y avoir une erreur, car il est impossible que les cavités d'articulation des pattes de la dernière paire, chez l'exemplaire de Viets, soient plus rapprochées (245 μ) que les yeux (490 μ). En jettant d'ailleurs un coup d'ocil sur le dessin donné par ce dernier auteur, l'on peut facilement constater qu'il n'en est pas ainsi.

L'organe maxillaire, à rostre court, mesure, celu-ci y compris, 230 μ de long et 06 μ de large. La longueur totale de la mandibule est de 246 μ.

Les dimensions, en μ, des articles du palpe sont les suivantes :

	PI	PII	PIII	PIV	PV
Longueur dorsale	23	58	45	49	23
Longueur ventrale	15	23	28	42	23
Hauteur	35	48	40	30	14.

Longueur du champ épiméral, jusqu'au bord postérieur, recourbé en dehors, des Ep. IV est de 550 μ, largeur 526 μ. Longueur du sinus maxillaire 135 μ, largeur 50 μ ; la distance entre le fond de ce dernier et l'extrémité en pointe des Ep. I, qui sont fusionnés, est de 116 μ ; entre cette pointe et l'organe génital de 53 μ. La longueur de la ligne de suture des Ep. II et III est de 45 μ. Les cavités d'articulation des pattes de la IV-e paire sont à 400 μ l'une de l'autre. La limite entre la zone chitineuse primaire du champ épiméral et la zone secondaire est à une distance de 75 μ de l'organe génital.

Les pattes mesurent : I 412, II 456, III 480, IV 650 μ.

L'organe génital a une longueur de 213 μ et une largeur de 153 μ. L'oeuf unique, très gros, mesure 250 μ sur 200 μ.

L'orifice excréteur se trouve à 93 μ de distance du bord chitineux secondaire du champ épiméral.

Mâle. Le mâle se distingue de la femelle, tout d'abord par sa taille plus petite et, ensuite, par son contour circulaire encore plus accusé, son organe génital plus petit et plus étroit, par la distance, bien plus grande, entre ce dernier et la pointe postérieure des Ep. I, ainsi que par son palpe moins robuste et plus élancé.

La coloration du corps est comme chez la femelle. Longueur du corps sur la face dorsale 725 μ, sur la face ventrale 746μ, largeur 607 μ. Distance entre les soies antenniformes 147 μ, entre les yeux 206 μ.

L'organe maxillaire a une longueur de 215 μ et une hauteur maximum de 94 μ. Longueur totale de la mandibule 235 μ, hauteur 44 μ.

Les dimensions, en μ, des articles du palpe sont :

	PI	PII	PIII	PIV	PV
Longueur dorsale . .	19	50	38	43	18
Longueur ventrale . .	14	28	26	36	18
Hauteur	30	46	31	23	12.

Les PII et PIII offrent sur leur bord ventral et, tout à fait distalement, une forte et longue soie ; sur leur bord dorsal ils en offrent trois dont une distale. Nous remarquerons que le bord distal externe ainsi que le bord distal interne du PIII ne présentent pas cette expansion hyaline vers l'extrémité proximale du PIV, observée par Viets

chez le type. En échange le PIV a son bord ventral un peu convexe au point d'insertion des deux courts poils, comme chez le type.

Le champ épiméral a une longueur de 495 μ jusqu'au bord postérieur des Ep. IV et, une largeur de 485 μ.

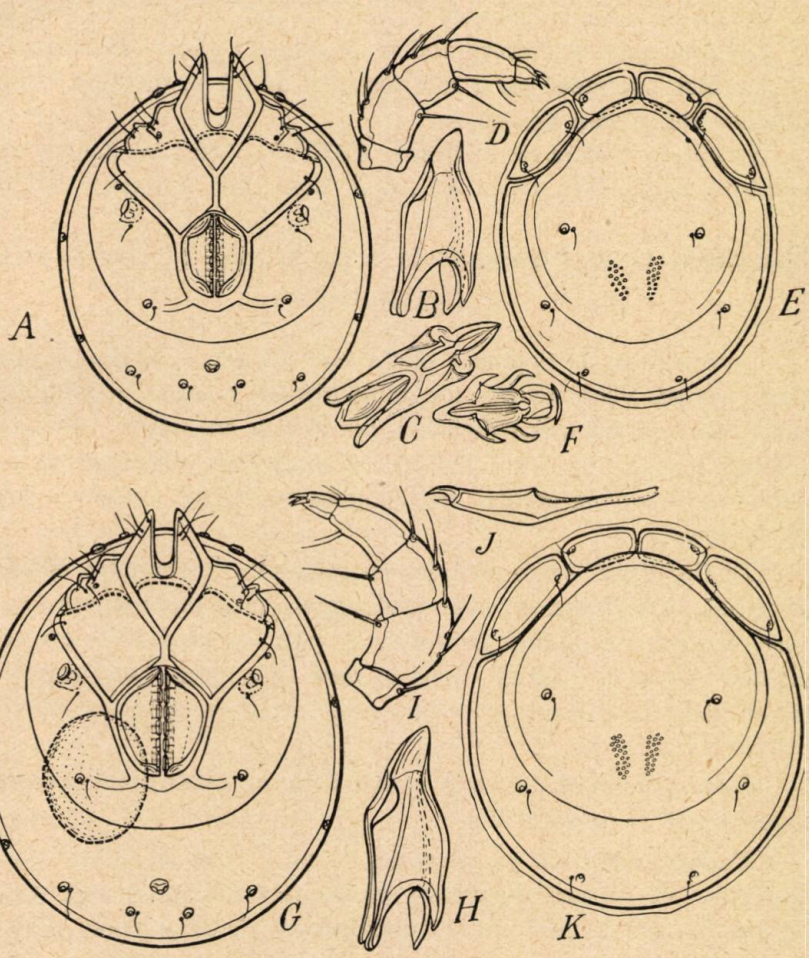


Fig. 1.

Atractides latissimus Viets. **Mâle** : A) face ventrale : B) l'organe maxillaire vu de côté ; C) le même vu du dos ; D) palpe ; E) face dorsale ; F) support du pénis. **Femelle** : G) face ventrale : H) organe maxillaire vu de côté, I) palpe, J) mandibule ; K) face dorsale.

Le sinus maxillaire a une longueur de 130 μ et une largeur de 43 μ. La distance entre le fond du sinus et l'extrémité en pointe des Ep. I, plus grande que chez la femelle, est de 86 μ ; entre cette pointe et l'organe génital de 80 μ. La ligne de suture des Ep. II et III est de

35 μ. Les cavités d'articulation des pattes IV sont éloignées l'une de l'autre de 363 μ.

La limite entre la zone chitineuse secondaire du champ épiméral est à 63 μ de l'organe génital.

Les pattes sont longues de : I 346, II 360, III 400, IV 580 μ.

L'organe génital mesure 163 μ de long et 126 μ de large.

L'orifice excréteur est à une distance de 35 μ, du bord chitineux secondaire du champ épiméral.

Localités : Vallée de la Bosna, à 370 m. d'altitude, dans la rivière elle-même, le 31. VII. 1947, 3 ♂, 6 ♀, dont une ovigère.

Neumania (s. str.) phreaticola n. sp. Motaş et Tanasachi.
(fig. 2 A-I)

Cette espèce, la première phréaticole de genre, se remarque entre autres : par ses yeux petits ; son bord frontal presque rectiligne ; son champ épiméral qui - ne s'étendant pas si loin en arrière comme dans les autres espèces - ne recouvre pas les deux tiers antérieurs de la face ventrale ; son organe génital, très éloigné du champ épiméral, surtout chez le mâle.

Dans le deux sexes, le dos est surmonté de quatre plaquettes chitineuses, dont deux en avant, allongées, plus rapprochées l'une de l'autre, et deux en arrière de celles-ci, plus ou moins rondes et plus éloignées l'une de l'autre. Dans le reste du corps, sur le dos et la face ventuale, la cuticule reste fine, sauf autour de certaines ouvertures glandulaires.

Mâle. Coloration du corps jaunâtre, forme ovale rétrécie en avant. Longueur 488 μ, largeur 392 μ.

Distance entre les yeux, petits et noirs, 128 μ ; entre les soies antennaires 92 μ. Les plaquettes chitineuses allongées ont 53 μ de long sur 15 μ de large et sont à une distance de 82 μ l'une de l'autre ; les plaquettes rondes, dont le diamètre est de 20 μ se trouvent à 150 μ l'une de l'autre.

L'on remarque en outre, à la face dorsale, 5 paires d'ouvertures glandulaires, accompagnées d'un fin poil et entourées d'une rondelle chitineuse, ainsi que 4 paires de pores non accompagnés de poils.

L'organe maxillaire est long de 92 μ et large de 70 μ. La longueur totale de la mandibule est de 110 μ, la hauteur, en avant de la cavité d'articulation, de 50 μ.

Le palpe, assez robuste, a son IV-e article pourvu, à l'extrémité

distale du bord ventral, d'une petite épine, située, comme chez *Neumania agilis* Koen., un peu plus en retrait par rapport au point distal du bord dorsal et, plus près de l'éminence distale surmontée d'un fin

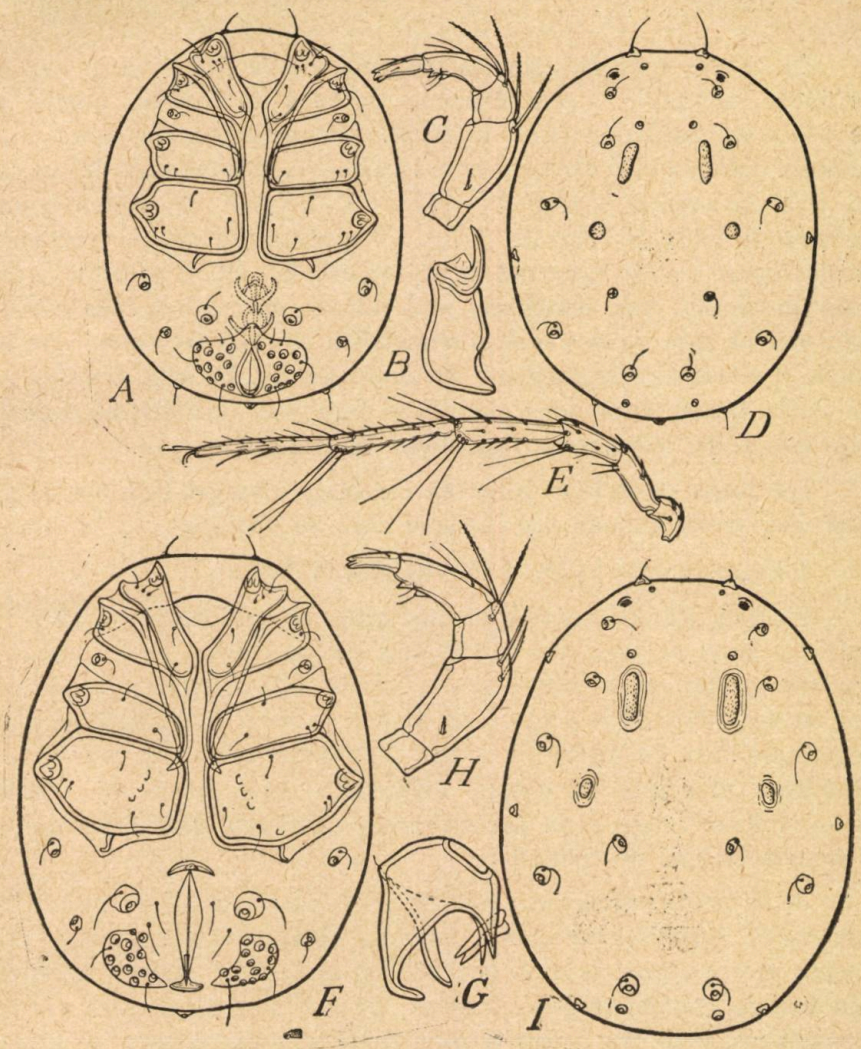


Fig. 2.

Neumania phreaticola n. sp. Mts et Tschi. **Mâle** : A) face ventrale ; B) mandibule ; C) palpe ; D) face dorsale ; E) IV.e patte. **Femelle** : F) face ventrale ; G) organe maxillaire vu du côté ; H) palpe ; I) face dorsale.

poil. La soie dorsale interne du PII est à peu près égale à celle du PIII. Cette dernière est moins longue que PIV + PV.

Dimensions, en μ, des articles du palpe :

	PI	PII	PIII	PIV	PV
Longueur dorsale	18	66	30	47	36
Longueur ventrale	16	57	21	40	36
Hauteur	24	34	24	19	11.

Le champ épiméral, dont la longueur est de 316 μ et la largeur de 324 μ, se trouve à une distance de 68 μ de l'organe génital et de 173 μ du bord postérieur du corps. Les apophyses médianes sous-cutanées des Ep. I et II n'atteignent pas les Ep. IV, comme c'est le cas par ex. chez *Neumania seurati* Walter [11]). L'Ep. II se trouve à une distance de 33 μ de l'Ep. III. L'Ep. IV a son bord médial réctiligne et plus court que la ligne qui le sépare de l'Ep. III. Il présente, à son bord postérieur, une apophyse sous-cutanée en crochet, plus près du coin médial que de la cavité d'articulation de la IV-e patte, vers laquelle il se rétrécie légèrement. En outre les Ep. IV sont bordés, sur les côtés libres, d'une zone chitineuse plus fine, qui entoure comme dans une saillie triangulaire l'apophyse en crochet.

Les pattes de la IV-e paire ont un aspect habituel. Leur 3-e article n'est pas renflé comme par exemple chez *N. spinipes*.

Elles mesurent : I 473, II 453, III 475, IV 507 μ.

L'organe génital consiste en une seule plaque percée de 12 + 13 pores génitaux et porte 4 + 5 poils fins sur ses bords. La longueur de l'organe génital, est de 116 μ, sa largeur de 148 μ. L'ouverture génitale qui est au milieu de la plaque, est longue de 60 μ large de 27 μ. Mais tandis que chez les mâles du genre *Neumania* s. str. cet organe est situé bien plus près du champ épiméral, voire même en contact direct, comme chez ceux du sous-genre *Lemienia*, dans notre espèce il est très éloigné de celui-ci.

A la face ventrale du corps, entre les Ep. II et III on trouve les ouvertures épiméro-glandulaires entourée chacune d'une rondelle chitineuse et accompagnée d'un fin poil. En arrière du champ épiméral l'on voit de chaque côté de l'organe génital trois ouvertures ventro-glandulaires, dont une ayant la rondelle la plus développée, se trouve juste en avant de l'organe genital à une distance de 21 μ du champ épiméral.

Femelle. L'individu femelle, étudié par nous, mesure 592 μ de long et 460 μ de large. Il se distingue du mâle non seulement par sa taille plus grande, mais aussi par l'apophyse médiane sous-cutanéee des Ep. I et II qui atteint l'Ep. IV et, naturellement, par son organe géni-

tal à plaques libres, non fusionnées, comme chez tous les individus femelles des autres espèces du genre.

Distance entre les yeux 140 μ. Entre les soies antennaires 96 μ. Les plaquettes chitineuses dorsales allongées mesurent 62 μ de long et 20 μ de large. Les plaquettes postérieures arrondies, sont longues de 26 μ et larges de 15 μ. Le tégument présente la même constitution, et les ouvertures dorso-glandulaires et ventro-glandulaires ont les mêmes caractères et la même position que chez le mâle.

L'organe maxillaire mesure 108 μ de long et 82 μ de large. Le palple présente à peu près les mêmes caractères que celui du mâle. Mais la soie dorsale du PII est plus courte que celle du PIII.

Les dimensions, en μ, des articles du paple sont les suivantes :

	PI	PII	PIII	PIV	PV
Longueur dorsale	23	90	32	50	37
Longueur ventrale	20	58	24	50	37
Hauteur	29	46	36	29	11.

Le champ épiméral, comme celui du mâle, est parsemé de rares poils, et mesure 384 μ de long et 432 μ de large. L'apophyse sous-cutanée de l'Ep. I, plus longue que chez le mâle, atteint l'Ep. IV. L'apophyse en crochet du bord postérieur de l'Ep. IV est recourbée en dehors, au lieu d'être en dedans.

Les pattes sont longues de : I 540, II 520, III 545, IV 580 μ

L'organe génital offre deux plaques, percées de 12 à 13 pores, plus courtes que la vulve, comme c'est le cas chez *Neumania deltoides* (Psg), mais au lieu d'être rondes, ovales ou hémicirculaires, comme dans d'autres espèces, elles ont un contour rappelant celui d'une coquille de Moule, comme chez *Neumania imitata* Koen, étant plus rétrécies en arrière. Les plaques génitales sont longues de 74 μ et larges de 56 μ en avant et montrent chacune 2 fins poils. La fente génitale offre en avant et en arrière un renforcement chitineux („Stützkörper") et mesure 152 μ de long. Entre la vulve et les plaques on trouve de chaque côté 2 fins poils. Les rondelles chitineuses des ouvertures ventro-glandulaires, qui flanquent l'organe génital, ne sont pas fusionnées avec celui-ci.

L'orifice excréteur, comme chez le mâle, fait saillie au bord postérieur du corps.

Localités : Vallée de la Rybnitza, dans un sondage, alt. 370 m. le 6. VIII. 1947, 1♂, 2♀.

Kongsbergia pectinigera *var.* **sinuosa** Motas et Tanasachi. (*fig. 3 A - G*)

En 1942, P. A. Chappuis trouva dans l'eau phréatique des Vallées du Someşul-Răce (Hideg Szamos) et du Criş (Körös), en Transylvanie, quelques individus mâles et femelles d'une de *Kongsbergia* qui fut décrite par la suite (1945) par Szalay [12]) sous le nom de *Kongsbergia alata.*

Sans connaître le travail de Szalay, mentionné ci-desous, nous, Motaş et Tanasachi [3]), avons établi en 1946, d'après quelques individus envoyés également par Chappuis de Transylvanie, l'espèce *Kongsbergia pectinigera*, se caractérisant surtout par la présence, chez le mâle, d'une forte soie pectinée à la patte de la dernière paire. Peu de temps après (1947) C. Walter [13]) ne connaissant ni le travail de Szalay, ni le nôtre, donna le nom de *Kongsbergia pectinata* à une espèce de Suisse qui, dans le sexe mâle, présente le même très évident caractère. D'après la description que ce dernier auteur a donné de son espèce, on voit clairement qu'il s'agit de notre espèce. Aucun doute et aucune hésitation n'en sont possibles.

En ce qui concerne *Kongsbergia alata* Szal. nous commençons à douter fort, malgré la ressemblence de son palpe à celui de la première, qu'elle soit identique à celle-ci. En effet, suivant la description donnée par l'éminent acarologiste de Budapest, son espèce est dépourvue, chez le mâle, de la soie en peigne si caractéristique.

Au cours de nos recherches sur les Hydracariens de Roumanie nous [10]) avons trouvé, dans plusieurs régions de ce pays, et plus fréquemment, une forme de *K. pectinigera* que nous avons rattachée à une variété nouvelle, *K. p. sinuosa.* Et ce-ci en raison du contour sinueux du corps, dans sa moitié postérieure, chez le mâle. Il est possible qu'il s'agisse tout simplement d'une variation en rapport avec l'âge des individus.

En effet, les échantillons envoyés par Chappuis offraient une coloration plus claire et une chitinisation plus faible, ce qui semble prouver qu'ils étaient moins âgés. Les exemplaires de Yougoslavie, comme ceux que nous avons rencontrés jusqu'à présent en Roumanie, sont, par contre, plus foncés et plus fortement chitinisés.

Mâle. Les dimensions du corps sont les suivantes: longueur dorsale 378 μ, ventrale 424 μ, largeur 235 μ. Il en est donc plus grand que celui de *K, alata* étudié par Szalay et qui, en ce qui concerne la taille, correspond à celui de *K. pectinigera* étudié par

nous ([8]) 1946, p 38). Il est plus grand même que le mâle de *K. pectinigera* var. *sinuosa* Motaş et Tanasachi ([10]), 1947, p. 50).

La distance entre les yeux est de 51 μ, entre les soies antennaires de 27 μ.

La cuticule, comme chez *K. alata* (v. Szalay, ([8]), p. 43), est percée de nombreux pores, plus fins vers le milieu de la cuirasse dorsale. Cette dernière est largement convexe en avant, entre les épaules. En arrière elle est, par contre, échancrée jusqu'à l'orifice excréteur situé dorsalement. Dans cette échancrure, un peu plus en arrière de ce dernier, se trouve l'orifice génital. De chaque côté de ces deux ouvertures, elle est surmontée d'un mamelon portant un fin poil.

La cuirasse dorsale, dont les bords s'étendent, sur les côtés, jusqu'à la cuirasse ventrale, où ils sont rentrants, en présentant une profonde rainure, montre dans la moitié postérieure du corps, de part et d'autre, deux larges et assez profondes excavations. Son contour devient ainsi sinueux, à telle enseigne, que, du dos, l'on peut voir, au niveau de ces dernières, les bords de la cuirasse ventrale.

La cuirasse dorsale, à sa face interne et vers ses bords latéraux, est sillonnée en long d'un certain nombre d'arêtes sinueuses comme des vagues, disposées en plusieurs séries parallèles, mais pas aussi régulièrement comme l'ont vu Szalay et Walter chez les échantillons qu'ils ont étudiés. Ces arêtes saillantes en dedans convèrgent vers les deux extrémités de la carapace et deviennent plus nettement visibles lorsqu'on abaisse l'objectif.

Les pattes sont très fortes. Leur 4-e article ne présente pas la soie plumeuse observée par Walter ([4]), p. 216, fig. 28 d); le 5-e, article mesure 82 μ sur son bord dorsal où il offre, vers le milieu, une très longue et fine soie ; le bord ventral de cet article offre une rainure médiane et deux fortes proéminences, dont la proximale porte une soie en peigne recourbée, ayant 5 denticules. La saillie distale, tronquée au bout, offre une très courte et forte épine. Entre ces deux proéminences, plus près de la première, se trouve implantée une forte épine recourbée en arrière plus développée que la soie en peigne. Le 6-e article, très rétréci à la base, offre 8 fins poils dont 4 sur le bord ventral et 4 sur le bord dorsal, près de son extrémité distale. Parmi ces dernières, le poil proximal est presque aussi long que celui de l'article précédent.

L'orifice génital, très petit, se trouve à l'extrémité postérieure du corps sur la face ventrale, s'étendant un peu sur le dos. Il est flanqué

de chaque côté, de deux étroites plaques génitales comptant chacune de 15 à 16 cupules disposées sur une seule rangée.

Femelle. Un peu plus grosse que le mâle, elle mesure 415 μ de long sur la face dorsale, 470 μ sur la face ventrale, et 260 μ de large.

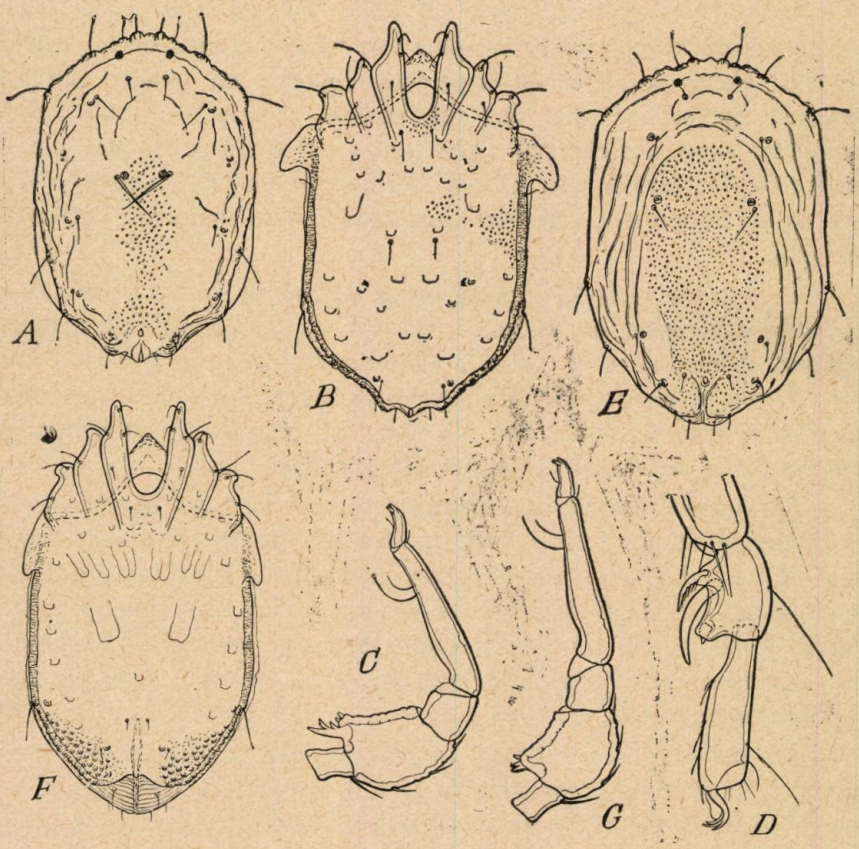


Fig. 3.

Kongsbergia pectinigera var. *sinuosa* Mts et Tschi. **Mâle** : A) face dorsale ; B) face ventrale ; C) palpe ; D) 5-e et 6-e articles de la IV-e patte ; **Femelle** : E) face dorsale ; F) face ventrale ; G) palpe .

Les bords latéraux dans la moitié postérieure du corps sont également sinueux. La distance entre les yeux est de 60 μ, entre les ouvertures des glandes antennaires de 20 μ.

La carapace dorsale est plus finement chagrinée au milieu et présente les mêmes arêtes saillantes en dedans, et convergentes vers les extrémités, mais disposées plus régulièrement que chez le mâle.

Les soies médianes de celle-ci, plus éloignées que chez le dernier,

sont plus fines. Le bord frontal de la carapace est largement convexe, tandis que le bord postérieur, beaucoup plus rétréci que le premier, présente une échancrure vers l'orifice excréteur situé dorsalement. A l'extrémité de la cuirasse dorsale, on voit la peau fine striée transversalement que perce la fente génitale.

L'organe maxillaire est long de 105 μ, haut de 60 μ. Longueur totale de la mandibule 127 μ. Les palpes sont également grêles mais plus développés que ceux du mâle. Les PII offre également une forte proéminence ventrale portant seulement 3 denticules moins longs que chez ce dernier.

Les dimensions de leurs articles, en μ, sont les suivantes:

	PI	PII	PIII	PIV	PV
Longueur dorsale	34	105	38	140	37
Longueur ventrale	30	76	30	122	37
Hauteur	31	62	37	30	14.

Les épimères ont les mêmes caractères que chez le mâle, mais les expansions aliformes sont moins développées.

Les pattes sont longues de : I 354, II 395, III 430, IV 518 μ.

Le bouclier ventral est concave en arrière vers la fente génitale. Le région à cuticule fine et souple que perce cette dernière est striée transversalement d'une manière très régulière.

La fente génitale, longue de 110 μ, s'insinue sous le bouclier ventral sur une grande portion de celui-ci.

Les cupules génitales au nombre de 40 à 44 de chaque côté, sont disposées sur plusieurs rangées dont la plus rapprochée du bord latéral est située sur une plaque génitale étroite.

Localités : Vallée de la Kuzica, affluent droit de la Lashva, dans un sondage près du pont, de 21. VIII. 1947, 2♂, 4♀.

Stygomomonia latipes Szalay

(fig. 4 A-H)

Cette espèce découverte en Roumanie par P. A. Chappuis, fut décrite par Szalay [12]. Malheureusement la description qu'il en a donné est lacunaire et souvent défectueuse. Elle ne permet pas l'identification facile de l'espèce, comme nous [3] l'avons déjà fait remarquer.

Aussi nous, Motaş et Tanasachi [9], avons proposé déjà un changement de nom pour cette espèce, en l'appelant *Stygomo-*

monia szalayi. Mts et Tschi. C. Walter [4]) lui aussi, ayant eu l'occasion de comparer un individu femelle de cette espèce, envoyé par Szalay lui-même, aux espèces établies récemment par lui (*St. transversaria*, *St. jurassica* et *St. gracilis*) fait remarquer les différences qui existent entre celles-ci et le premier, ainsi que les defficiences de la description donnée par Szalay pour son *St. latipes*.

Malgré ceci, vue la priorité qui revient à Szalay, nous voulons revenir au nom initial de *St. latipes* Szalay, qui doit remplacer celui de *St. szalayi* mentionné dans nos travaux antérieurs.

Nous remarquons en outre, que parmi les espèces décrites par Walter, celle qui, à notre avis, se distingue le moins de *St. latipes* Szal. est *St. gracilis* Walt. qui a été trouvée aussi en Transylvanie par Chappuis. Suivant nous, il s'agit d'une seule et même espèce, vivant en Roumanie et en Suisse et qui est *St. latipes* dont *St. gracilis* ne serait que le synonyme.

Il est à remarquer que les caractères distinctifs existant d'une part entre *St. transversaria* et *St. jurassica* et, d'autres part, entre celles-ci est *St. latipes*, ne sont pas trop saillants.

Il est donc à craindre qu'il ne s'agisse, tout au plus, que de variétés d'une même espèce.

Mâle. L'individu yougoslave étudié par nous mesure 415 μ de long sur la face dorsale, 422 μ sur la face ventrale, et 317 μ. de large.

Il est par conséquent plus grand que celui dont nous avons déjà donné la description ([3]), 1946, p. 44) et plus grand même que celui décrit par Szalay ([12]), 1943, p. 58). Sa chitinisation est forte et sa coloration jaunâtre teintée de brun, ce qui prouve qu'il est mûr.

La distance entre les yeux est de 125 μ, entre les soies antennaires de 110 μ.

La carapace dorsale, ovale et plus rétrécie à la partie postérieure, ne couvre pas toute la surface dorsale, et ne s'étend pas sur les bords du corps. Elle mesure 397 μ de long et 270 μ de large et ne présente pas les deux larges excavations postéro-latérales observées par Szalay au niveau des ouvertures glandulaires qui percent le tégument souple bordant le corps tout autour. Elle offre en outre une fine réticulation dans les mailles de laquelle on trouve des petits pores disposés en groupes.

La cuirasse ventrale, en opposition avec celle du mâle type, ne s'étend pas du tout sur le dos. La carapace dorsale, bien qu'un

peu moins développée que la précédente, ne présente pas les excavations dessinées par Szalay, au niveau des ouvertures glandulaires, qui percent le tégument souple compris entre les deux cuirasses.

L'organe maxillaire mesure 82 μ de long et 44 μ de haut ; la mandibule a une longueur de 50 μ l'onglet y compris.

Les dimensions, en μ, des articles du palpe sont :

	PI	PII	PIII	PIV	PV
Longueur dorsale	16	50	26	44	31
Longueur ventrale	10	31	17	35	31
Hauteur	15	30	23	21	11

Le champ épiméral ne dépasse que de très peu le bord frontal. Les Ep. I et II de chaque côté sont fusionnés mais leur ligne de suture est conservée entièrement. L'Ep. I est surmonté de 3 fins poils.

Le champ épiméral est fusionné avec la cuirasse ventrale en un bouclier unique long de 400 μ et large de 300 μ, mais les Ep. I et II de chaque côté sont facilement détachables, malgré leur forte apophyse postérieure qui s'insinue sous les Ep. III fusionnées. Les premiers deux épimères sont également fusionnées de chaque côté et séparées des Ep. III par un espace assez large et chagriné, percé par l'ouverture épiméro-glandulaire.

La ligne de suture entre les Ep. I et II est entièrement conservée. Les Ep. III sont fusionnées en une plaque unique longue de 88 μ et large de 150 μ; mais la ligne de suture médiale est disparue complètement, en avant. Cette plaque épimérale dont les bords latéraux sont bien distincts, conserve en échange de chaque côté la ligne de suture avec l'Ep. IV. Ceux-ci sont bien fusionnées avec la cuirasse ventrale, mais leurs bords latéraux sont disparus, les limites de ceux-ci étant marquées par une rangée en arc de 7 soies fines. Les bords médians des Ep. IV sont assez bien distincts, ainsi que ceux postérieurs.

Les cavités d'articulation des pattes IV sont à une distance de 117 μ l'une de l'autre.

Le bord postérieur du bouclier ventral qui englobe le champ génital, en laissant libre l'orifice excréteur, s'étend en arrière vers ce dernier, en pointe mousse, jusqu'aux plaques postgénitales portant chacune 2 ouvertures glandulaires et 4 poils. En avant de celles-ci la

cuirasse ventrale est légèrement excavée de chaque côté de son prolongement postérieur.

Les pattes ont une longueur de : I 387, II 275, III 315, IV 425.

Le 5-e article de la patte I, portant quelques soies, est long de 165 μ. Ses bords dorsal et ventral sont presque droits. La hauteur de cet article à l'extrémité proximale est de 44 μ, à l'extrémité distale de 36 μ. Le 6-e article très mobile, d'une longueur de 74 μ, offre sur son bord dorsal une profonde raimure distale-qui s'étend en arrière au delà de son milieu,-dans laquelle est logée la puissante et unique griffe, ayant une grande expansion basale élargie et un petit denticule accessoire à la base de celui-ci. A l'extrémité proximale, cet article, un peu plus renflé à cet endroit, offre une formation chitineuse denticulée antagoniste de la griffe. La longueur de cette dernière, à peu près égale à la moitié de l'article, est de 45 μ.

Le champ génital enclavé dans la cuirasse ventrale est à une distance de 50 μ du champ épiméral fusionné avec cette dernière.

L'ouverture génitale, longue de 54 μ et large de 28 μ est flanquée de chaque côté de trois disques génitaux disposés en arc ainsi que d'un nodule chitineux saillant en dedans de la cuirasse et placé tout près du dernier disque. En avant et en arrière du premier disque l'on voit huit poils sur les bords du champ génital. L'espace compris entre les disques et l'ouverture génitale est finement chagriné.

Femelle. L'individu ovigère étudié par nous, fortement chitinisé et brunâtre, mesure 480 μ de long sur la face dorsale, 497 μ sur la face ventrale et 350 μ de large.

Le bouclier formé par le fusionnement du champ épiméral et de la cuirasse ventrale, présentant un large sinus à l'extrémité postérieure dans lequel s'engage en partie l'organe génital, mesure 400 μ de long et 350 μ de large.

La plaque provenant du fusionnement des Ep. III est longue de 125 μ et large de 182 μ. Distance entre les cavités d'articulation des pattes IV, 140 μ. Les pattes sont du même type que celles du mâle. Elles mesurent : I 420, II 300, III 338, IV 455 μ. Le 5-e article de la patte I a une longueur de 177 μ et une hauteur de 40 μ à l'extrémité. Le 6-e article, conformé comme celui du mâle, a une longueur de 83 μ.

Dans l'espace à tégument fin et souple compris entre le bouclier ventral et le bord postérieur du corps, sont placés, l'organe génital en avant, et les plaques postgénitales en arrière de celui-ci.

La fente génitale, longue de 98 μ, présente en avant un renforce-

ment chitineux noduliforme fusionné avec la cuirasse ventrale, et, en arrière, un énorme renforcement chitineux recourbé en arc dont l'envergure est de 197 μ. Largeur du champ génital, en avant du „Stutzkörper" postérieur 130 μ. Les plaques génitales, en croissant, sont percées chacune de 3 disques génitaux et portent 3 petits et fins poils en avant du premier disque génital et un seul poil en arrière de celui-ci.

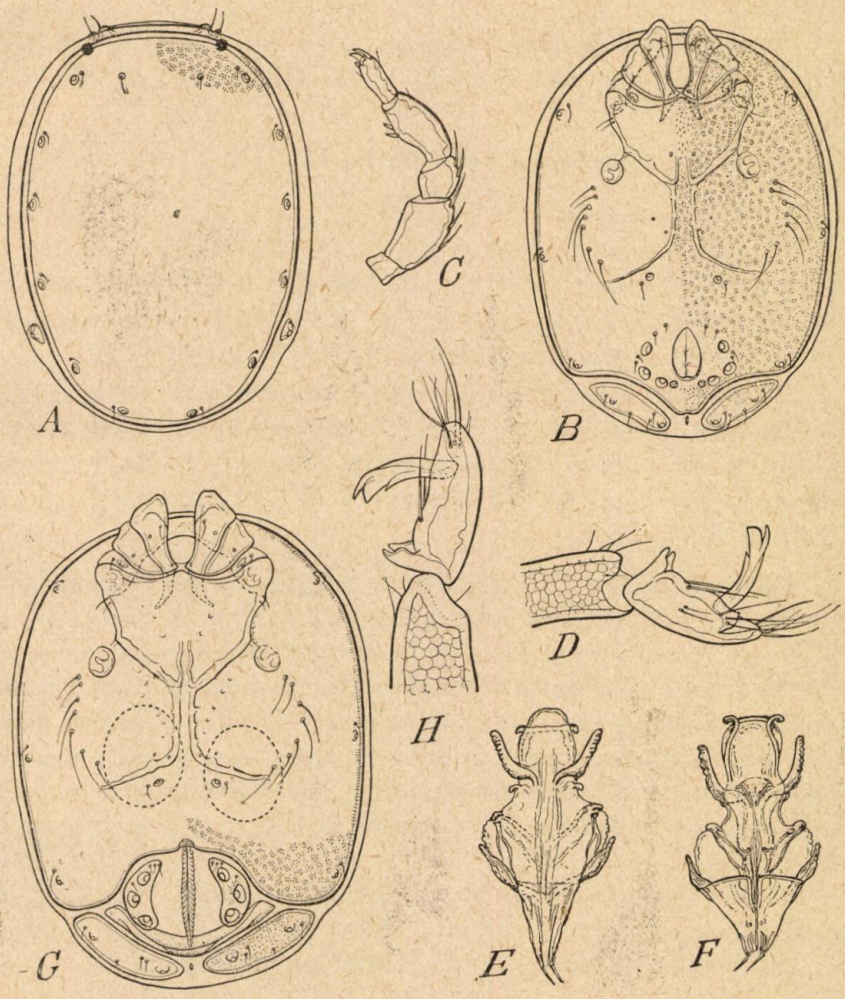


Fig. 4.

Stygomomonia latipes Szalay. **Mâle :** A) face dorsale ; B) face ventrale ; C) palpe ; D) dernier article de la Ire patte vu du côté externe ; E) support du pénis vu du dos ; F) le même vu ventrale. **Femelle :** G) face ventrale ; H) palpe ;) dernier article de la Ire patte, vu du côté externe.

L'orifice excréteur est situé tout près du renforcement chitineux postérieur entre les plaques postgénitales.

L'individu femelle portait 2 oeufs ovales, longs de 120 μ et larges de 97 μ.

Localités : Vallée de la Rybnizta, dans un sondage, le 6. VIII. 1947, 1♂ et 5♀ dont une ovigère ; le 15. VIII. 1947, 1♂, 1♀.

Mideopsis orbicularis (O. F. M.)
(fig. 5 A-H).

Cette espèce connue depuis O. F. Müller, très répandue en Europe, en Asie et en Amérique du Nord, a été signallée déjà en Yougoslavie par Z. Georgevič et K. Viets [1]) En Roumanie nous ne l'avons jamais rencontrée.

Nous avons à notre disposition un individu mâle et deux individus femelles, aussi nous en donnerons ci-dessous une brève description. Comparez cette description à celles données par Neuman [14]) Piersig [15]), Walcott [16]), Soar et Williamson [17]), Szalay [18]) et Viets [19]).

Mâle : Longueur du corps 775 μ, largeur 743 μ. Distance entre les yeux 267 μ, entre les soies antenniformes 175 μ. La carapace dorsale longue de 687 μ et large de 656 μ, est plus rétrécie en avant. Elle est percée de six ouvertures glandulaires accompagnée chacune d'un fin poil, dont trois d'une côté et trois de l'autre. Dans sa moitié antérieure elle est surmontée en outre de deux autres poils plus rapprochés, un peu en arrière des premières ouvertures glandulaires.

L'organe maxillaire a une longueur de 115 μ et une hauteur de 90 μ.

La mandibule, forte et trapue, ayant un onglet puissant et recourbé, mesure, celui-ci y compris, 154 μ de long et 70 μ de haut.

Les dimensions, en μ, du palpe, sont les suivantes :

	PI	PII	PIII	PIV	PV
Longueur dorsale . .	25	62	33	75	42
Longueur ventrale . .	16	48	26	59	30
Hauteur	26	40	42	28	14.

PII porte 4 soies lisses sur son bord dorsal, dont un sur sa face interne. PIII en offre 2 près de son extrémité distale. PIV est muni sur son bord ventral, d'une forte proéminence pointue, en forme de corne et surmonté de 2 fins poils.

Les épimères, fortement chitinisés, sont fusionnés ensemble. Les Ep. I ont leur bord interne renforcé en avant, mais ils n'ont pas un prolongement pointu trop accusé. Le champ épiméral mesure 505 μ de long et 512 μ de large au niveau des points d'insertion des pattes

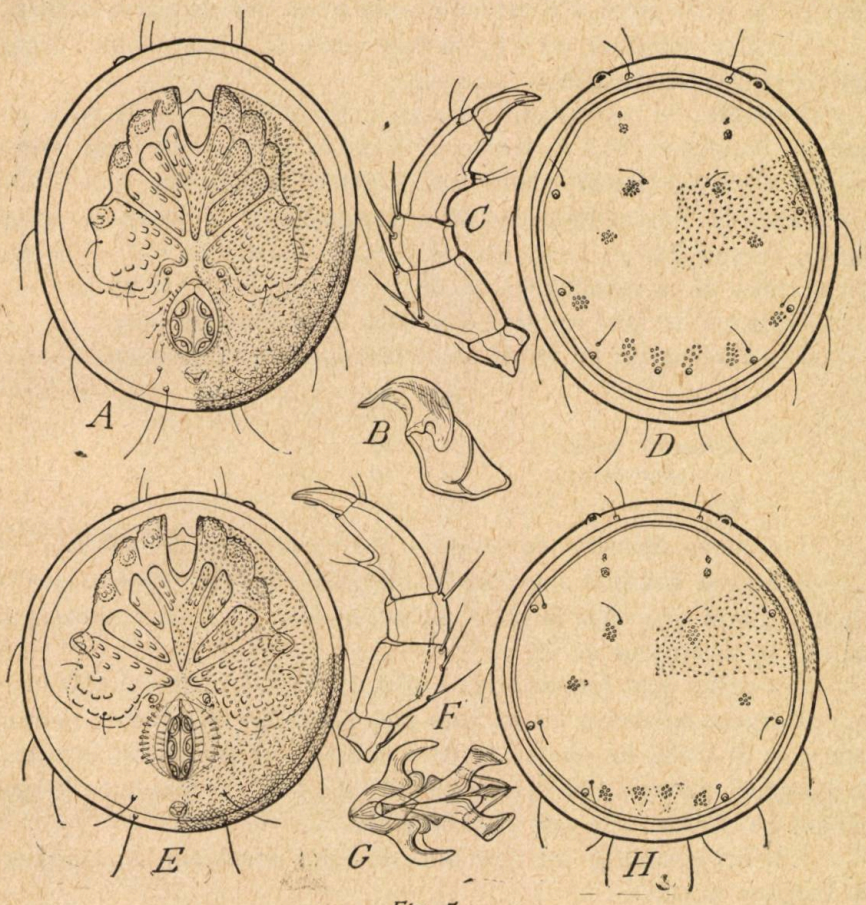


Fig. 5.

Mideopsis orbicularis (Müller). **Femelle :** A) face ventrale B) mandibule ; C) palpe ; D) face dorsale. **Mâle :** E) face ventrale ; F) palpe ; G) support du penis ; H) face dorsale.

de la dernière paire, où les Ep. IV présentent un prolongement latéral fort et pointu. La profondeur du sinus maxillaire est de 140 μ, sa largeur de 68 μ.

Les pattes, pourvues de soies natatoires, sont longues de : I 364, II 385, III 480, IV 552 μ.

L'organe génital, à 3+3 cupules, est long de 203 μ et large de 170 μ. La longueur de la fente génitale est de 153 μ, celle du champ

labial de 62 μ. Les cupules sont plus rapprochées de la fente génitale que chez la femelle et le champ génital est plus large que chez celle-ci.

Le support chitineux du pénis est très vigoureux, ses cornes postérieures sont puissantes et recourbées en avant. Il mesure 98 μ de long et 62 μ de large à l'extrémité antérieure des dernières cornes.

L'orifice excréteur est situé à une distance égale, entre l'organe génital et le bord postérieur du corps.

Femelle. Se distinguant du mâle, tout d'abord par sa taille plus grande (longueur 843 μ, largeur 737 μ) et ensuite par son organe génital à champ labial plus élargi. Distance entre les yeux 318 μ entre les soies antenniformes 208 μ. Longueur de la carapace dorsale 748 μ, largeur 715 μ. Longueur de l'organe maxillaire 120 μ, hauteur 93 μ, celles de la mandibule, onglet y compris 160 μ et 73 μ.

Le palpe est bâti sur le même plan que celui du mâle.

Les dimensions, en μ, de ses articles sont les suivantes:

	PI	PII	PIII	PIV	PV
Longueur dorsale . .	33	70	37	77	45
Longueur ventrale . .	18	50	25	60	38
Hauteur	27	45	40	28	17.

Le champ épiméral est long de 510 μ, et large de 480 μ.

Les sinus compris entre les Ep. IV, où s'engage l'organe génital, est plus étroit que chez le mâle. La profondeur du sinus maxillaire est de 150 μ, sa largeur de 75 μ.

Les pattes sont longues de: I 380, II 406, III 503, IV 570 μ.

L'organe génital a les cupules plus éloignées de la fente génitale que chez le mâle. Le champ labial a une largeur de 204 μ. Longueur de l'organe génital 100 μ, largeur 137 μ. Par conséquant l'organe génital est moins large que chez le mâle.

L'orifice excréteur est plus près du bord postérieur du corps que de l'organe génital.

Localités: Vallée de la Bosna, dans la rivière elle-même le 31. VII. 1947, 1♂, 2♀.

Balcanohydracarus alveolatus Motaş et Tanasachi. *Bull. Sect. Sci. Acad. Roum.* T. XXX, No. 6, pp. 357-360 fig. 1 A-F. *(fig. 6 A-E et fig. 7 F-J)*

Cette espèce appartenant à un genre voisin de *Hungarohydracarus* Szal. (Szalay [8]), 1943 pp. 42-46 Pl. II fig. 1-6) offre une cuticule fortement cuirassée ayant une structure alvéloaire et présentant des petits pores sur et entre les alvéoles. La carapace dorsale

ovale, à bord antérieur tronqué, est séparée de la cuirasse ventrale par un sillon dorsal complet. Les palpes, plus faibles, ont à l'extrémité distale du *P IV* un prolongement en forme de corne pointue dirigée en avant. Les épimères ont la même constitution et les mêmes caractères que dans le genre voisin, mais ils ne s'étendent pas en avant, aussi loin que dans ce dernier. La „formation épistomale" est absente. L'organe génital se distingue de celui du genre voisin par ses plaques rappelant celles des femelles d'*Arrenurus*.

Femelle : la coloration du corps, jaune-verdâtre ; forme de celui-ci ovale-allongée, ayant le bord frontal presque réctiligne et bien plus élargi que chez le représentant du genre voisin.

Les yeux, très petits et pigmentés de noir, sont bien plus éloignés l'un de l'autre que dans ce dernier et se trouvent à une distance de 176 μ l'un de l'autre. Les ouvertures des glandes antennaires sont à une distance de 116 μ l'une de l'autre, étant plus éloignées que chez le genre établi par Szalay. Entre les yeux on trouve, chez notre espèce, deux fortes et longues soies dirigées en avant et à une distance un peu plus grande l'une de l'autre que les soies antennaires.

La carapace dorsale est longue de 688 μ et large de 440 μ. Elle est surmontée de 4 paires de soies plus près des bords du corps. Dans la moitié postérieure de celui-ci on trouve 3 longues soies sur le bord latéral.

L'organe maxillaire est moins développé, par rapport à la taille du corps, que celui de la femelle de *Hungarohydracarus subterraneus* Szal. (v. C. Motaş et J. Tanasachi, [3]), 1946, pp. 55). Il a 120 μ de long et 68 μ de large, tandis que chez ce dernier, il a respectivement 122 et 83 μ.

La mandibule est plus trapue et très forte à la base, et son onglet puissant est en crochet au lieu d'être subuliforme. Elle mesure, l'onglet y compris, 106 μ de long, son hauteur, à l'extrémité proximale, est égale à la longueur de l'article.

Les palpes, bien moins forts que ceux du genre voisin ont un aspect plus grêle. *PI* dépourvu de soie dorsale. *PII* offre deux fortes et longues soies près de son extrémité distale. *PIII* présente un prolongement distal et ventral pointu, portant 2 fins poils sur la face interne. Nos dessins (fig. 7 *A - D* et *E - J*) montrent mieux que toute descriptions les différences entre les palpes et les mandibules dans les deux genres.

Les articles du palpe ont, en μ, les dimensions suivantes :

	PI	PII	PIII	PIV	PV
Longueur dorsale	27	28	40	65	37
Longueur ventrale	10	24	17	32	34
Hauteur	18	32	29	30	11.

La champ épiméral, ne dépassant que très peu en avant le bord frontal et ressemblant à celui de la femelle de *Hungarohydracarus*, mesure 450 μ de long et 416 μ de large. Les épimères, disposés en 3 groupes, ont la ligne de suture entre les plaques I, ainsi que le bord postérieur,

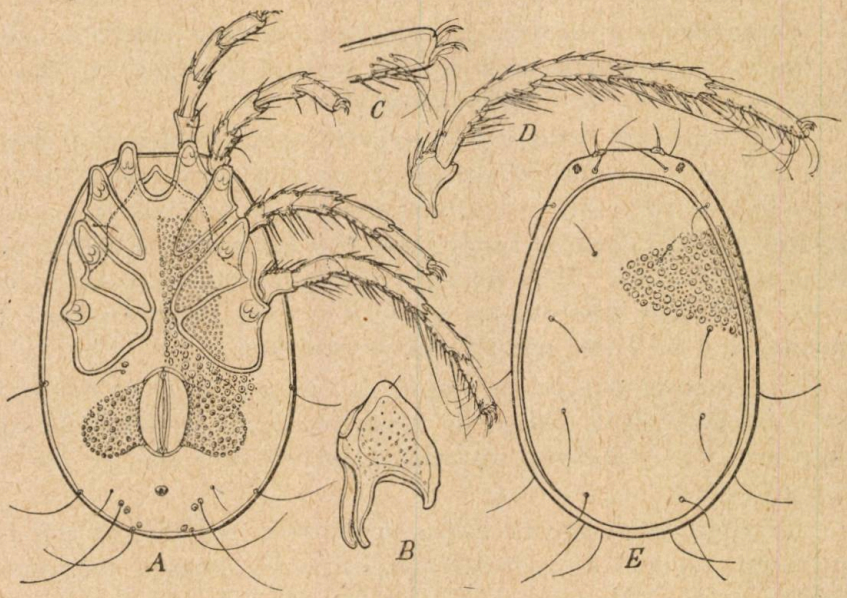


Fig. 6.

Balcanohydracarus alveolatus Mts et Tschi. **Femelle:** A) face ventrale; B) organe maxillaire vu du côté; C) extrémité de la IV-e patte; D) IV-e patte; E) face dorsale.

de celles-ci, complètement effacés, comme chez l'autre genre. Mais la porosité des épimères est plus grossière que celle de la cuirasse du corps. La profondeur du sinus maxillaire est de 118 μ, sa largeur maximum de 94 μ.

Les pattes sont, dépourvues de soies natatoires et présentent des soies en épine plus nombreuses sur le bord ventral des articles; par rapport à la longueur du corps, elles sont plus courtes que dans l'autre genre et mesurent: I 355, II 427, III 488, IV 570 μ. Le 5-e et le 6-e articles des pattes IV présentent chacun une forte et longue soie distale sur leur bord ventral. Le dernier article des pattes postérieures offre en outre 7 épines sur son bord ventral, 9 fins poils sur sa face

interne, insérés un peu en dessus du bord ventral, 2 sur sa face externe et 1 sur le bord dorsal près des griffes. Celles-ci sont pourvues d'une dent accessoire interne plus courte et d'une expansion ventrale élargie.

L'organe génital externe, se distigue de celui du genre voisin

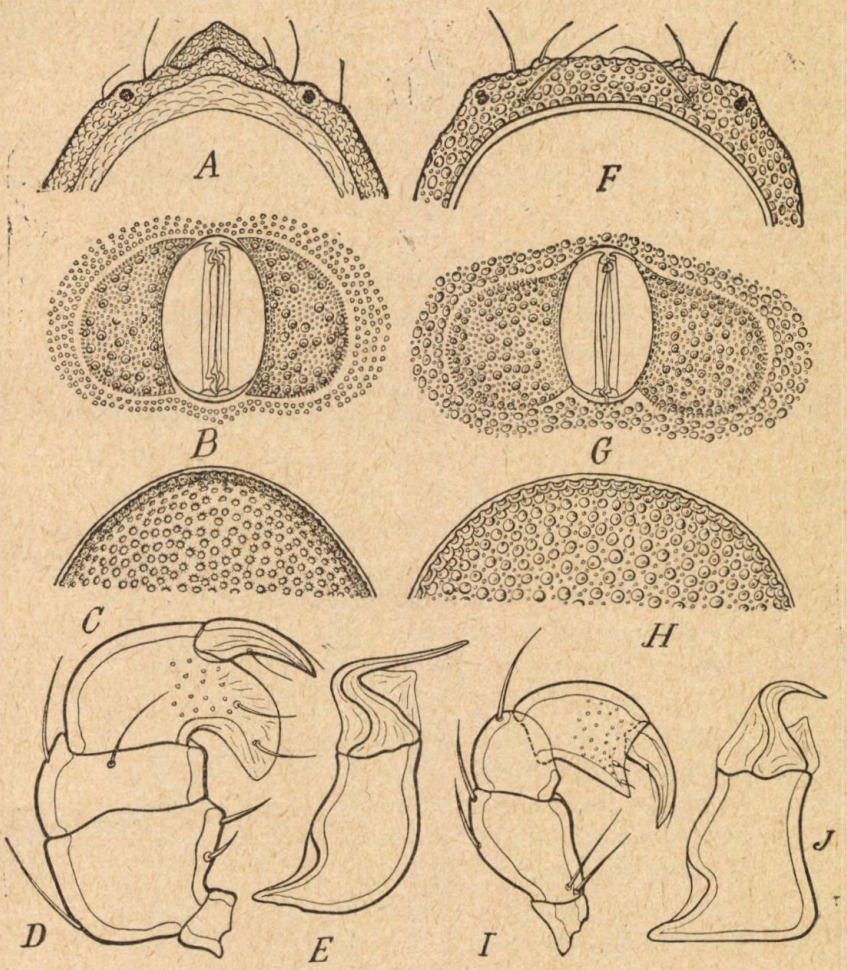


Fig. 7.

Hungarohydracarus subterraneus Szal. **Femelle :** A) partie antérieure du corps, bouclier dorsal enlevé ; B) Organe génital ; C) partie antérieure du bouclier dorsal ; D) palpe ; E) mandibule.

Balcanohydracarus alveolatus Mts et Tschi. **Femelle :** F–J, les mêmes parties, vues au même grossissement.

par ses plaques finement chagrinées, et en forme d'aile, comme celles de certains *Arrenurus* femelles. La longueur de l'organe génital est de 155 μ, la largeur de 329 μ. Le champ labial est long de 144 μ et

large de 94 μ. En avant et en arrière de la fente génitale on trouve un „*Stützkörper*" en croissant. Le nombre des disques génitaux est de 76 + 80, tandis que chez *Hungarohydracarus* il est de 39 + 43 chez la femelle.

Sur la face ventrale on trouve deux ouvertures glandulaires, accompagnées de soies entre les Ep. II et III, deux entre le Ep. IV et l'organe génital ainsi que deux paires en arrière de l'orifice excréteur accompagnées chacune d'une très longue soie.

L'orifice excréteur est placé entre l'organe génital et le bord postérieur du corps à une distance égale du premier et du second. Il est flanqué de deux poils plus courts.

Localités : Vallée de la Kuzica, affluent droit de la rivière de Lashva tributaire de la Bosna. Sondage à 20 m. du pont de la Kuzica, à environ 75 m. du bord de ce ruisseau, dans le cailloutis et le sable, le 21. VIII. 1947, temp. 19°, 1 ♀.

Remarques écologiques faunistiques et zoogéographiques

Parmi les espèces d'Hydrachnelles recueillies jusqu'à présent en Yougoslavie, et qui pour la plupart sont épigées, l'on peut, à notre avis, considérer comme phréaticoles (euphréatiques) dans notre sens [3 et 10] les suivantes :

1. *Acherontacarus halacaroides* Viets.
2. *Acherontacarus tonticolus* Viets.
3. *Tartarothyas micrommata* Viets.
4. *Atractides jeanneli* Mts et Tschi.
5. *Karpamuracarus pardaricola* Viets.
6. *Megapus subterraneus* Viets.
7. *Megapus cisternarum* Viets.
8. *Neumania phreaticola* n. sp.
9. *Pionella karamani* Viets.
10. *Lethaxona pygmaea* Viets.
11. *Parabrachypoda montii* Viets.
12. *Kongsbergia pectinigera* Mts et Tschi.
13. *Stygomomonia latipes* Szalay.
14. *Stygohydracarus troglobius* Viets.
15. *Balcanohydracarus alveolatus* Mts et Tschi.

De celles-ci : *Atractides jeanneli, Neumania phreaticola, Kongsbergia pectinigera, Stygomomonia latipes* et *Balcanohydracarus alveolatus* sont nouvelles pour la faune yougoslave. De même que les autres mentionnées ci-dessus, elles n'ont jamais été recontrées dans les eaux épigées.

D'autres espèces. comme par exemple *Atractides ellipticus* (nouveau aussi pour la Yougoslavie), *Pseudotorrenticola rhynchota, Axonopsis gracilis, Aturus crinitus* peuvent être phréatoxènes (xénophréatiques) sinon phréatophiles (tychophréatiques) dans notre sens. Le reste des espèces d'Hydrachnelles mentionnées par Viets, sont franchement épigées, soit d'eau courante soit d'eau stagnante. Une certaine préférence pour l'eau courante montrent certaines espèces du genre *Neumania* ainsi que *Mideopsis orbicularis*, mais, parmi les représentants du premier genre, on n'a rencontré jusqu'à présent dans l'eau souterraine que le *Neumania phreaticola* n. sp. Mts et Tschi.

En ce qui concerne la distribution géographique des espèces trouvées jusqu'à présent en Yougoslavie, Viets signale comme peu répandues les suivantes: *Lundbladia petrophila, Dartiella longipora, Pseudotorrenticola rhynchota, Megapus barsiensis. M. nodipalpis fluviatilis, Feltria cornuta, F. rouxi romijni.*

L'on doit ajouter à celles-ci encore quelques espèces qui n'ont été jusqu'à présent rencontrées qu'en Roumanie, où tout au plus en Roumanie et en Suisse. Ce sont: *Atractides jeanneli, Megapus cisternarum* qui ont été trouvées aussi en Roumanie, *Stygomomonia latipes* (syn. *St. szalayi* et *St. gracilli* Walter [4]))et *Kongsbergia pectinigera* (=? *K. alata* syn. *K. pectinata)* qui ont été signalées aussi tant en Roumanie qu'en Suisse. Il est fort probable qu'elles soient plus répandues, mais dans l'état actuel des recherches, on ne peut l'affirmer avec certitude.

Pour ce qui concerne les espèces d'Hydracariens phréaticoles de la Roumanie et de la Suisse nous renvoyons aux travaux de Szalay cités par nous (C. Motaş et J. Tanasachi [3]) et [9]); C. Motas, J. Tanasachi et Tr. Orghidan [10])); à nos travaux mentionnés ici ainsi qu'au travail de Walter [4]).

Parmi les espèces endémiques l'éminent acarologiste de Brême mentionne *Lebertia jadrensis, L. dalmatica, Atractides latissimus, Feltria brevipes liburnica* et *Aturus karamani.* Mais ce dernier a été trouvé depuis lors aussi en Roumanie.

Nous pensons qu'il faut ajouter à celles-ci (excepté *Aturus karamani)* également les suivantes: *Acherontacarus halacaroides, A. tonticolus, Tartarothyas micrommata, Megapus subterraneus, Kawamuracarus vardaricola* (voisin de *K. elongatus,* du Japon et de *K. chappuisi* de Roumanie), *Neumania phreaticola, Pionella karamani, Parabrachypoda montii, Lethaxona pygmaea* (voisin de *L. capitrons* de Roumanie et de Suisse, de *L. helvetica, L. micropora* et *L. dentipalpis* de Suisse). *Stygohydracarus troglobius* (voisin de *St. subter-*

raneus de Suisse), *Balcanohydracarus alveolatus* et probablement *Panisus longiscutatus*, épigé. Les *Stygothrombidiidae* trouvés en Yougoslavie, *Cerberothrombium armatum* au moins, sinon également *Stygothrombium karamani* (voisin de *Charonothrombium racovitzai* de Roumanie) sont probablement aussi dans le dernier cas.

Comme genres endémiques peuvent être considérés, à notre avis, les suivants: *Acherontacarus*, *Tartarothyas*, *Pionella*, *Parabrachypoda*, et *Balcanohydracarus* parmi les Hydrachnelles et, *Cerberothrombium* de la famille des *Stygothrombidiides*.

Naturellement, dans l'état actuel de nos connaissances biophréologiques, on ne peut l'affirmer en toute certitude. A ce sujet toute affirmation sera prématurée et toute généralisation hâtive, avant d'avoir eu fouillé les eaux souterraines de partout et, surtout, des Balcans. Il est à supposer que les eaux phréatiques de la Yougoslavie hébèrgent un bon nombre de reliques d'une faune plus étendue avant le Quaternaire, ainsi qu'un certain nombre d'endemismes.

Maintenant, si l'on tient compte des espèces dont nous signalons la présence dans le bassin de la Bosna, le nombre des Hydracariens, de la faune yougoslave, exceptés les Halacarides, s'élève à 152 espèces et sous-espèces.

Faculté des Sciences de l'Université de Bucarest

(Reçu le 15 Août 1948).

Références bibliographiques.

1. K. Viets. 1936. *Hydracarinen aus Jugoslawiens.* Arh. f. Hydrobiol. Bd. XXIX, pp. 351-409. 6 fig. 3 Tab., 10 Pl. avec 71 fig.
2. K. Viets. 1935. *Wassermilben aus unterirdischen Gewässern Jugoslaviens* Verhandl Intern. Ver. Limnol. Bd. VII.
3. C. Motaş et J. Tanasachi. 1946. *Acariens phréaticoles de Transylvanie* Notat. Biol. V. IV. N: os. 1-3.
4. C. Walter. 1947. *Neue Acari aus subterranen Gewässern der Schweiz und Rumäniens.* Verhandl. Naturf. Gesellsch. Basel. Bd. LVIII.
3. K. Viets. 1937. *Über einige Wassermilben aus Jugoslawien.* Zool. Anz. Bd. 120, H. 11-12.
6. K. Viets. 1943. *Überraschungen aus dem Gebiete der Wassermilben.* Arch. f. Hydrobiol. Bd. XL.
7. C. Motaş et J. Tanasachi. 1948. *Balcanohydracarus alveolatus.* n. g. n. sp. *Hydracarien phréaticole nouveau recueilli en Yougoslavie.* Bull. Sect. Sci. Acad. Roum. T. XXX, N: 06, pp. 357-360. Fig. 1 A-E.
8. L. Szalay. 1943. *Hungarohydracarus subterraneus n. g. n. sp., eine neue Süsswassermilbe aus unterirdischen Gewässern in Ungarn:* Ann. Hist. Nat. Mus. Hung. p. Zool. V. XXXVI, pp. 43-46, Pl. II.

9. C. Motaş et J. Tanasachi. 1947. *Un nouveau nom pour Stygomomonia latipes Szalay.* Bull, Sect. Sci. Acad. Roum. T. XXIX, N: 69.
10. C. Motas, J. Tanasachi et Tr. Orghidan. 1947. *Hydracariens phréaticoles de Roumanie.* Notat. biologicae. V. IV N:os 1-3.
11. C. Walter. 1931. *Hydracariens du Sahara central.* Bull. Soc. Hist. Nat. de l'Afrique du Nord, T. XX-p. 343, fig. 9, B.
12. L. Szalay. 1945. *Siebente Mitteilung über Wassermilben aus unterirdischen Gewässern des Karpathenbeckens*: Ann. Hist. Nat. Mus. Hung. Vol. XXXVIII, N: o 2 pp. 43-46 a-d et fig. 5 a-b.
12'. L. Szalay. 1943. *Eine neue subterran lebende Wassermilbe aus Ungarn.* Fragm. faun. T. VI, f. 2 pp. 58-63, fig. 1-7,
13. C. Walter. 1947. *Neue Acari aus subterranen Gewässern der Schweiz und Rumäniens.* Verhandl. Naturf. Gesellsch. Basel, Bd. LVIII, pp. 214-217, fig. 28, a-f.
14. C. J. Neuman. 1880. *Om sveriges Hydrachnider.* K. Svenska. Akad. Handling. Bd. 17, N: o 3, pp. 67-68, T. V, fig. 1, a-d.
15. R. Piersig. 1897-1900. *Deutschlands Hydrachniden,* Zoologica H. 22. pp. 262-267, T. XXVI fig. 67 a-l.
16. R. Walcott. 1905. *A review of the genera of the water mites.* Trans. Americ. micr. Soc. V. XXVI, pp. 197-198, Pl. XXII fig. 24-52 a.
17. Ch. D. Soar and W. Williamson. 1929. *The british Hydracarina.* The Roy Soc. V. 115 pp. 78-81, Pl.XLIII, fig. 1-2.
18. L. Szalay. 1926. *Bemerkungen über die Körperhaut von Mideopsis orbicularis* (O. F. Müll). Ann. Mus. Nat. Hung. V. XXIII pp. 258-262, fig. 1-2.
19. K. Viets. 1936. *Wassermilben oder Hydracarina.* II. Die Tierw. Deutschl. Teil 32.

A SUFFICIENT CONDITION FOR THE EXISTENCE OF A DERIVATIVE

by

V. S. ANANTHACHAR

1. It is well known that continuity is only a necessary condition for the existence of a derivative. The Lemma proved below will give a sufficient condition for the existence of a derivative to the right or the progressive derivative. I feel that this will bead to the solution of finding a necessary and sufficient condition for the existence of a derivative.

2. L e m m a : The progressive devivative exists uniquely at a point x_0 of a continuous function $f(x)$ defined in (a, b), if the equation $f(x) = mx$ has a finite number of roots in any small neighbourhood $(x_0 + \delta, x_0)$ of x_0 for all real values of m.

The progressive derivative is defined by the limit of the incrementary ratio (say I. R.)

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

as h tends to zezo through positive values: If this limit does not exist, the upper and lower limits of this ratio as h approaches zero through positive values, are termed the upper derivative to the right and the lower derivative to the right respectively.

Proof: We can easily say that

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - m(x_0 + h) - [f(x_0) - m x_0] + m h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h)}{h} .$$

When the equation $f(x) = mx$ has a finite number of roots in the neighbourhood of x_0, we can choose a neighbourhood, however small it may be, of x_0, so that it does not contain any root of $f(x) = mx$, (other than x_0, if x_0 is itself a root). This means that the I. R. maintains the same sign in any small neighbourhood of x_0. Consequently the I. R. cannot oscillate between positive and negative values in any small neighbourhood of x_0, however small it may be.

It has to be proved that the I. R. approaches a unique positive or negative limit. If possible let g be the lower limit of the I. R. as h approaches zero positively. By the property of the lower limit [1]) g can be a lower limit, if and only if, given an arbitrary ε, we have still for an infinite number of values of h

$$\frac{F(x_0 + h)}{h} < g + \varepsilon$$

i. e. $F(x_0 + h) < h(g + \varepsilon)$.

But for at most a finite number of values of h

$$\frac{F(x_0 + h)}{h} < g - \varepsilon$$

i. e. $F(x_0 + h) < h(g - \varepsilon)$.

Since $F(x_0 + h) \to 0$ as $h \to 0$, given an arbitrary ε, say $= h(g - \varepsilon)$, we can have for an infinite number of values of h, the second inequality abso satisfied, contrary to the definition of a lower, limit. This means that the lower and upper limits cannot exist separately, so that the I. R. either possesses a finite positive or negative limit or diverge to infinity (+ or —) but cannot oscillate and have a number of limiting points on the neighbourhood of x_0. Thus we have established that the progressive derivative exists uniquely (finitely or infinitely) but does not oscillate when $f(x) = mx$ has a finite number of roots in the neighbourhood of x_0. Similarly this result can be proved for the regressive derivative also.

University of Mysore
(India)

(Reçu le 15 Juillet 1948).

1) Theory and application of infinite series, K. Knopp, 1928, page 21.

SUR UNE CLASSE D'EQUATIONS INTÉGRALES ET INTÉGRO-DIFFÉRENTIELLES

par

ÉTIENNE FENYÖ

1°. La théorie des équations intégrales linéaires ayant un noyau $k(x, t) = k(x - t)$ périodique de l'argument $x - t$, qui jouent un rôle important dans l'analyse mathématique et dans la physique, a été développée, par une méthode très élégante, par M. E. Egerváry [1].

Dans cette note, nous donnons une nouvelle et simple démonstration aux théorèmes d'Egerváry, applicable aussi aux cas non linéaires et aux quelques équations intégro-différentielles. Nos considérations sont basées sur un lemme d'une nature très simple.

2°. *Lemme.* Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions de la classe L^2, périodiques avec la période 1, alors les coefficients complexes de Fourier de la fonction

$$m(x) = \int_0^1 f(x - t)\, g(t)\, dt$$

sont le produit des coefficients des deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$.

Démonstration :

$$\mu_n = \int_0^1 e^{2\pi i n x}\, m(x)\, dx = \int_0^1 e^{2\pi i n x} \left[\int_0^1 f(x - t)\, g(t)\, dt \right] dx =$$

$$= \int_0^1 g(t)\, dt \int_0^1 e^{2\pi i n x}\, f(x - t)\, dx = \int_0^1 g(t)\, dt \int_0^1 e^{2\pi i n (\xi + t)}\, f(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_0^1 e^{2\pi i n t}\, g(t)\, dt \int_0^1 e^{2\pi i n x}\, f(x)\, dx = \varphi_n \gamma_n \quad \text{c. q. f. d.}$$

Dans ce qui suit $f(x)$ désigne la fonction inconnue, $k(x)$, $g(x)$ etc. des fonctions données, périodiques avec la période 1. Nous désignons leurs coefficients complexes de Fourier par φ_n, $\varkappa_n$, γ_n respectivement.

3⁰. Considérons maintenant l'équation de Fredholm homogène de deuxième espèce :

$$f(x) - \lambda \int_0^1 k(x-t) f(t)\, dt = 0. \tag{1}$$

La valeur de λ, pour laquelle l'équation (1) a une solution non identique 0 est nommée une valeur caractéristique du noyau k. Selon le lemme, nous avons entre les coefficients de Fourier complexes y figurants les relations :

$$\varphi_n - \lambda \varkappa_n \varphi_n = 0 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Pour les $\varphi_n \neq 0$ on a les relations

$$\lambda \varkappa_n = 1 \quad \text{ou} \quad \varkappa_n = \frac{1}{\lambda},$$

ce qui est impossible pour une infinité des indices n, car la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varkappa_n^2$ doit être convergente. Donc si

$$\varkappa_{n_1} = \varkappa_{n_2} = \ldots = \varkappa_{n_e} = \frac{1}{\lambda} \ (\neq 0),$$

alors les solutions non triviales de l'équation (1) sont des combinaisons linéaires des fonctions

$$e^{-2\pi i n_1 x}, \ e^{-2\pi i n_2 x}, \ldots, \ e^{-2\pi i n_e x}.$$

Donc, nous avons démontré le

Théorème I. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) ait des solutions non banales est que λ soit égale à la réciproque de quelques uns des coefficients de Fourier complexes de la fonction $k(x)$.* C'est-à-dire les valeurs caractéristiques de $k(x)$ sont :

$$\lambda_n = \frac{1}{\varkappa_n} = \left[\int_0^1 e^{2\pi i n x} k(x)\, dx \right]^{-1} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

et les solutions conjointes :

$$C e^{-2\pi i n x} \qquad (C = \text{cons.}).$$

Théorème II. *Si l est le nombre des coefficients de Fourier complexes égaux à la réciproque de la valeur caractéristique λ, alors l est la multiplicité de λ.*

4⁰. La recherche des solutions de l'équation non homogène de deuxième espèce :

(2) $$f(x) - \lambda \int_0^1 k(x-t) f(t)\, dt = g(x)$$

peut être traiter d'une manière analogue. D'après le lemme, nous avons entre les coefficients de Fourier complexes les relations

$$\varphi_n - \lambda \varkappa_n \varphi_n = \gamma_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Si $\lambda \neq \frac{1}{\varkappa_n}$, alors $\varphi_n = \frac{\gamma_n}{1 - \lambda \varkappa_n}$. Si λ n'est pas une valeur caractéristique, l'équation admet évidemment une solution puisque la série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_n^2}{(1 - \lambda \varkappa_n)^2}$$

est toujours convergente. La solution est

$$f(x) \simeq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_n}{1 - \lambda \varkappa_n} e^{-2\pi i n x}.$$

5⁰. Traitons maintenant l'équation homogène de première espèce

(3) $$\int_0^1 k(x-t) f(t)\, dt = 0.$$

Appliquant le lemme nous avons :

$$\varkappa_n \varphi_n = 0 \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots).$$

Théorème III. *Si $\varkappa_n \neq 0$ pour chaque n, $\varphi_n = 0$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, l'équation (3) admet la seule solution $f(x) = 0$ presque partout. Si au contraire $\varkappa_{n_1} = \varkappa_{n_2} = \ldots = \varkappa_{n_e} = \ldots = 0$, l'équation admet pour solution les fonctions*

$$e^{-2\pi i n_1 x},\ e^{-2\pi i n_2 x}, \ldots,\ e^{-2\pi i n_e x}, \ldots$$

et leurs combinaisons linéaires.

6⁰. Quant à l'équation non homogène de première espèce

(4) $$\int_0^1 k(x-t) f(t)\, dt = g(x)$$

nous avons

$$\varkappa_n \varphi_n = \gamma_n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots).$$

D'où

$$\varphi_n = \frac{\gamma_n}{\varkappa_n} = \lambda_n \gamma_n,$$

où λ_n sont les valeurs caractéristiques de la fonction k.

Théorème IV. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation de première espèce ait une solution, est que la série*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n^2 \gamma_n^2$$

soit convergente.

Ce théorème était établie pour le cas général par E. Picard [4]).

7⁰. On peut aussi employer la méthode envisagée pour résoudre des équations intégrales non linéaires.

Considérons, par exemple, l'équation :

(5) $$f_p(x) = k(x) \quad (p \text{ entier quelconque})$$

où

$$f_2(x) = \int_0^1 f(x-t)\, f(t)\, dt\,; \ldots; \quad f_p(x) = \int_0^1 f_{p-1}(x-t)\, f(t)\, dt.$$

Selon le lemme

$$\varphi_n^p = \varkappa_n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Cette relation donne

$$\varphi_n = \varkappa_n^{1/p}$$

et nous avons le

Théorème V. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation binôme*

$$f_p(x) = k(x)$$

admet une solution est que la série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varkappa_n^{2/p}$$

soit convergente.

Si $\lambda_n = \frac{1}{\varkappa_n}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sont les valeurs caractéristiques de la fonction $k(x)$, on peut écrire cette condition comme suit : la convergence de la série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n^{-2/p}$$

est la condition nécessaire et suffisante de la solubilité de l'équation binôme (5). C'est la forme qui était établie par Lauricella pour le cas des noyaux symétriques [5]).

8⁰. Pour donner un exemple de l'application de notre méthode dans la théorie des équations intégro-différentielles, envisageons l'équation intégro-différentielle la plus simple :

$$\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} = \int_0^1 k(x - t\ ;\ y)\, f(t, y)\, dt\ ,$$

la fonction k étant périodique par rapport à la variable x :

$$k(x + 1\ ;\ y) = k(x,\ y)\ .$$

Formant les coefficients de Fourier par rapport à x :

$$\frac{d}{dy}\varphi_n(y) = \varkappa_n(y)\ \varphi_n(y)\ ,$$

on a par conséquence

$$\varphi_n(y) = C_n\, e^{\int^y \varkappa_n(\tau)\, d\tau}\ .$$

Et la solution de notre équation est donnée par la fonction

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n\, e^{\int^y \varkappa_n(\tau)\, d\tau - 2\pi i n x}$$

si cette série fonctionnelle définit une fonction dérivable par rapport à y et sommable par rapport à x.

Institut Polytechnique
de Budapest

(Reçu le 15 Octobre 1948).

Références bibliographiques

1. Egerváry J. – Mathematikai és Physikai Lapok. 23. 1914. p. 1–55.
2. Egerváry J. – loc. cit. p. 18.
3. Egerváry J. – loc. cit. p. 20.
4. E. Picard – Comptes rendus, Paris, 148. 1909. p. 1563 ; et p. 1707.
5. Lauricella – Atti della R. Accademia dei Lincei, vol. 20. 1911.

SUR CERTAINS POINTS UNIS ISOLÉS DES INVOLUTIONS CYCLIQUES D'ORDRE 17 APPARTENANT À UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

par

LUCIEN GODEAUX

Dans une note récente [1]), nous avons indiqué une méthode pour déterminer la structure des points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Nous en faisons ici une application à certains points unis d'une involution d'ordre 17. Nous estimons que de telles applications ne sont pas sans intérêt : non seulement que la méthode que nous avons imaginée conduit au but assigné, mais qu'elle permet également de déterminer la structure du point de diramation d'une surface image de l'involution. Un tel point est singulier pour cette surface et, au point de vue des transformation birationnelles, il est équivalent à un certain ensemble de courbes rationnelles qu'il s'agit de déterminer. Précisément, dans le cas considéré ici, le point de diramation est équivalent à un ensemble de six courbes rationnelles, l'une de degré virtuel -3, les autres de degré virtuel -2. Nous déterminons la configuration formée par ces courbes.

Dans le cours du travail, nous avons à considérer des courbes homologues tracées sur des surfaces birationnellement équivalentes ; nous les désignons par le même symbole, quelle que soit la surface envisagée.

1. Soit F une surface algébrique normale de l'espace S_R à R dimensions, transformée en soi par une homographie H, cyclique de période 17, possédant 17 axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{16}$. Nous supposerons que seul l'axe σ_0 rencontre la surface F, en un nombre fini de

1) *Structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (C. R., juillet 1948). Voir aussi notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Paris, Hermann, 1935) et différentes notes en cours d'impression dans le Bulletin de l'Académie de Belgique et dans celui de la Société des Sciences de Liége, 1948.

points, et nous désignerons par Σ_i la gerbe formée par les hyperplans passant par $\sigma_0, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{16}$.

Le système des sections hyperplanes de F sera désigné par $|C|$ et les systèmes linéaires partiels découpés par les hyperplans de Σ_0, $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{16}$ seront désignés respectivement par $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{16}|$.

L'homographie H engendre, sur la surface F, une involution I_{17}, d'ordre 17, ayant un nombre fini de points unis : les points de rencontre de F avec l'espace σ_0. Les systèmes linéaires partiels $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{16}|$ appartiennent à l'involution I_{17} ; le premier est dépourvu de points-base et les autres ont pour points-base les points unis de l'involution.

Soit r la dimension de $|C_0|$. En rapportant projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions, nous obtenons une surface normale Φ, image de l'involution. Nous désignerons par n l'ordre de Φ et par π le genre de ses sections hyperplanes I'_0. La surface F est alors d'ordre $17\,n$ et les courbes C ont le genre $17\,\pi - 16$.

2. Soit A un point uni non parfait de l'involution I_{17}, c'est-à-dire un point de F appartenant à l'axe σ_0 de H et en lequel le plan tangent α à F s'appuie en un point sur deux des axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{16}$. Nous supposerons d'une manière précise que le plan α, qui ne rencontre σ_0 qu'au seul point A, s'appuie en un point sur l'espace σ_1 et en un point sur l'espace σ_{11}. Nous désignerons respectivement par a, b les droites du faisceau (A, α) s'appuyant la première sur σ_1, la seconde sur σ_{11}.

Appelons C'_0 les courbes C_0 passant par A. Elles ont en ce point une certaine multiplicité, inférieure à 17, les tangentes étant confondues avec les droites a, b. Soit C_0'' les courbes C'_0 assujetties à toucher en A une droite distincte de a, b ; C_0''' les courbes C_0'' assujetties à toucher en A une droite distincte de a, b ; et ainsi de suite. Nous formons ainsi une suite de systèmes linéaires $|C'_0|, |C_0''|, |C_0'''|, \ldots$ ayant en A des multiplicités croissantes, les tangentes étant confondues avec a, b. On parvient ainsi à un dernier système $|C_0^{(\gamma)}|$, dont les courbes ont en A la multiplicité 17, les tangentes étant variables.

Notre but est en premier lieu de déterminer le comportement des courbes $C'_0, C_0'', C_0''', \ldots$ au point A.

Soit A_0 le point qui correspond sur Φ au point A, c'est-à-dire le point de Φ qui représente le groupe de l'involution I_{17} formé du point A compté 17 fois.

Désignons par $|\Gamma'_0|, |\Gamma_0''|, \ldots$ les systèmes de courbes, appartenant au système des sections hyperplanes $|I'_0|$ de Φ, qui corres-

pondent sur cette surface aux systèmes $| C_0' |$, $| C_0'' |$ ..... Le système $| C_0' |$ a la dimension $r-1$. Si nous rapportons projectivement ses courbes aux hyperplans d'un espace linéaire à $r-1$ dimensions, il correspond à la surface F une surface Φ_1, image de l'involution, projectivement identique à la projection de la surface Φ à partir du point A_0 sur un hyperplan. Les sections hyperplanes de Φ_1 sont les courbes Γ_0'. Le point A_0 est singulier pour la surface Φ et au domaine de ce point sur cette surface correspond sur Φ_1 un ensemble de courbes qu'il s'agit de déterminer.

Le système $| C_0'' |$ a la dimension $r-2$ et le système $| \Gamma_0'' |$, sur la surface Φ_1, est découpé par les hyperplans passant par un point A'_0 de la surface. Si l'on rapporte les courbes de $| C_0'' |$ aux hyperplans d'un espace à $r-2$ dimensions, on obtient une surface Φ_2, projectivement identique à la projection de Φ_1, à partir de A'_0, sur un hyperplan. La surface Φ_2 a comme sections hyperplanes les courbes Γ_0'' et au domaine du point A'_0 sur Φ_1 correspond sur Φ_2 un ensemble de courbes, et ainsi de suite.

Nous nous proposons en second lieu de déterminer les ensembles de courbes ainsi déterminés sur les surfaces Φ_1, Φ_2, ..., c'est-à-dire la structure du point A_0 sur la surface Φ.

3. Pour atteindre notre but, nous devons déterminer les nombres entiers positifs satisfaisant aux conditions

$$\lambda + \mu < 17, \quad \lambda + 11\mu \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 17).$$

On trouve facilement les solutions

$$\lambda = 1, \ \mu = 3; \quad \lambda = 6, \ \mu = 1; \quad \lambda = 2, \ \mu = 6; \quad \lambda = 7, \ \mu = 4;$$
$$\lambda = 3, \ \mu = 9; \quad \lambda = 12, \ \mu = 2; \quad \lambda = 8, \ \mu = 7; \quad \lambda = 4, \ \mu = 12.$$

Les nombres $\lambda + \mu$, λ, μ donnent respectivement les multiplicités avec du point A et les nombres de tangentes confondues avec b et a des courbes C_0', C_0'', ...

Les courbes C'_0 ont en A la multiplicité quatre, trois tangentes étant confondues avec a et la dernière avec b.

Les courbes C_1, C_{11} passent simplement par A en y touchant, les premières la droite b, les secondes la droite a. Chacune de ces courbes doit rencontrer les courbes C_0' en 17 points confondus en A.

Les courbes C_0' ont en commun une suite de dix points fixes, infiniment voisins successifs de A, le premier appartenant à a, et une seconde suite de 13 points fixes, infiniment voisins successifs de A, le premier se trouvant sur b. Nous désignerons par A_1, A_2, ..., A_{10} les points de la première suite, par B_1, B_2, ..., B_{13} ceux de la

seconde. Ces points sont unis non parfaits pour l'involution I_{17}, sauf les points A_{10}, B_{13} qui sont unis parfaits.

Les courbes C_0' ont la multiplicité 3 en A_1, la multiplicité 2 en A_2 et passent simplement par les points $A_3, A_4, \ldots, A_{10}$. Elles ont encore en commun un point simple A_{21}, uni parfait pour I_{17}, infiniment voisin de A_2 et distinct de A_3. Les courbes C_0' passent simplement par les points $B_1, B_2, \ldots, B_{13}$. Deux courbes C_0' ont en commun 3.17 points absorbés en A et par conséquent le système $|\Gamma_0'|$ a le degré $n-3$, c'est-à-dire que la surface Φ_1 a l'ordre $n-3$.

Entre une courbe Γ_0' et la courbe C_0' homologue, nous avons une correspondance $(1,17)$ présentant trois points unis A_{10}, A_{21}, B_{13}. Les courbes C_0' étant de genre $17\pi-26$, la formule de Zeuthen donne pour les courbes Γ_0' le genre $\pi-2$.

Aux points infiniment voisins de A_{10} correspondent sur Φ_1 les points d'une droite α_1. De même, aux points infiniment voisins de A_{21}, correspondent les points d'une droite α'_1 et aux points infiniment voisins de B_{13} correspondent les points d'une droite β_1 de Φ_1.

On en conclut que le point de diramation A_0 est triple pour la surface Φ, le cône tangent étant formé des trois plans qui projettent de ce point les trois droites α_1, α'_1, β_1.

4. Envisageons les courbes C_0''. Elles ont en A la multiplicité 7, six tangentes étant confondues avec b et la dernière avec a. Les courbes C_1, C_{11} rencontrent chacune les courbes C_0'' en 17 points confondus en A.

Les courbes C_0'' passent simplement par les points $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$; elles passent triplement par le point B_1, doublement par B_2, B_3, B_4, simplement par B_5. Elles ont encore en commun une suite de trois points fixes B_{11}, B_{12}, B'_{13} infiniment voisins successifs de B_1 et un point simple fixe B_{51}, infiniment voisin de B_5. Ces points sont unis pour I_{17} et les points B'_{13}, B_{51} sont unis parfaits.

La surface Φ_2 est d'ordre $n-5$ et ses sections hyperplanes sont de genre $\pi-3$.

Au domaine du point B'_{13} correspond sur Φ_2 une droite β_1' et au domaine du point B_{51}, une droite β_1''. On en conclut que le point A'_0 est double biplanaire pour la surface Φ_1, les plans tangents en ce point étant ceux qui projettent les droites β_1', β_1'' du point A'_0.

Les droites β_1', β_1'' se rencontrent en un point.

Observons que dans le passage de Φ_1 à Φ_2, les droites α_1', β_1 disparaissent, tandis que la droite α_1 continue d'exister sur Φ_2. On en conclut que les droites α_1', β_1 passent par le point double A'_0. A ces

droites correspondent sur la surface Φ_2 des points singuliers situés un sur chacune des droites β_1', β_1''.

5. Les courbes C_0''' ont en A la multiplicité huit, six tangentes étant confondues avec a et deux avec b. Elles passent six fois par le point A_1, trois fois par le point A_2 et par le point A_{21}, deux fois par les points B_1, B_2, B_3, B_4, une fois par les points B_5 et B_{51}.

Sur la surface Φ_3, que l'on obtient en rapportant projectivement les courbes C_0''' aux hyperplans d'un espace à $r-3$ dimensions et qui a pour sections hyperplanes les courbes Γ_0''', il correspond au domaine du point A_{21} une cubique gauche α'_1 et à celui du point B_{51}, une droite β_1''. Il en résulte que sur la surface Φ_2, les courbes Γ_0''' sont découpées par les hyperplans passant par le point A_0'' qui représente, sur cette surface, la courbe rationnelle α'_1. Ce point est triple pour la surface Φ_2 et appartient à la droite β_1'. Par conséquent, le point qui représente sur la surface Φ_2 la droite β_1 appartient à la droite β_1''.

La surface Φ_3 a l'ordre $n-8$ et les courbes Γ_0''' le genre $\pi-5$.

6. Passons aux courbes C_0 [4]. Elles ont en A la multiplicité 11, quatre tangentes sont confondues avec a et sept avec b. Ces courbes passent quatre fois par le point A_1, deux fois par les points A_2, A_{21}, quatre fois par B_1, une fois par les points B_{11}, B_{12}, B'_{13}, deux fois par B_2, une fois par un point B_{21} infiniment voisin de B_2 et une fois par un point B_{211} infiniment voisin de B_{21}.

Considérons la surface Φ_4, obtenue en rapportant projectivement les courbes C_0 [4] aux hyperplans d'un espace linéaire à $r-4$ dimensions ; soient Γ_0 [4] aux hyperplanes. Au domaine du point A_{21} correspond sur Φ_4 une conique α'_1, au domaine du point B'_{13} une droite β_1' et au domaine du point B_{211} une droite β_1'''. Sur la surface Φ_3, les courbes Γ_0 [4] sont découpées par les hyperplans passant par un point A_0''' appartenant aux courbes α'_1 et β_1''. L'ordre de la surface Φ_4 est $n-10$ et le genre de ses sections hyperplanes $\pi-6$. Le point A_0''' est double pour la surface Φ_3. Le domaine de ce point a pour homologue sur Φ_4 les droites β_1', β_1''', donc A_0''' est double biplanaire pour la surface Φ_3.

Observons que dans le passage de Φ_2 à Φ_3, la droite β_1' est remplacée par un point, qui coïncide précisément avec le point A_0'''.

7. Les courbes C_0 [5] ont la multiplicité 12 en A, neuf tangentes coïncident avec a et trois avec b. Ces courbes passent quatre fois par le point A_1, deux fois par deux points A_{11}, A_{12} et une fois par un point A_{13} infiniment voisin successifs de A_1, une fois par un point A_{131} infiniment voisin de A_{13}, une fois par les points A_2 et A_{21}, trois fois par B_1, deux fois par B_2, une fois par B_{21} et B_{211}.

Sur la surface Φ_5, obtenue en rapportant projectivement les courbes $C_0^{(5)}$ aux hyperplans d'un espace à $r-5$ dimensions et dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(5)}$, il correspond aux domaines des points A_{131}, A_{211}, B_{211} respectivement des droites α_1'', α_1', β_1'''. La surface Φ_5 est d'ordre $n-11$ et ses sections hyperplanes $\Gamma_0^{(5)}$ ont le genre $\pi-6$. On en conclu que sur la surface Φ_1, les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ sont découpées par les hyperplans passant par un point $A_0^{(4)}$ appartenant à la conique α_1' et à la droite β_1'. Ce point est simple pour la surface Φ_4 et la droite α_1'' est par conséquent une courbe exceptionnelle.

8. Avant d'aller plus loin, nous allons déterminer la structure du point de diramation A_0.

Nous avons rencontré six courbes rationnelles provenant des domaines des différents ordres du point A_0 sur Φ. Ecrivons-les dans l'ordre

$$\alpha_1,\ \alpha_1',\ \beta_1',\ \beta_1''',\ \beta_1'',\ \beta_1.$$

Il résulte de ce qui précède que chacune de ces courbes rencontre la précédente et la suivante, mais ne rencontre pas les autres.

Nous avons

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0' + \alpha_1 + \alpha_1' + \beta_1' + \beta_1''' + \beta_1'' + \beta_1.$$

Soit x le degré virtuel de α_1. En prenant les intersections des courbes précédentes avec α_1, nous avons

$$0 = 1 + x + 1,$$

d'où $x = -2$. La courbe α_1 est de degré virtuel -2.

De même, si x est cette fois le degré virtuel de α_1', nous avons

$$0 = 1 + 1 + x + 1,$$

d'où $x = -3$. La courbe α_1' est de degré virtuel -3.

En tenant compte du fait que les courbes Γ_0' ne rencontrent pas β_1', β_1''', β_1'', mais rencontrent β_1 en un point, on trouve de même que ces quatre courbes ont le degré virtuel -2.

On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0'' + \alpha_1 + \alpha_1' + 2\beta_1' + 2\beta_1''' + 2\beta_1'' + \beta_1.$$

On vérifie que les courbes Γ_0'' rencontrent chacune des courbes α_1, β_1', β_1'' en un point, mais ne rencontrent pas α_1', β_1''', β_1.

On a ensuite

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0''' + \alpha_1 + 2\alpha_1' + 2\beta_1' + 2\beta_1''' + 2\beta_1'' + \beta_1,$$

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(4)} + \alpha_1 + 2\alpha_1' + 3\beta_1' + 3\beta_1''' + 2\beta_1'' + \beta_1.$$

On vérifie que le nombre des points de rencontre des courbes Γ_0''', $\Gamma_0^{(4)}$ avec les courbes α_1, α_1', ..., β_1 sont bien ceux qui ont été rencontrés plus haut.

Sur Φ_4, les courbes $\Gamma_0^{(5)}$ sont les courbes $\Gamma_0^{(4)}$ passant par le point simple commun aux courbes α'_1, β_1'.

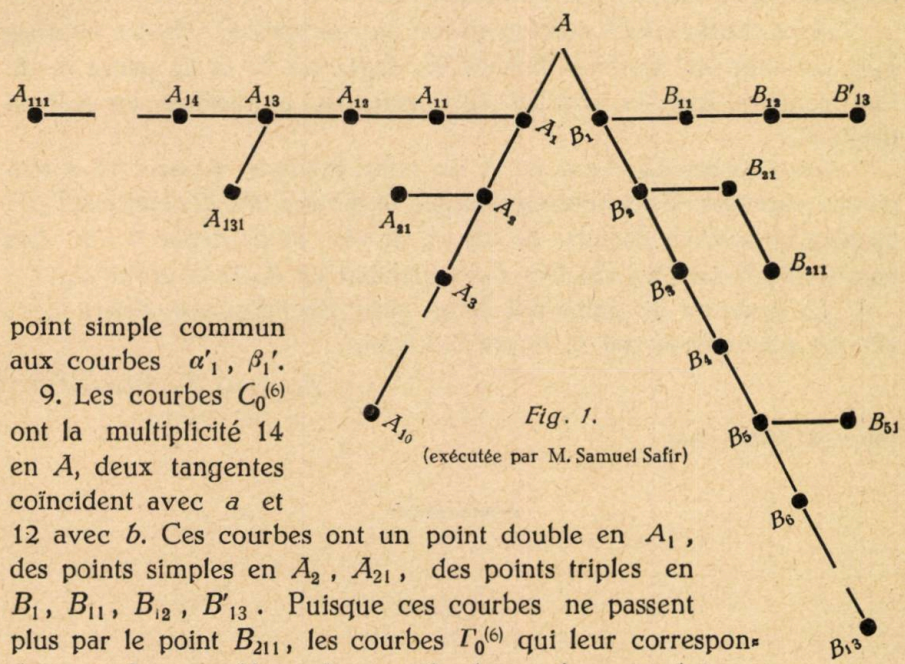


Fig. 1.
(exécutée par M. Samuel Safir)

9. Les courbes $C_0^{(6)}$ ont la multiplicité 14 en A, deux tangentes coïncident avec a et 12 avec b. Ces courbes ont un point double en A_1, des points simples en A_2, A_{21}, des points triples en B_1, B_{11}, B_{12}, B'_{13}. Puisque ces courbes ne passent plus par le point B_{211}, les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ qui leur correspondent sur Φ_4 sont découpées par des hyperplans qui doivent passer par un point appartenant à la droite β_1'''. Ces hyperplans passent d'autre part par le point $A_0^{(4)}$, commun aux courbes α'_1, β_1', puisque les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ sont des courbes $\Gamma_0^{(5)}$ particulières. De plus, les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ doivent rencontrer la droite β_1' en trois points, donc elles sont découpées par les hyperplans passant par cette droite. On a

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma_0^{(6)} + \alpha_1 + 2\alpha_1' + 4\beta_1' + 3\beta_1''' + 2\beta_1'' + \beta_1 .$$

La surface Φ_6 obtenue en partant des courbes $C_0^{(6)}$, est d'ordre $n-14$ et ses sections hyperplanes $\Gamma_0^{(6)}$ ont le genre π 8.

10. Les courbes $C_0^{(7)}$ ont la multiplicité 15 en A, 7 tangentes sont confondues avec a et 8 avec b. Elles passent deux fois par les points A_1, A_{11}, A_{12}, une fois par les points A_{13}, A_{131}, deux fois par les points B_1, B_{11}, B_{12}, B'_{13}.

Sur la surface Φ_4, il leur correspond des courbes $\Gamma_0^{(7)}$, formant un système linéaire de degré n—15 et de genre π—8. Ce sont les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ passant par le point $A_0^{(4)}$.

Les courbes $C_0^{(8)}$ ont la multiplicité 16 en A, *12* tangentes confondues avec *a* et quatre avec *b*. Elles passent simplement par le point A_1 et par une suite de 11 points fixes $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{14}, \ldots, A_{1,11}$. Elles passent d'autre part simplement par les points B_1, B_{11}, B_{12}, B_{13}'. Le point $A_{1,11}$ est uni parfait pour I_{17}.

Aux courbes $C_0^{(8)}$ correspondent sur la surface Φ_4 les courbes $\Gamma_0^{(6)}$, formant un système linéaire de degré $n-16$ et de genre $\pi-8$. Ces courbes sont les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ assujetties à toucher en $A_0^{(4)}$ la droite β'_1.

Les courbes $C_0^{(9)}$ ont en A un point multiple d'ordre 17 à tangentes variables. Il leur correspond sur la surface Φ_4 des courbes $\Gamma_0^{(9)}$ formant un système linéaire de degré $n-17$ et de gener $\pi-8$. Les courbes $\Gamma_0^{(9)}$ sont les courbes $\Gamma_0^{(6)}$ osculant en $A_0^{(4)}$ la droite β'_1.

La structure du point uni A est ainsi complètement déterminée ; elle est schématisée par la figure ci-jointe.

Académie des Sciences
de Belgique

(Reçu 30 Juillet 1948).

NOTES D'ANALYSE

IV.

SUR UN DEVELOPPEMENT ANALOGUE À LA SÉRIE DE LAMBERT

par

AL. C. CLIMESCU

1. A l'occasion d'une autre recherche nous avons été conduit tout naturellement à la fonction.

$$f(x) = x + x^p + x^{p^2} + x^{p^3} + \ldots + x^{p^n} + \ldots \qquad (p \text{ entier} \geqslant 2)$$

qui paraît devoir jouer dans la théorie des matrices P un rôle similaire à celui joué par la fonction

$$g(x) = x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

dans la théorie des matrices A (Cf. 1). Une série de la forme $\Sigma a_n g(x^n)$ est une série de Lambert et il est à présumer qu'une série de la forme $\Sigma a_n f(x^n)$ présentera des analogies avec la série de Lambert. Ces analogies sont réelles et, contrairement à ce qu'on pourrait penser, les développements formés à partir de $f(x)$ sont à certains égards plus simples que les développements de Lambert, tout en se prêtant aussi bien à l'établissement de remarquables identités. Les séries en question sont aussi analogues aux séries faisant partie d'une classe considérée par Julia (Cf. 2), séries dont le terme général est de la forme $a_n F(x^q)$ avec $F(x)$ entière ou holomorphe pour $|x| \leq 1$.

2. Le critère suivant de convergence est bien connu (Cf. 3, p. 324) :

La série $\Sigma b_n c_n$ est convergente lorsque les séries Σb_n et $\Sigma |c_n - c_{n+1}|$ sont convergentes (critère de Du Bois-Reymond et Dedekind).

Nous appliquerons ce critère à l'étude de la convergence de la série

(1) $$\Sigma a_n f(x^n) .$$

On a

$$|f(x)| \leq |x| + |x^p| + |x^{p^2}| + \ldots \leq |x| + |x^2| +$$

$$+ |x^3| + \ldots = \frac{|x|}{1-|x|} \text{ pour } |x| < 1 ,$$

et, en général,

$$|f(x^n)| \leq |x^n| + |x^{np}| + |x^{np^2}| + \ldots < |x^n| +$$

$$+ |x^{n+1}| + \ldots = \frac{|x|^n}{1-|x|} \tag{2}$$

donc

$$\Sigma |a_n f(x^n)| \leq \Sigma \frac{|a_n||x|^n}{1-|x|} \text{ pour } |x| < 1 \tag{3}$$

d'où l'on tire les résultats suivants :

Supposons que que le rayon de convergence de la série de puissances associée $\Sigma a_n x^n$ est égal à r.

Si $r > 1$ la série $\Sigma a_n f(x^n)$ converge absolument pour $|x| < 1$;

Si $r < 1$ la série converge absolument pour $|x| < r$.

Dans le premier cas le problème est complètement résolu parce que $f(x)$ étant lacunaire et sa série divergente pour $|x| = 1$, la question de la convergence ne se pose que pour les points intérieurs au cercle unité, du moins tant qu'on n'adopte pas des conventions supplémentaires.

Dans le second cas il reste à étudier la convergence ou la divergence de la série (1) pour $r \leq |x| < 1$.

On voit que pour un x de module < 1 on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x^n)}{x^n} = 1. \tag{4}$$

La série associée étant divergente pour $|x| > r$, il y aura une suite d'indices n_i pour lesquels $a_{n_i} x^{n_i} \to \infty$, donc à cause de (4)

$$a_{n_i} f(x^{n_i}) \to \infty ;$$

le terme général de la série (1) ne tendant pas vers zéro, la série est divergente pour $r < |x| < 1$ et il ne reste plus à étudier que la convergence pour $|x| = r$. Enfin l'inégalité (3) montre que la convergence de (1) est uniforme dans chaque cercle $|x| \leq r_1 < r$ (respectivement $|x| \leq r_1 < 1$), donc la série (1) représente une fonction analytique dans le cercle $|x| < r$, respectivement $|x| < 1$.

Soit $|x| = r$; appliquons le critère de Du Bois-Reymond et Dedekind en prenant

$$b_n = a_n x^n \quad \text{et} \quad c_n = \frac{f(x^n)}{x^n}.$$

On a

$$\frac{f(x^n)}{x^n} = 1 + x^{(p-1)n} + x^{(p^2-1)n} + \ldots + x^{(p^i-1)n} + \ldots.$$

$$\frac{f(x^n)}{x^n} - \frac{f(x^{n+1})}{x^{n+1}} = x^{(p-1)n} - x^{(p-1)(n+1)} + x^{(p^2-1)n} - x^{(p^2-1)(n+1)} + \ldots$$

$$\left|\frac{f(x^n)}{x^n} - \frac{f(x^{n+1})}{x^{n+1}}\right| \leq |x|^{(p-1)n} + |x|^{(p-1)(n+1)} + \ldots < \frac{|x|^{(p-1)n}}{1-|x|} = \frac{r^{(p-1)n}}{1-r}.$$

Comme $r < 1$, la série

$$\left|\frac{f(x^n)}{x^n} - \frac{f(x^{n+1})}{x^{n+1}}\right|$$

converge, donc :

Si la série de puissances associée converge dans un point x_0 situé sur sa circonférence de convergence, la série $\Sigma a_n f(x_0^n)$ converge aussi.

Réciproquement, puisque $f(x^n)/x^n \longrightarrow 1$, on peut prendre n suffisamment grand pour que $f(x_0^n) \neq 0$ ($|x_0| = r$). Alors

$$\frac{x^n}{f(x^n)} - \frac{x^{n+1}}{f(x^{n+1})} = \frac{x^n}{f(x^n)} \frac{x^{n+1}}{f(x^{n+1})} \left(\frac{f(x^{n+1})}{x^{n+1}} - \frac{f(x^n)}{x^n}\right)$$

$$\left|\frac{x^n}{f(x^n)} - \frac{x^{n+1}}{f(x^{n+1})}\right| \leq \left|\frac{x^n}{f(x^n)}\right| \left|\frac{x^{n+1}}{f(x^{n+1})}\right| \left|\frac{f(x^{n+1})}{x^{n+1}} - \frac{f(x^n)}{x^n}\right|$$

inégalité qui entraîne la convergence de la série

$$\sum \left|\frac{x^n}{f(x^n)} - \frac{x^{n+1}}{f(x^{n+1})}\right|.$$

Appliquons le critère en prenant

$$b_n = a_n f(x^n), \quad c_n = \frac{x^n}{f(x^n)}.$$

Il en résulte que si $\Sigma a_n f(x^n)$ est convergente, $\Sigma a_n x^n$ est aussi convergente. En résumé on obtient :

I. *Soit r le rayon de convergence de la série $\Sigma a_n x^n$. Alors :*

1^0. *Si $r \geqslant 1$, $\Sigma a_n f(x^n)$ converge absolument pour $|x| < 1$ et uniformément pour $|x| \leq r_1 < 1$.*

2^0. *Si $r < 1$, $\Sigma a_n f(x^n)$ et $\Sigma a_n x^n$ convergent exactement pour les mêmes points, la convergence étant absolue pour $|x| < r$ et uniforme pour $|x| \leq r_1 < r$.*

3°. *Si $r > 0$, la série $\Sigma a_n f(x^n)$ représente une fonction holomorphe dans le cercle centré à l'origine et de rayon $= min\ (1, r)$.*

3. On peut appliquer le théorème de Weierstrass sur l'addition des séries de puissances (Cf. 3, p. 444), donc on peut trouver le développement de Mac Laurin de $F(x) = a_n f(x^n)$. On a

$$(5)\quad F(x) = \sum_1^\infty b_n x^n = \sum_1^\infty a_n f(x^n) = \begin{cases} a_1 x + a_1 x^p + a_1 x^{p^2} + \ldots + a_1 x^{p^n} + \ldots \\ a_2 x^2 + a_2 x^{2p} + a_2 x^{2p^2} + \ldots + a_2 x^{2p^n} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_i x^i + a_i x^{ip} + a_i x^{ip^2} + \ldots + a_i x^{ip^n} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Si m et p sont premiers entre eux, $b_m = a_m$, le seul terme en x^m provenant de $f(x^m)$; si $m = p$, on a

$$b_m = a_m + a_1 ;$$

si $m = p^n$ on aura

$$b_{p^n} = a_{p^n} + a_{p^{n-1}} + \ldots + a_1 = a_{p^n} + b_{p^{n-1}}$$

enfin si $n = p^i\ m$ (m et p premiers entre eux) on aura

$$b_n = a_m + a_{mp} + \ldots + a_{mp^i} = b_{p^{i-1}m} + a_{p^i m}\,.$$

Ces formules peuvent être résolues d'une manière unique par rapport aux a_n et on obtient :

$$a_1 = b_1 \quad , \quad (i, p) = 1.$$

$$a_p = b_p - b_1 \ , \quad a_{pi} = b_{pi} - b_i$$

$$a_{p^2} = b_{p^2} - b_p \ , \quad a_{p^2 i} = b_{p^2 i} - b_{pi}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{p^k} = b_{p^k} - b_{p^{k-1}}, \quad a_{p^k i} = b_{p^k i} - b_{p^{k-1} i}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les coefficients a_n étant déterminés univoquement en fonction des coefficients b_n, il en résulte que le développement de toute fonction holomorphe autour de $x = 0$ et nulle pour $x = 0$, en série de la forme $\Sigma a_n f(x^n)$ est unique, d'où le théorème :

II. *Toute fonction nulle pour $x = 0$ et holomorphe autour de l'origine peut être développée en une série de la forme*

$$\sum_1^\infty a_n f(x^n)$$

le développement étant unique et

$$a_i = b_i \qquad (i,\ p) = 1$$

$$a_{p^j} = b_{p^j} - b_{p^{j-1}} \qquad j \geqslant 1$$

$$a_{p^j i} = b_{p^j i} - b_{p^{j-1} i} \qquad j \geqslant 1, \quad (i,\ p) = 1$$

b_n *étant les coefficients de* Mac Laurin *de la fonction considérée.*

En sommant les égalités (5) d'après les colonnes, ce qui est permis d'après le théorème de Weierstrass, on obtient le théorème suivant:

III. *Si*

$$F(x) = \sum_1^\infty a_n\, f(x^n) \quad \textit{et} \quad g(x) = \sum_1^\infty a_n\, x^n$$

on a

$$F(x) = \sum_{n=0}^\infty g(x^{p^n})$$

valable pour $|x| < 1$ *si* $r \geqslant 1$ *et pour* $|x| < r$ *si* $r < 1$ *(r étant le rayon de convergence de g (x)).*

Donnons des exemples ;

$$F(x) = \frac{x}{1-x} \equiv \Sigma x^n, \text{ donc } b_n = 1 \text{ et}$$

$$F(x) = f(x) + f(x^2) + \ldots + f(x^{p-1}) + f(x^{p+1}) + \ldots$$

et en particulier, si $p = 2$

$$F(x) = \sum_0^\infty f(x^{2n+1}) ;$$

$g(x)$ sera la fonction

$$g(x) = x + x^2 + \ldots + x^{p-1} + x^{p+1} + \ldots = \frac{x}{1-x} - \frac{x^p}{1-x^p}$$

d'où le résultat, valable pour $|x| < 1$,

$$\frac{x}{1-x} = \left[\frac{x}{1-x} - \frac{x^p}{1-x^p}\right] + \left[\frac{x^p}{1-x^p} - \frac{x^{p^2}}{1-x^{p^2}}\right] + \ldots$$

résultat qui est d'ailleurs visible par lui-même.

Prenons $p = 2$ et

$$F(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x + 2x^2 + \ldots + nx^n + \ldots = \sum_1^\infty b_n\, x^n .$$

On aura

$$F(x) = \sum_1^\infty a_n\, f(x^n)$$

avec

$$a_{2n+1} = 2n + 1$$

$$a_{2^p} = 2^{p-1} \qquad (p = 1, 2, \ldots)$$

$$a_{2^p(2n+1)} = 2^{p-1}(2n + 1).$$

La fonction $g(x)$ est la fraction rationnelle

$$\frac{x + x^2 + x^3}{(1 - x^2)^2}$$

et le théorème III donne

$$F(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = \Sigma g(x^{2^n}) = \frac{x + x^2 + x^3}{(1-x^2)^2} +$$

$$+ \frac{x^2 + x^4 + x^6}{(1-x^2)^2} + \ldots + \frac{x^{2^n} + x^{2^{n+1}} + x^{3.2^n}}{(1 - x^{2^{n+1}})^2},$$

développement valable pour $|x| < 1$.

On obtient aussi sans difficultés les formules valables pour $|x| < 1$ $(p = 2)$:

$$f'(x) = f(x) + f(x^2) + 2f(x^4) + \ldots + 2^{n-1} f(x^{2^n}) + \ldots$$

$$f(x) = xf'(x) - x^2 f'(x^2) - \ldots - x^n f'(x^n) - \ldots$$

ce qui montre qu'une théorie parallèle pourrait être établie en ce qui concerne les développements de la forme

$$\Sigma a_n x^n f'(x^n).$$

Séminaire Mathématique
de l'Institut Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 7 Novembre 1948).

Travaux cités.

1. Climescu, Al. C. – *Sur une matrice attachée à toute suite de nombres.* Bull. de l'Ecole Polytechnique de Jassy, t. 3, fasc. 1, p. 141, 1948.
2. Julia, Gaston – *Sur un développement des fonctions holomorphes.* Acta Mathematica, vol. 54, p. 263, 1930.
3. Knopp, K. – *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.* Dritte Aufl. Berlin 1931.

SUR LES SURFACES LIEU DE CONIQUES II [1])

par

C. P. BOGDAN

1. Considérons maintenant le deuxième cas de ma classification [2]). Dans ce cas la surface contient une infinité de coniques, les plans des coniques forment une surface développable non dégénérée, les droites caractéristiques des plans ne sont pas tangentes aux coniques et deux coniques infiniment voisines ont un point commun.

Soit γ une conique de la surface, π son plan et D la droite caractéristique de ce plan. Si a et c sont les points d'intersection de ce plan avec la conique, soit a le point commun de deux coniques infiniment voisines, donc la tangente à la courbe décrite par ce point sur la surface coïncide avec la tangente en ce point à la conique. Si b est le pôle de la droite D par rapport à la conique, nous allons distinguer deux cas suivant que:

le point c n'est pas le point caractéristique du plan;

le point c est le point caractéristique du plan.

Dans le premier cas la tangente à la courbe c rencontre de nouveau la conique en un point que nous allons prendre comme point unité du plan. Le point b décrit une courbe et la tangente à cette courbe n'est pas dans le plan π et c'est sur cette droite que nous allons choisir le quatrième sommet du tétraèdre de référence.

Nous allons distinguer deux cas suivant que la tangente à la courbe décrite par le point unité du plan, intersecte on non la tangente à la courbe b.

Si la tangente à la courbe $a+b+c$ ne rencontre pas la tangente à la courbe b, nous allons prendre sur cette dernière droite comme point d (le quatrième sommet du tétraèdre) et comme point unité

1) v. Sur les surfaces lieu de coniques, I. Ce „Bulletin", II_1, (1947), 121—124.

2) v. Sur les familles de coniques de l'espace ordinaire, Ce „Bulletin", I_3, (1946), 292-294.

$(b+d)$, respectivement les points d'intersection de cette droite avec les plans $(a+b+c, \dot{a}+\dot{b}+\dot{c}, a)$ et $(a+b+c, \dot{a}+\dot{b}+\dot{c}, c)$.

Si elle intersecte la tangente à la courbe b, nous allons prendre ce point comme point d et comme point unité le point où la tangente est intersectée par la tangente à la courbe $a-b+c$, laquelle intersecte aussi la tangente à la courbe b.

Ainsi la tétraèdre est complètement déterminé par le voisinage du premier ordre d'une conique, c'est à dire par deux coniques infiniment voisines.

2. Avec ce choix du tétraèdre et si u et v sont deux paramètres, l'équation de la surface sera

$$X = a(v)\,u^2 + b(v)\,u + c(v)$$

avec les conditions

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= m_1 a + n_1 b \\
\dot{b} &= n_2 b + q_2 d \\
\dot{c} &= m_3 a + m_3 b + p_3 c \\
\dot{d} &= m_4 a + n_4 b + p_4 c + q_4 d\,.
\end{aligned}$$

On doit avoir :

$n_1, q_2 \neq 0$ car les points a et b ne sont pas fixes et $m_3 \neq 0$ car le point c n'est pas commun à deux coniques infiniment voisines. Et selon le choix du quatrième sommet d et du point unité du tétraèdre on a dans le premier cas :

$$p_3 = n_1 + n_2 + m_3 \qquad m_1 = n_1 + n_2$$

et dans le deuxième cas

$$p_3 = m_1 + m_3 = n_1 + n_2 + m_3 \qquad q_2 = n_1 - n_2 + m_3\,.$$

Les lignes asymptotiques sont données par l'équation

$$L\,du^2 + M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0.$$

En faisant abstraction de facteur non nul $(a\,b\,c\,d)$, les coefficients de cette équation sont

$$L = 2q_2 u,\ M = -q_2\,[2n_1 u^3 + (-m_1 + p_3)\,u^2 - 2m_3 u + m_3]$$
$$N = A_1 u^4 + A_2 u^3 + A_3 u^2 + A_4 u + A_5$$

On a $\quad LN - M^2 = -4q^2_2 n^2_1 u^6 + \ldots - q^2_2 m^2_2\,.$

Comme n_1, q_2 et m_3 ne sont pas nuls, il s'en suit que dans ce cas la surface ne peut pas être développable.

M est du troisième degré en u, donc sur chaque conique de la surface il y a trois points où les tangentes aux lignes paramétriques sont conjuguées.

Si on introduit des coordonnées locales

$$X = x_1\, a + x_2\, b + x_3\, c + x_4\, d$$

l'équation du plan tangent à la surface sera

$$q_2 u\,(x_1 - 2u\, x_2 + u^2 x_3) + [2n_1\, u^3 - (2n_2 - m_1 - p_3)\, u^2 + 2n_3\, u - m_3]\, x_4 = 0.$$

Donc le long d'une conique les plans tangents à la surface forment une surface développable de la troisième classe.

3. Considérons le cas I 2,2 dans lequel le point c est le point caractéristique du plan de la conique. Dans ce cas le voisinage du premier ordre d'une conique ne suffit pas pour déterminer le tétraèdre et il faut faire appel au voisinage du second ordre, c'est-à-dire à trois coniques infiniment voisines.

Considérons les plans passant par la tangente à la courbe b, droite sur laquelle nous allons prendre le quatrième sommet du tétraèdre. Ces plans coupent la conique en deux points, correspondants aux valeurs u et $-u$ du paramètre. Pour que les deux éléments E_2 des courbes suivant lesquelles les plans coupent la surface, fussent sur une conique, u doit satisfaire à une équation du deuxième ordre en u^2. Donc sur chaque conique il y a deux points satisfaisant la condition demandée. En prenant un de ces points comme point unité du plan de la conique $(a+b+c)$, le plan tangent à la surface en ce point, coupe la tangente à la courbe b en un point que nous allons prendre comme le quatrième sommet du tétraèdre.

Le plan tangent à la surface aux points a, b, c coupe la tangente en un point divers du premier, point que nous allons prendre comme point unité $(b + d)$.

Ainsi le tédraèdre est complètement déterminé par le voisinage du deuxième ordre d'une conique.

Avec ce choix du tétraèdre si l'équation de la surface est

$$x = a\, u^2 + b\, u + c\,,$$

on a les conditions

$$\begin{aligned}
\dot{a} &= m_1\, a + n_1\, b \\
\dot{b} &= \qquad n_2\, b \qquad + q_2\, d \\
\dot{c} &= m_3\, a \qquad + p_3 c \\
\dot{d} &= m_4\, a + n_4\, b + n_4\, c + q_4\, d
\end{aligned}$$

avec les conditions

$$\begin{aligned}
p_3 - 2(n_1 + n_2) + m_1 + m_3 &= 0 \\
2\, q_2 + p_3 + 2(n_1 + n_2) + m_1 + m_3 &= 0\,.
\end{aligned}$$

On a $n_1, q_2, m_3 \neq o$ car les points a, b et c ne sont pas fixes.

On a encore une autre relation entre les invariants et leurs dérivés, qui provient du choix du point unité du tétraèdre.

Les lignes asymptotiques sont données par l'équation

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$$

où $L = 2q_2 u$, $M = -q_2[2n_1 u^3 + (p_3 - m_1)u^2 + m_3]$,

$N = A_1 u^4 + A_2 u^3 + A_3 u^2 + A_4 u + A_5$.

On a

$$LN - M^2 = -4q^2_2 n^2_1 u^6 + \ldots\ldots - q^2_2 m^2_3 .$$

Comme $n_1, q_2, m_3 \neq 0$ il s'en suit que dans ce cas la surface ne peut pas être développable.

Comme M est du troisième degré en u, il s'en suit que sur chaque conique il y a trois points où les tangentes aux lignes paramétriques sont conjuguées.

En introduisant des coordonnées locales

$$X = x_1 a + x_2 b + x_3 c + x_4 d$$

l'équation du plan tangent à la surface sera

$$q_2 u(x_1 - 2ux_2 + u^2 x_3) + [2n_1 u^3 + (2n_1 - m_1 - p_3)u^2 - m_3]x_4 = 0.$$

Donc le long d'une conique les plans tangents forment une surface développable de la troisième classe.

Donc dans ce cas il faut faire appel au voisinage du deuxième ordre pour déterminer le tétraèdre.

Dans les deux cas on a 8 ou 7 invariants.

4. Considérons maintenant le troisième cas I_3. Dans ce cas les plans des coniques forment une surface développable non dégénérée, la droite caractéristique du plan d'une conique n'est pas tangente à la conique et deux coniques infiniments voisines ont deux points communs. C'est le cas des surfaces de Mr. Blutel [3]).

Soit γ une conique de la surface, π son plan et D la droite caractéristique du plan. Si a et c sont les points où la droite D rencontre la conique, donc les points communs de la conique avec la conique infiniment voisine, il s'en suit que les tangentes aux courbes que ces points décrivent sur la surface, coïncident avec les respectives tangentes à la conique. Le point caractéristique du plan sera pris comme point unité du plan. La tangente à la courbe b n'est pas dans le plan d et c'est sur cette droite que nous allons choisir le quatrième sommet du tétraèdre.

L'équation de la surface sera

$$X = a u^2 + bu + c$$

avec les conditions

$$\begin{aligned} \dot{a} &= m_1 a + n_1 b \\ \dot{b} &= n_2 b + q_2 d \\ \dot{c} &= -n_1 b + p_3 c \\ \dot{d} &= m_4 a + n_4 b + p_4 c + q_4 d \end{aligned}$$

$n_1, q_2 \neq 0$ car les points a, b et c ne sont pas fixes.

Si on introduit des coordonnés locales

$$X = x_1 a + x_2 b + x_3 c + x_4 d,$$

les plans tangents à la surface sont donnés par

$$q_2 (x_1 - 2ux_2 + u^2 x_3) + [2n_1 u^2 + (2u_2 - m_1 - p_3) u - 2n_1] x_4 = 0.$$

Ces plans passent par le point $f \left(2n_1, \frac{1}{2}(2n_2 - m_1 - p_3), -2n_1, q_2 \right)$ donc ils forment on cône quadratique (résultat de Mr. Blutel) comme doit être car deux coniques infiniments voisines ont deux points communs.

Les plans tangents aux points $(a + b + c)$ et $(a - b + c)$ qui correspondent aux valeurs 1 du paramètre u, intersectent la droite b, d $(x_1 = x_3 = 0)$ dans un même point que nous allons prendre comme point d le quatrième sommet du tétraèdre. Par ce point passe donc la droite qui unit les points $a - c$ et f. Le point f n'est pas sur la droite b, d (car $n_1 \neq 0$) et le plan $(a, f, a + b + c)$ intersecte cette droite en un point que nous allons prendre comme point unité $(b + d)$. Le tétraèdre de référence est ainsi complètement déterminé par le voisinage du premier ordre d'une conique de la surface.

Nous avons les conditions.

$$2n_2 - m_1 - p_3 = 0 \qquad \text{et} \qquad q_2 = 2n_1 .$$

Donc il nous restent 8 invariants.

Le sommet du cône est le point $(1, 0, -1, 1)$.

Les lignes asymptotiques sont données par l'équation

$$L\,du^2 + M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$$

où l'on a

$$\begin{aligned} L &= 2q_2 u\ , \quad M = -q_2 u [2n_1 u^2 + (p_3 - m_1) u + 2n_1]\ , \\ N &= u [2n^2{}_1 q_2 u^4 + A_0 u^3 + A_2 u^2 + A_3 u + 2n^2{}_1 q_2]\ . \end{aligned}$$

Les lignes conjuguées des coniques $(du = 0)$ sont données par l'équation

$$2\,du + [2\,n_1\,u^2 + (p_3 - m_1)\,u + 2\,n_1]\,dv = 0.$$

Cette équation est du genre de Riccati et on retrouve le théorème de Mr. Blutel que les coniques de la surface sont intersectées omographiquement par leurs lignes conjuguées.

Pour que la surface soit développable on doit avoir

$$L\,N - M^2 = 0.$$

Dans ce cas la surface peut être développable et si l'on a

$$m_1 + m_4 = p_3 - p_4 = q_4\,, \qquad 2\,n_1 + n_4 = 0\,,$$

la surface se réduit à un cône.

Séminaire Mathématique
de l'Université
de Jassy

(Reçu le 12 Juillet 1948).

SUR UNE CORRESPONDANCE PAR PLANS TANGENTS ORTHOGONAUX ENTRE DEUX SURFACES RÉGLÉES

par

I. CREANGĂ

1. Soit R_1 et R_2 deux surfaces réglées, Γ la courbe d'intersection et g_1, g_2 les génératrices de R_1 et R_2, qui passent par un point M_0 de Γ. On prend un autre point M_1 sur g_1 et le plan tangent τ_1 en M_1 à R_1 ; on prend aussi le plan τ_2, qui contient la génératrice g_2 et qui est orthogonal à τ_1 ; celui-ci reste tangent à R_2 dans un point M_2 de g_2. Dans cette note on considère la correspondance entre les points M_1 et M_2 et les relations liées de cette correspondance.

2. On emploie la notation vectorielle, dans l'espace à trois dimensions, avec des axes orthogonaux. Soit :

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \bar{r}_0(v) + u_1\,\bar{\alpha}_1(v) \\ \bar{r} &= \bar{r}_0(v) + u_2.\,\bar{\alpha}_2(v) \end{aligned} \tag{1}$$

les équations des surfaces R_1, resp. R_2. L'équation :

$$\bar{r} = \bar{r}_0(v) \tag{2}$$

représente la courbe Γ d'intersection de R_1, R_2. On suppose v l'arc de la courbe Γ et $\bar{\alpha}_1$ et $\bar{\alpha}_2$ deux verseurs, qui déterminent les directions des génératrices g_1 et g_2. Nous avons donc :

$$\left(\frac{d\bar{r}_0}{dv}\right)^2 = 1\,, \quad \bar{\alpha}_1^2 = \bar{\alpha}_2^2 = 1. \tag{3}$$

La condition d'orthogonalité entre deux plans tangents τ_1 et τ_2, l'un en M_1 de R_1 sur g_1 et l'autre en M_2 de R_2 sur g_2, est :

$$\left[\bar{\alpha}_1\,,\ \frac{d\bar{r}_0}{dv} + u_1\frac{d\bar{\alpha}_1}{dv}\right]\cdot\left[\bar{\alpha}_2\,,\ \frac{d\bar{r}_0}{dv} + u_2\frac{d\bar{\alpha}_2}{dv}\right] = 0 \tag{4}$$

ou :

TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET

$$(5)\quad \left[\bar{\alpha}_1, \frac{d\bar{\alpha}_1}{d\upsilon}\right]\cdot\left[\bar{\alpha}_2, \frac{d\bar{\alpha}_2}{d\upsilon}\right] u_1 u_2 + \left[\bar{\alpha}_1, \frac{d\bar{\alpha}_1}{d\upsilon}\right]\left[\bar{\alpha}_2, \frac{d\bar{r}_0}{d\upsilon}\right] u_1 + \left[\bar{\alpha}_1, \frac{d\bar{r}_0}{d\upsilon}\right]\left[\bar{\alpha}_2, \frac{d\bar{\alpha}_2}{d\upsilon}\right] u_2 + \left[\bar{\alpha}_1, \frac{d\bar{r}_0}{d\upsilon}\right]\left[\bar{\alpha}_2, \frac{d\bar{r}_0}{d\upsilon}\right] = 0.$$

L'équation (5) représente une homographie entre les points des génératrices g_1 et g_2, correspondantes au point M_0 de la courbe Γ.

3. On désigne par A, B, C, D les coefficients d'équation (5) dans leurs ordre.

On prend pour repère en M_0 le trièdre formé par la normale en M_0 au plan des verseurs $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$ et les bissectrices des verseurs $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$. Soit $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ les vecteurs unités sur les nouveaux axes, θ l'angle des vecteurs $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$ et ω_{ik} les composantes du déplacement relatifs au trièdre choisi. On exprime les dérivées par rapport à l'arc υ par : $\frac{d\bar{i}}{d\upsilon} = \dot{\bar{i}}$ etc.

Nous avons :

$$(6)\quad \begin{aligned} \dot{\bar{i}} &= \omega_{12}\bar{j} + \omega_{13}\bar{k} \\ \dot{\bar{j}} &= -\omega_{12}\bar{i} + \omega_{23}\bar{k} \\ \dot{\bar{k}} &= -\omega_{13}\bar{i} - \omega_{23}\bar{j} \end{aligned}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \bar{\alpha}_1 = \cos\frac{\theta}{2}\bar{j} + \sin\frac{\theta}{2}\bar{k} \\ \bar{\alpha}_2 = \cos\frac{\theta}{2}\bar{j} - \sin\frac{\theta}{2}\bar{k} \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \dot{\bar{\alpha}}_1 = -\left(\omega_{12}\cos\frac{\theta}{2} + \omega_{13}\sin\frac{\theta}{2}\right)\bar{i} - \sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{\dot{\theta}}{2} + \omega_{23}\right)\bar{j} + \\ \qquad\qquad + \cos\frac{\theta}{2}\left(\frac{\dot{\theta}}{2} + \omega_{23}\right)\bar{k} \\ \dot{\bar{\alpha}}_2 = -\left(\omega_{12}\cos\frac{\theta}{2} - \omega_{13}\sin\frac{\theta}{2}\right)\bar{i} - \sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{\dot{\theta}}{2} - \omega_{23}\right)\bar{j} - \\ \qquad\qquad - \cos\frac{\theta}{2}\left(\frac{\dot{\theta}}{2} - \omega_{23}\right)\bar{k}. \end{cases}$$

Soit enfin : λ, μ, ν les composantes du $\dot{\bar{r}}_0$ dans le nouveau trièdre :

$$(9)\quad \begin{aligned} \dot{\bar{r}}_0 &= \lambda\bar{i} + \mu\bar{j} + \nu\bar{k} \\ \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 &= 1. \end{aligned}$$

Les calculs effectués, nous donnent :

$$10)\begin{cases} A = \omega_{23}^2 - \dfrac{\dot\theta^2}{4} + \cos\theta\left(\omega_{12}^2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - \omega_{13}^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right) \\ B = \left(\nu\cos\dfrac{\theta}{2} + \mu\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\left(\dfrac{\dot\theta}{2} + \omega_{23}\right) - \lambda\cos\theta\left(\omega_{12}\cos\dfrac{\theta}{2} + \omega_{13}\sin\dfrac{\theta}{2}\right) \\ C = \left(\nu\cos\dfrac{\theta}{2} - \mu\sin\dfrac{\theta}{2}\right)\left(\omega_{23} - \dfrac{\dot\theta}{2}\right) - \lambda\cos\theta\left(\omega_{12}\cos\dfrac{\theta}{2} - \omega_{13}\sin\dfrac{\theta}{2}\right) \\ D = \nu^2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - \mu^2\sin^2\dfrac{\theta}{2} + \lambda^2\cos\theta \end{cases}$$

et :

$$(11)\quad \begin{aligned} BC - AD = &\left\{\lambda\left(\frac{\dot\theta}{2} + \omega_{23}\right) - \mu\sin\frac{\theta}{2}\left(\omega_{12}\cos\frac{\theta}{2} + \omega_{13}\sin\frac{\theta}{2}\right) + \right. \\ &\left. + \nu\cos\frac{\theta}{2}\left(\omega_{12}\cos\frac{\theta}{2} + \omega_{13}\sin\frac{\theta}{2}\right)\right\} \cdot \\ &\left\{\lambda\left(\frac{\dot\theta}{2} - \omega_{23}\right) - \mu\sin\frac{\theta}{2}\left(\omega_{12}\cos\frac{\theta}{2} - \omega_{13}\sin\frac{\theta}{2}\right) - \right. \\ &\left. - \nu\cos\frac{\theta}{2}\left(\omega_{12}\cos\frac{\theta}{2} - \omega_{13}\sin\frac{\theta}{2}\right)\right\} \cdot \cos\theta. \end{aligned}$$

4. Les relations (10) et (11) donnent les résultats suivants :

1°. $D = \nu^2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - \mu^2\sin^2\dfrac{\theta}{2} + \lambda^2\cos^2\theta = 0$ représente la condition d'orthogonalité des surfaces R_1 et R_2 suivant la ligne Γ. Etant données la surface R_1 et la ligne Γ sur elle, les surfaces R_2 s'obtiennent par la relation :

$$(12)\qquad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\mu^2 + \lambda^2}{\nu^2 + \lambda^2}}.$$

Pous un couple de ces surfaces l'homographie précédante se transforme en homologie.

2°. $A = \omega_{23}^2 - \dfrac{\dot\theta^2}{4} + \cos\theta\left(\omega_{12}^2\cos^2\dfrac{\theta}{2} - \omega_{13}^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}\right) = 0$

représente la condition pour que l'homographie (5) soit une homothétie. On trouve les surfaces R_2 par cette équation et par la première équation vectorielle (8). On a ainsi quatre équations pour déterminer ω_{12}, ω_{13}, ω_{23} et θ.

3°. Si l'on a : $BC - AD = 0$, l'homographie est singulière ; l'équation (5) est décomposée en deux facteurs :

$$(13) \qquad (A u_1 + C)\ (A u_2 + B) = 0.$$

Le plan tangent à R_1, au point $u_1 = -\frac{C}{A}$ sur g_1, correspond à tous les plans tangents par g_2 à R_2.

La condition $BC - AD = 0$ se décompose en trois.

$$\lambda\left(\frac{\dot{\theta}}{2} + \omega_{23}\right) - \mu \sin\frac{\theta}{2}\left(\omega_{12} \cos\frac{\theta}{2} + \omega_{13} \sin\frac{\theta}{2}\right) +$$

$$+ \nu \cos\frac{\theta}{2}\left(\omega_{12} \cos\frac{\theta}{2} + \omega_{13} \sin\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

exprime que la surface R_1 est développable. Le second facteur donne la condition analogue pour R_2. Enfin : $\theta = \frac{\pi}{2}$, exprime que les génératrices des deux surfaces se coupent orthogonalement.

4^0. Dans le cas $\theta = 0$ (ou π), les deux surfaces R_1 et R_2 coïncident. Si la courbe Γ est la ligne de striction commune, l'équation (5) se réduit à :

$$(14) \qquad (\omega^2_{23} + \omega^2_{12})\, u_1\, u_2 + \lambda^2 + \nu^2 = 0$$

qui est l'équation de l'involution de Chasles pour la surface R_1, avec le paramètre de distribution :

$$(15) \qquad k^2_1 = \frac{\lambda^2 + \nu^2}{\omega^2_{23} + \omega^2_{12}}.$$

5. Considérons la droite δ définie par deux points correspondants sur le couple des génératrices g_1, g_2. L'équation vectorielle de δ est :

$$(16) \qquad \bar{r} = \bar{r}_0 + u_1 \bar{\alpha}_1 + t\left(u_1 \bar{\alpha}_1 + \frac{Bu_1 + D}{Au_1 + C} \bar{\alpha}_2\right).$$

Elle enveloppe une conique C, dans le plan des vecteurs $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\alpha}_2$.

Dans le trièdre précédent, l'équation ponctuelle de cette conique est :

$$(17) \qquad \begin{cases} \left\{(B + C) \sin\frac{\theta}{2}\, y + (B - C) \cos\frac{\theta}{2}\, z + D \sin\theta\right\}^2 + \\ + 4\,(AD - BC)\left(y^2 \sin^2\frac{\theta}{2} - z^2 \cos^2\frac{\theta}{2}\right) = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

Elle est tangente aux génératrices g_1 et g_2 respectivement, dans les points :

$$T_1\left(0, -\frac{D\cos\frac{\theta}{2}}{B}, -\frac{D\cos\frac{\theta}{2}}{B}\right)$$

(18)

$$T_2\left(0, -\frac{D\cos\frac{\theta}{2}}{C}, -\frac{D\cos\frac{\theta}{2}}{C}\right).$$

Ce sont les points correspondants au point M_0, dans l'homographie. L'équation tangentielle de C, dans le système formé par $\bar{\alpha}_1$ et $\bar{\alpha}_2$ a l'expression :

$$Duv - Bvw - Cuw + Aw^2 = 0. \tag{19}$$

Cette enveloppe dégénère en deux points, quand :

$$D(BC - AD) = 0. \tag{20}$$

On retrouve par (20) les conditions discutées au § 4. Dans le cas $D = 0$, les coordonnées du centre d'homologie, données par (19), sont :

$$\xi = -\frac{C}{A}, \quad \eta = -\frac{B}{A}. \tag{21}$$

6. Soit : $\bar{a}_1$ le vecteur unité de la normale au plan asymptote de R_1, relatif à $\bar{g}_1$; $\bar{a}_2$ le vecteur analogue pour R_2 ; φ l'angle $\bar{a}_1, \bar{a}_2$; θ_1 l'angle de la tangente à la courbe Γ en M_0 avec g_1 ; θ_2 l'angle analogue pour g_2 ; φ_1 l'angle de la normale au plan tangent en M_0 à R_1 avec la normale au plan asymptote de R_2, φ_2 l'angle analogue pour R_2 ; enfin ψ l'angle entre les plans tangents en M_0 de R_1 et R_2.

On désigne par :

$$L_1 = \sqrt{\bar{\alpha}_1^2}, \qquad L_2 = \sqrt{\bar{\alpha}_2^2}. \tag{22}$$

Alors l'équation (5) de l'homographie, devient :

$$\cos\varphi\ u_1 u_2 + \frac{\sin\theta_2}{L_2}\cos\varphi_2 u_1 + \frac{\sin\theta_1}{L_1}\cos\varphi_1 u_2 + \tag{23}$$

$$+ \frac{\sin\theta_1}{L_1}\frac{\sin\theta_2}{L_2}\cos\psi = 0.$$

Soit k_1 le paramètre de distribution de R_1, k_2 le paramètre de distribution pour R_2 ; h_1 l'abscisse du point central de R_1 sur g_1 et h_2 l'abscisse du point central de R_2 sur g_2, alors l'équation (23) devient :

$$\cos\varphi\, u_1 u_2 + \cos\varphi_2 \sqrt{k_2^2 + h_2^2}\, u_1 + \cos\varphi_1 \sqrt{k_1^2 + h_1^2}\, u_2 + \tag{24}$$
$$+ \sqrt{k_1^2 + h_1^2}\, \sqrt{k_2^2 + h_2^2} \cos\psi = 0.$$

(24) est une formule analogue à la relation de Chasles pour une surface réglée. On retrouve de (24) l'involution de Chasles, quand R_1 coïncide avec R_2.

Séminaire Mathématique
de l'Institut Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 15 Novembre 1948).

SUR LES CONDITIONS D'AMÉLIORER LA MESURE DE L'INDUCTION MAGNÉTIQUE À L'AIDE DE LA SPIRALE DE BISMUTH

par

V. PETRESCU et E. LUCA

Pour la mesure des inductions magnétiques, on utilise généralement en industrie, le phénomène de l'accroissement de la résistance que manifeste une spirale de bismuth, lorsqu'elle se trouve introduite dans l'entrefer à étudier.

Cet accroissement, utilisée pour la première fois par Leduc [1]), se détermine par la mesure des résistances de la spirale, à l'aide d'un pont Wheatstone avant et durant l'introduction de la spirale dans l'entrefer.

Si l'on note respectivement ces résistances par R_0 et R, on établit pratiquement la variation relative de la résistance de la spirale par :

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{R - R_0}{R_0} .$$

Pour avoir la possibilité d'utiliser techniquement la spirale, il existe tracée graphiquement pour chaque spirale, une courbe entre les diverses valeurs de $\varrho = \frac{\Delta R}{R_0}$ et les valeurs correspondantes de l'induction ; en connaissant $\frac{\Delta R}{R_0}$ par la mesure, on trouve immédiatement, à

---

1. A. Winkelmann - *Handbuch der Physik.* T. V. p. 117, Leipzig 1908.
Graetz - *Handbuch der Elektrizität und Magnetismus* T. IV. p. 225, Leipzig 1920.
Grimsell - Thomaschek - *Lehrbuch der Physik* T. II. p. 220, Leipzig 1942.
A. Linker - *Elektrotechnische Messkunde* p. 296. Berlin 1932.
Handbuch der Physik. Apparate und Messmethode für Elektrizität und Magnetismus T. XVI. p. 761, Berlin 1927.

l'aide du graphique, les valeurs de l'induction. Habituellement la valeur initiale de la résistance de la spirale est d'ordre de grandeur 20 ohms.

On fait remarquer que l'accroissement de la résistance est de 5% pour chaque 1000 gauss, du moins pour la portion de courbe qui peut être considérée comme rectiligne et que la courbe peut être utilisée seulement au dessus de 1000 gauss [1]), à cause de la sensibilité réduite dans la mesure de la résistance et à cause des erreurs dues à la méthode.

A. Les erreurs dues à la méthode, qui interviennent dans la mesure, provoquent un accroissement supplémentaire de la résistance de la spirale qui se produit en même temps que l'accroissement dû au phénomène même, auquel il se superpose.

Les causes en sont les suivantes :

a) L'échauffement du fil de la spirale par le passage du courant du pont (la spirale constitue une branche du pont de mesure);

b) L'échauffement total de la spirale, résultant de la température généralement élevée de l'endroit de mesure (machines électriques en fonction, transformateurs, etc.). L'accroissement supplémentaire de la résistance est évalué à 4% par degré centigrade, ce qui correspond respectivement à une erreur sur l'induction de 80 gauss [2]);

c) La dilatation eventuelle du fil de bismuth.

Pour obvier à ces inconvénients, on recommande d'utiliser de faibles courants et d'effectuer la mesure d'une manière rapide.

B. En examinant la courbe entre les valeurs $\varrho = \frac{\Delta R}{R_0}$ et l'induction, qui accompagne généralement la spirale, on peut remarquer, qu'à une induction de 10.000 gauss correspond approximativement une valeur $\varrho = 0{,}5$ et respectivement un accroissement normal (dû au phénomène) de la résistance de la spirale $\Delta R \leq 10$ ohms, la résistance initiale de celle-ci étant considérée $R_0 = 20$ ohms.

Si l'on admet entre les valeurs ϱ et l'induction une variation linéaire, il en résulte que pour une valeur $\varrho = 0{,}001$ correspond une variation de la résistance de la spirale $\Delta R = 0{,}02$ ce qui mène à l'appréciation d'une induction de 20 gauss.

Donc, pour pouvoir apprécier 20 gauss, il faut qu'on puisse mesurer exactement des résistances de l'ordre 0,02 ohms.

---

1) A. Palm – *Appareils de mesures électriques* p. 280 Dunod, Paris 1939.
A. Iliovici – *Encyclopédie électrotechnique* ; méthodes et appareils de mesures électriques et magnétiques (troisième partie) p. 170. Geisser, Paris 1911.

2) A. Palm, Loc. cit. p. 281.

De là la conclusion qu'on ne peut pas utiliser la spirale que pour des grandes inductions, où la difficulté de mesurer exactement de petites résistances est éliminée.

Il en résulte que :

1. On a des erreurs dans la mesure des induction par ce moyen, à cause de l'accroissement supplémentaire de la résistance du fil de la spirale, provenant d'échauffement produit par le courant de pont ou par la température de l'endroit de mesure.

2. On est limité dans la mesure, en ce qui concerne la précision, aussi bien que le domaine vers les petites inductions (valeurs ΔR petites), à cause de l'incertitude de mesurer des petites résistances (de pousser plus loin la précision dans la mesure des résistances par le pont Wheatstone).

Nous nous sommes proposé d'indiquer des procédés, soit pour l'élimination de l'influence d'accroissement supplémentaire de la résistance de la spirale de bismuth, soit pour la possibilité de mesurer les résistances avec une précision plus accentuée.

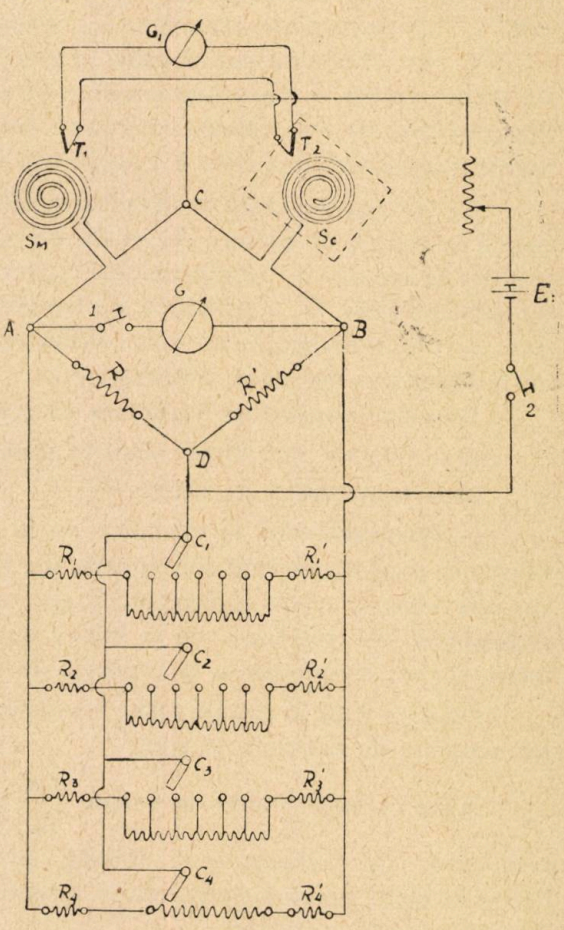


Fig. 1

Pour éliminer l'influence d'accroissement de la résistance, dû à l'accroissement de la température, on peut utiliser une disposition expérimentale par compensation, à savoir deux spirales identiques S_M et S_c, formant les deux bras d'un pont, tel qu'on les voit dans la fig. 1.

Avant la mesure, le pont doit être équilibré. Au moment de

l'équilibrage, les courants qui traversent les deux branches sont égaux, ce qui entraine respectivement la même variation de résistance.

De même si l'on introduit la spirale de mesure S_M dans l'entrefer d'une machine électrique en fonction, dont la température est différente (supérieure) de celle du milieu initial (lorsqu'on a établi le premier équilibrage du pont) alors :

1. Ou bien on peut aussi introduire, dans les mêmes conditions de température, la deuxième spirale de compensation S_c sans qu'elle souffre l'influence d'une induction magnétique quelconque.

2. Ou cela n'est pas possible et alors on peut enfermer la spirale de compensation S_c dans une enceinte où par un moyen quelconque (introduction de l'air chaud, chauffage électrique etc.) on réalise la même température que celle à laquelle travaille la spirale de mesure S_M.

Au moyen des deux couples thermo-électriques, dont l'une accompagne la spirale de mesure S_M et l'autre pénètre dans l'enceinte renfermant la spirale de compensation S_c, on indiquerait par l'intermède du galvanomètre G_l l'égalisation de température (on pourrrait utiliser dans ce but avec succès un pont Wheatstone monté pour la mesure de la différence des deux températures).

De cette manière les variations de résistance provoquées par :

a) le courant qui circule dans la spirale,

b) la température du milieu, et,

c) éventuellement, la dilatation du fil de la spirale, se compenseraient, le pont conservant son équilibrage initial, et il nous resterait a mesurer dans le pont seulement ce que nous intéresse, à savoir l'accroissement de résistance de la spirale de mesure S_M dû au phénomène même, c'est-à-dire à la présence de l'induction magnétique.

Dans ce but, la spirale étant introduite dans l'entrefer à étudier, on équilibre de nouveau le pont.

Ainsi on peut établir la valeur $\frac{\Delta R}{R_0}$, correspondante à l'induction respective, en excluant, cette fois-ci, l'influence des erreurs dues à l'accroissement supplémentaire de la résistance, provenant des accroissement de la température.

Pour accroître la précision dans la mesure de la résistance, on peut employer à présent des dispositifs montés en pont, de construction spéciale, par lesquels, le répérage des résistances se fait avec une précision à 10^{-6} près, ce qui permet d'apprécier les millièmes d'ohm avec une erreur de 1% ; cela montre qu'on peut évaluer dans le

pont, avec assez d'exactitude des déséquilibrages de l'ordre 10^{-4} [1].

Pour exemplifier, nous indiquons un pont spécial, construit d'après le procédé Sexta [2], pour un autre but (extensomètre à fil résistant), comme il est montré dans la figure 1, et que nous avons adapté au procédé de mesure signalé par nous.

La sensibilité et la stabilité indiquées peuvent être atteintes par l'utilisation d'une série de shunts pour les branches R et R', qui forment des branches auxiliaires successives, de résistances variables. Ces branches sont tellement construites que pour une variation $\frac{\Delta R}{R}$ dans la mesure, la première branche offre une plage totale de variation de $\pm 4\%$ par plots de 10^{-2} de $\frac{\Delta R}{R}$, la branche $R_2\ C_2\ R_2'$ une plage de 10^{-2} de $\frac{\Delta R}{R}$ par plots de 10^{-3} de $\frac{\Delta R}{R}$ etc., pour que la branche $R_4\ C_4\ R_4'$ potentiométrique, servant pour le réglage fin du zéro, permette de varier l'équilibre du pont de 10^{-4}.

Au début on obtient l'équilibre par la manoeuvre des contacteurs C_1, C_2, , C_3 et du potentiomètre C_4. Après le déséquilibrage produit par l'introduction de la spirale à l'intérieur d'entrefer, on utilise la manipulation des mêmes organes pour obtenir de nouveau l'équilibrage du pont et on lit directement les valeurs de 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4} de $\frac{\Delta R}{R}$.

Si l'on peut mesurer, avec précision de l'ordre 10^{-4}, des valeurs $\frac{\Delta R}{R}$, cela peut dire qu'on peut apprécier avec précision des valeurs de l'induction de l'ordre de 2 gauss et moins encore et par conséquent, excepté l'augmentation de la précision dans la mesure, on peut étendre le domaine de mesure vers les inductions plus petites, au-dessous de 1000 gauss ; donc on peut aussi utiliser pratiquement la portion initiale du graphique, tracé entre les valeurs ϱ et l'induction magnétique res-

1. Mesures T. 12. p. 227. 1947.
Mesures T. 13. p. 7. 1948.

2. Revue Générale de l'Electricité T. 57. p. 375. 1948.
Loc. cit. p. 8.

pective, d'autant plus que les erreurs provenant d'échauffement du fil sont éliminées.

Ainsi il résulte l'amélioration des conditions de la mesure des inductions, à l'aide de la spirale de bismuth.

Laboratoire de Mesures Electriques
de l'Institut Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 15 Novembre 1948).

SUR QUELQUES PROCÉDÉS DE CALCUL CONCERNANT LA DÉTERMINATION DES FORMULES DE MAJORATION POUR CERTAINS SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

par

D. I. MANGERON

Nous avons étudié [1]) différents problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles et multiples et surtout les équations aux dérivées totales au sens de M. M. Picone.

Nous avons énoncé, en particulier, dans un de nos travaux insérés dans ce Bulletin [2]), nombre de théorèmes concernant les formules de majoration pour les solutions des équations de la forme

$$(1_n) \qquad \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1^{\,2}\,\partial x_2^{\,2} \ldots \partial x_n^{\,2}} - A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

où les fonctions $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont continues et finies dans le domaine $D_n\,(a_i \leq x_i \leq b_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et

$$(2) \qquad u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \text{ à la frontière } FD \text{ de } D,$$

dans la supposition que l'unité n'est pas une valeur caractéristique pour l'équation

$$(3_n) \qquad \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1^{\,2}\,\partial x_2^{\,2} \ldots \partial x_n^{\,2}} - \lambda A(x_1, \ldots, x_n)\, u = 0$$

et les conditions aux limites (2).

Dans ce qui suit nous nous proposons d'exposer quelques procédés de calcul que se prêtent à généralisation et qui permettent à

---

1. Voir : *Rend. Acc. Sci. fisiche e matematiche*, Napoli, 4e série, 2 (1932), 29 ; *C. r. l'Acad. Sci.*, Paris, 204 (1937), 544 : *C. r. l'Acad. Sci. de Roumanie*, 2 (1937), 25 ; Voir aussi les mémoires classiques de E. Picard et de M. M. Picone concernant les équations différentielles ordinaires et insérés respectivement dans *Rend. Circ. Mat. di Palermo* 29 (1910) et *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 11 (1909) 1 et *Math. Z.*, 28 (1928), 510.

2. *Bull. Ec. Polyt.* Jassy, II, Fasc. 1. (1947), 89.

déterminer, entre autres, diverses formules de majoration pour les systèmes différentiels dont le prototype est constitué par les équations (1_n) et (2).

Pour simplifier l'écriture, nous chosissons le nombre n de variables indépendantes égale à 3.

Formule préliminaire de majoration. Pour la fonction n satisfaisant à l'équation (1_3) et aux conditions aux limites (2) on a

$$u(x_1, x_2, x_3) = \int_{a_1}^{x_1}\int_{a_2}^{x_2}\int_{a_3}^{x_3} \frac{\partial^3 u}{\partial x_1\, \partial x_2\, \partial x_3}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 ,$$

d'où, par l'inégalité de Schwartz,

$$[u(x_1, x_2, x_3)]^2 \leq (x_1 - a_1)\,(x_2 - a_2)\,(x_3 - a_3) \int_{a_1}^{x_1}\int_{a_2}^{x_2}\int_{a_3}^{x_3} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\, \partial x_2\, \partial x_3}\right)^2 dx_1 dx_2 dx_3 .$$

Donc

$$(4)\quad (\max |u|)^2 \leq (b_1 - a_1)\,(b_2 - a_2)\,(b_3 - a_3) \iiint_D \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\, \partial x_2\, \partial x_3}\right)^2 dx_1 dx_2 dx_3 .$$

En multipliant l'équation (1_3) par $u\, dx_1\, dx_2\, dx_3$ et en l'intégrant dans D, on trouve

$$(5)\quad \iiint_D \frac{\partial^6 u}{\partial {x_1}^2\, \partial {x_2}^2\, \partial {x_3}^2}\, u\, dx_1\, dx_2\, dx_3 - \iiint_D A(x_1, x_2, x_3)\, u^2\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \iiint_D f(x_1, x_2, x_3)\, u\, dx_1\, dx_2\, dx_3 ,$$

ou, après quelques transformations concernant la première des intégrales,

$$(6)\quad \iiint_D \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\, \partial x_2\, \partial x_3}\right)^2 dx_1\, dx_2\, dx_3 + \iiint_D A(x_1, x_2, x_3)\, u^2\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = - \iiint_D f(x_1, x_2, x_3)\, u,\, dx_1, dx_2, dx_3 .$$

Donc, si $A(x_1, x_2, x_3) \geq 0$

$$\iiint_D \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\, \partial x_2\, \partial x_3}\right)^2 dx_1\, dx_2\, dx_3 \leq \left| \iiint_D f\, u\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \right| \leq$$
$$\leq (b_1 - a_1)\,(b_2 - a_2)\,(b_3 - a_3)\, \max |f|\, \max |u|$$

et, en tenant compte de (4), nous obtenons la formule de majoration suivante

$$(7)\qquad \max\,|u| \leqq (b_1-a_1)^2\,(b_2-a_2)^2\,(b_3-a_3)^2\,\max\,|f|\,.$$

Soit (x_1', x_2', x_3') et (x_1'', x_2'', x_3''), $(x''_i > x'_i\,;\ i=1,\ 2,\ 3)$, deux points du domaine D $(a_i \leqq x_i \leqq b_i)$. Posons

$$m=\frac{\left[\begin{array}{l}-u(x_1', x_2', x_3')+u(x_1'', x_2'', x_3'')+u(x_1', x_2', x_3'')+u(x_1', x_2'', x_3')+\\ +u(x_1'', x_2', x_3')-u(x_1', x_2'', x_3'')-u(x_1'', x_2'', x_3')-u(x_1'', x_2', x_3'')\end{array}\right]}{(x_1''-x_1')\,(x_2''-x_2')\,(x_3''-x_3')}.$$

De l'égalité

$$\iiint_{x_1'x_2'x_3'}^{x_1''x_2''x_3''}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3}-m\right)^2 dx_1\,dx_2\,dx_3=\iiint_{x_1'x_2'x_3'}^{x_1''x_2''x_3''}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3}\right)^2 dx_1\,dx_2\,dx_3-$$

$$-\frac{[u(x_1'', x_2'', x_3'')-u(x_1'', x_2'', x_3')+\ldots]^2}{(x_1''-x_1)\,(x_2''-x_2)\,(x_3''-x_3')},$$

on en déduit

$$\frac{[u(x_1'', x_2'', x_3'')-u(x_1'', x_2'', x_3')+\ldots]^2}{(x_1''-x_1')\,(x_2''-x_2')\,(x_3''-x_3')}\leqq\iiint_{x_1'x_2'x_3'}^{x_1''x_2''x_3''}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3}\right)^2 dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

D'où la proposition :

Si on divise le domaine D dans les domaines partiels déterminés par les points

$$x_{10}=a_1,\ x_{11},\ x_{12},\ldots,\ x_{1n}=b_1\,;\ x_{20}=a_2,\ x_{21},\ x_{22},\ldots,\ x_{2n}=b_2\,;$$
$$x_{30}=a_3,\ x_{31},\ x_{32},\ldots,\ x_{3n}=b_3,$$

pour une fonction u (x_1, x_2, x_3), absolument continue dans D, douée de nombres dérivées premières totales de carré sommable, on a l'inégalité suivante

$$(8)\qquad \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\left|\begin{array}{l}u(x_{1i}, x_{2j}, x_{3k})-u(x_{1i}, x_{2j}, x_{3k-1})-u(x_{1i}, x_{2j-1}, x_{3k})+\\ +u(x_{1i}, x_{2j-1}, x_{3k-1})-u(x_{1i-1}, x_{2j}, x_{3k})+\\ +u(x_{1i-1}, x_{2j}, x_{3k-1})+u(x_{1i-1}, x_{2j-1}, x_{3k})-\\ -u(x_{1i-1}, x_{2j-1}, x_{3k-1})\end{array}\right|^2}{(x_{1i}-x_{1i-1})\,(x_{1j}-x_{1j-1})\,(x_{1k}-x_{1,k-1})}\leqq$$
$$\leqq\iiint_D\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3}\right)^2 dx_1\,dx_2\,dx_3\,.$$

Supposons maintenant que la fonction u satisfasse aux conditions (2) à la frontière FD de D et soit (m, n, p) le point où $u(x_1, x_2, x_3)$ prend sa valeur maximum. De la formule (8), on déduit, en particulier,

$$[u(m, n, p)]^2 \left[\frac{1}{(m-a_1)(n-a_2)(p-a_3)} + \frac{1}{(b_1-m)(n-a_2)(p-a_3)} + \right.$$
$$+ \frac{1}{(m-a_1)(b_2-n)(p-a_3)} + \frac{1}{(m-a_1)(n-a_2)(b_3-p)} +$$
$$+ \frac{1}{(b_1-m)(b_2-n)(p-a_3)} + \frac{1}{(m-a_1)(b_2-n)(b_3-p)} +$$
$$\left. + \frac{1}{(b_1-m)(n-a_2)(b_3-p)} + \frac{1}{(b_1-m)(b_2-n)(b_3-p)} \right] \leqq$$
$$\leqq \iiint_D \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \, \partial x_2 \, \partial x_3} \right)^2 dx_1 \, dx_2 \, dx_3 .$$

Puisque, comme on le peut voir facilement, on a

$$\left[\frac{1}{(m-a_1)(n-a_2)(p-a_3)} + \frac{1}{(b_1-m)(n-a_2)(p-a_3)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(m-a_1)(b_2-n)(p-a_3)} + \ldots \right] \geqq \frac{2^6}{(b_1-a_1)(b_2-a_3)(b_3-a_3)},$$

nous parvenons au résultat suivant

$$(9) \quad [\max |u|]^2 \leqq \frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3)}{2^6} \iiint_D \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \, \partial x_2 \, \partial x_3} \right)^2 dx_1 \, dx_2 \, dx_3 ,$$

d'où, dans la supposition $A(x_1, x_2, x_3) \geqq 0$ dans D, la formule de majoration

$$(10) \qquad \max |u| \leqq \frac{(b_1-a_1)^2 (b_2-a_2)^2 (b_3-a_3)^2}{64} \max |f|$$

qui représente, pour $n = 3$, le résultat énoncé par nous dans le travail cité [3]).

Si la fonction $A(x_1, x_2, x_3)$ peut aussi être négative dans D, de l'équation (5), en notant par M un nombre non positif et non supérieur au minimum de A dans D, on a

$$\iiint_D \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \, \partial x_3 \, \partial x_3} \right)^2 dx_1 \, dx_2 \, dx_3 + M(b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3) [\max |u|]^2 \leqq$$
$$\leqq (b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3) \max |f| \max |u| .$$

D'où, en multipliant cette inégalité par $(b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3)$ et en utilisant (9), on trouve

3. Ce „Bulletin". Loc. cit. 2.

$$2^6 [\max \mid u \mid] + M(b_1-a_1)^2 (b_2-a_2)^2 (b_3-a_3)^2 [\max \mid u \mid] \leqq$$
$$\leqq (b_1-a_1)^2 (b_2-a_2)^2 (b_3-a_3)^2 \max \mid f \mid .$$

Donc, s'il résulte dans D

$$2^6 + (b_1-a_1)^2 (b_2-a_2)^2 (b_3-a_3)^2 \min A > 0,$$

on trouve pour les solutions du système différientiel (1_3) et (2) la formule de majoration suivante qui constitue pour $n = 3$ un autre résultat énoncé dans la note déjà mentionnée

$$\max \mid u \mid \leqq \frac{\prod_{i=1}^{3} (b_i-a_i)^2 \max \mid f \mid}{64 + \prod_{i=1}^{3} (b_i-a_i)^2 \min A} .$$

Ou en peut déduire dans cet ordre d'idées d'autres formules de majoration intéressant divers systèmes différentiels ordinaires ou aux dérivées partielles, dont un certain nombre nous nous proposons de faire insérer dans un autre Recueil.

Séminaire pour l'Application du Calcul
(Séminaire Mathématique)
de l'Institut Polytechnique
de Jassy

(Reçu le 26 Octobre 1948).

MÉRNÖKI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET MŰEGYETEM

664.3

CONSIDERATIONS SUR L'HUILE DE PEPINS DE RAISINS

par

GEORGES ALEXA et CRISTOFOR SIMIONESCU

L'huile de pépins de raisins qu'on pourrait obtenir du marc des vignes de notre pays serait annuellement ca. 4500 t. En excepté l'huile, d'autres produits pourraient être obtenus à partir des pépins de raisins comme : tartrate de calcium, extraits tanniques, charbon actif, extraits aqueux de péctines, engrais chimiques, etc.

En considérant que la superficie occupée par les vignes dans notre pays est de 248.711 ha., que chaque ha. produit 40 hl. de vin et qu'à chaque hl. il revient 25 kg. de marc, contenant 20 % de pépins de raisins frais, il s'en suit qu'on pourrait obtenir annuellement 212500 t. de marc, respectivement 30500 t. de pépins de raisins à 15 % d'humidité.

Cette huile quoique assez étudiée, cependant la littérature est contradictoire en ce qui concerne sa nature, ses constantes physico-chimiques, ainsi que ses propriétés.

C'est ainsi que d'après P. Vialla [1]), l'huile de pépins de raisins ressemble à l'huile de ricin, ayant donc des qualités lubréfiantes ; d'après N. Kosin [2]) elle serait semblable à l'huile d'olive et d'après J. Ventre [3]) l'huile est d'autant plus rapprochée de l'huile de ricin que les pépins ont été mieux conservés et d'autant plus rapprochée de l'huile de lin que les pépins ont été plus altérés.

Margaillan et A. Rabelle [4]) ne sont pas de l'avis de ceux qui partagent l'opinion que l'huile de pépins de raisins se rapproche de l'huile de ricin et que celle-ci aurait des propriétés lubréfiantes. Carrière [5]) d'autre part ne croit pas que cette huile pourrait être employée dans l'alimentation, et P. Chambard et H. Favre [6]) montrent que l'huile ne se sulfonant pas bien, ne pourrait être employée comme l'huile soluble.

Dans le but de montrer quelles sont les caractéristiques et les propriétés des huiles de provenance roumaine, nous donnons ci-dessous quelques données des huiles analysées par nous des pépins de raisins de deux régions importantes de notre pays.

TABLEAU I.

	Pépins de Dragaşani	Pépins de Cotnari et Vişan-Jassy [7])
% d'huile	16,8-19,22	15,91-17,78
Couleur (Lowibond)	jaune 25, rouge 0,9	jaune claire
n_D^{20}	1.4755	1,4750-1,4775
Densité à 20°	0,9192	0,9214-0,9309
Congélation	— 20,5	—18—19,5
Viscosité	$V_k = 59,38$	
Ind. d'acide mgr. KOH	0,95	0,58-1,12
Ind. saponification	189,32	186,35-192,44
Ind. d'iode	129,3-142,3	124,8-142,16
Ind. d'hydroxil (Normann)	35,02	26,15-53,09
Nonsaponifiable	0,73	

On voit que les pépins de Dragaşani sont plus riches en huile que ceux de Jassy et qu'en général les huiles présentent presque les mêmes constantes phisico-chimiques. L'huile extraite à l'éther de pétrole a un bon arôme, une couleur assez claire et peut-être utilisée comme huile comestible, à condition qu'elle ne soit pas conservée longtemps. En effet une huile de pépins de raisin conservée pendant deux années, dans une athmosphère limitée d'air se résinifie en se transformant en une masse gélatineuse, présentant une très grande acidité. La tendance accentuée de résinification se manifeste aussi si l'huile est conservée dans une athmosphère inerte, probablement à la suite des processus biologiques.

Dans le tableau II nous montrons les transformations subies par quelques huiles, après deux années, conservées dans les mêmes conditions, dans l'athmosphère de CO_2.

TABLEAU II.

	L'huile de	Couleur		n_D^{15}	Ind. acide mgr. KOH		Ind. d'iode		U
		1946	1948	1946	1948	1946	1948	1946	1948
1	pép. de raisins	vert	blanche jaune	1,4765	1,4839	4,95	89,40	126,2	41,1
2	de l'in	orange	jaune d'or	1,4841	1,4916	1,70	51,25	157,32	76,5
3	maïs	orange	jaune pâle	1,4756	1,4826	3,16	59,78	123,07	75,28
4	coton	rouge	jaune	1,4747	1,4812	0,42	31,60	111,16	72,23

On remarque quel'huile de pépins de raisins a souffert des modifications plus profondes que les autres huiles. De même aux essais à l'appareil de Mackey (support asbest, le mélange 10 p. d'huile et 100 p. d'asbest, dans un tamis de nikhel), on obtient un indice d'oxydation interne de 467,8 et un indice d'oxydation totale de 278,3 [8]). Ces données qui montrent les tendances à l'autoxydation, classe l'huile de pépins de raisins à côté de l'huile de lin, qui est éminemment siccative.

D'après ces données nous pouvons affirmer, contrairement à l'opinion des autres, que les huiles de pépins de raisins, au moins celles examinées par nous, ne sont en aucun cas non siccatives. Pour l'indice de l'iode nous n'avons jamais obtenu le chiffre, 86, trouvé par Pritzker [9]).

Comme l'huile de pépins de raisins se place à la limite supérieure des huiles semisiccatives, nous remarquons cependant que dans certaines conditions, cette huile dépasse l'huile de lin dans ses comportations.

C'est ainsi qu'en étudiant comparativement cinq huiles, dont les constantes sont consignées dans le tableau III, nous remarquons qu'en les chauffant en présence de 0,2% de Ce, l'huile de pépins de raisins souffre les plus grandes transformations. (Tableau IV)

TABLEAU III.

	L'huile de	Couleur		n_D^{20}	d_{20}^{20}	I_a mgr. KOH	I_{iod}
		jaune	rouje				
1	l'in	20	3,1	1,4800	0,9270	0,705	165,8
2	pépins de raisins	25	0,9	1,4755	0,9192	0,95	129,3
3	pavot	4	0,5	1.4759	0,9231	3,16	133,8
4	turnesol	20	1	1,4752	0,9212	1,54	128,94
5	tabac	20	1,8	1,4769	0,9250	2,90	138,2

TABLEAU IV.

	L'huile de	Couleur		n_D^{20}	d_{20}^{20}	I_a mgr. KOH	I_{iod}
		jaune	rouje				
1	l'in	19	8	1,4847	0,9447	2,56	116,7
2	pépins de raisins	27	4,1	1,4817	0,9478	1,80	54,5
3	pavot	11	1,5	1,4798	0,9404	4,42	100,8
4	tournesol	8	1,6	1,4795	0,9381	1,99	73,58
5	tabac	38	8	1,4801	0,9363	3.28	107,4

De même on remarque que l'indice de réfraction croit beaucoup plus pour l'huile de pépins de raisins que pour les autres huiles chauffées à 250° C avec 0,2% Ce ou Co (tableau V), on a employé les oxides CeO_2 et Co_2O_3.

TABLEAU V.

	L'huile de	Avec 0,2 % Co		
		Réfr initiale	Réfr. finale	Temps en h.
1	l'in	1,4827	1,4919	4 h.
2	pépins de raisins	1,4768	1,4978	3 h.
3	pavot	1,4773	1,4954	5½ h.
4	tournesol	1,4774	1,4921	10½ h.
5	tabac	1,4785	1,4930	12 h.
		Avec 0,2% Ce		
1	l'in	1,4827	1,4917	4 h.
2	pépins de raisins	1,4768	1,4909	6 h.
3	pavot	1,4773	1,4922	9 h.
4	tournesol	1,4774	1,4900	11 h.
5	tabac	1,4785	1,4905	12 h.

De l'analyse des tableaux ci-dessus on remarque à l'huile de pépins de raisins une vitesse de siccativation appréciable. Les films obtenus dans nos essais sèchent en 24 heures, mais présentent encore un aspect collant. En mélange avec 50 % d'huile de l'in on obtient des films de très bonne qualité, au point de vue de l'élasticité, qui se trouve agrandie par la présence de l'huile de pépins de raisins. Seulement après 4 heures de chauffage à 250° C. en présence de Co_2O_3, l'huile prend l'aspect d'une masse semblable au factice. Ces constatations place l'huile de pépins de raisins très près de l'huile de l'in.

En ce qui concerne la comportation à la sulfonation, en tenant compte de l'indice d'hydroxyl et des résultats obtenus par M. Dima [10]) par la sulfonation d'une huile de pépins de raisins, avec 25 % SO_4H_2 conc., à 20° C. la durée de la sulfonation étant de 12 heures, il résulte que cette huile peut être sulfonée et par conséquence elle présenterait intérêt en vue de l'obtention des huiles solubles.

La ressemblance de l'huile de pépins de raisins avec l'huile de ricin basée sur son indice d'hydroxyl élévé, d'une part, et d'autre part le fait que dans la composition de l'huile de raisins entrerait des acides du type

de l'acide érucique et de l'acide ricinoléique ne concordent pas pour l'huile de provenance roumaine, dans lequelle on n'a pas indentifié la présence de ces acides. De même la grande tendance à la résinification complète cette affirmation. Nos conclusions sont donc les suivantes :

— L'huile de pépins de raisins peut être très bien employée dans l'alimentation.

— Elle se place à la limite supérieure des huiles semi-siccatives très près de l'huile de lin.

— Elle présente une tendance très accentuée de polymérisation et une grande vitesse de siccativation.

— Elle donne des films élastiques et de bonne qualité.

— Quoiqu'elle présente un bas point de congélation, elle n'est pas propre comme lubréfiant.

— Elle se sulfonne aisémment, en donnant des huiles parfaitement solubles.

— L'huile de pépins de raisins présente enfin un intérêt particulier pour les industries des vernis. Donc, sa valorification est indiquée.

Laboratoire de Chimie Technologique Organique de l'Institut Polytechnique de Jassy

(Reçu le 25 Décembre 1948).

Bibliographie.

1. M. P. Vialla – C. R. Acad. Agric. France, 12, 1926, pag. 143.
2. N. Kosin – Massl. Shirowoje Djélo, 8, 1928, pag. 124.
3. J. Ventre – C. R. Acad. Agric. France, 12, 1926 pag. 404.
4. L. Margaillan et A. Rabelle – Chimie et Industrie, 21, 1929, pag. 127.
5. P. Carrière – C. R. Acad. Agric. France. 12, 1926, pag. 160.
6. P. Chambard et H. Favre – *L'huile de pépin de raisin son traitement et son utilisation en tannerie*, Docum. Scient. et techn. des Ind. du cuir, 4, 1943, pag. 57.
7. M. Dima et collaborateurs–*Chemisch-technische Untersuchungen über die aus Traubenkernen ausgezogenen Oele verschiededer Weingegendes Roumäniens* : Allgemeine Oel und Fett Zeitung, 3, 1933, pag. 1.
8. G. Alexa et C. Simionescu – *Etude de la capacité d'auto-oxydation des huiles ;* Bull. Inst. Rech. Technologiques. II, 1947, pag. 81.
9. J. Pritzker – Mitt. Lebensmitteluntersuch, und Hyg. 21, 1930, pag. 53.
10. M. Dima et collaborateurs – *Le comportement de l'huile de tournesol dans la sulfonation à l'acide, sulfurique ;* J. I. S. I. T. C., 1935 pag. 443.

COMPTES RENDUS DES LIVRES REÇUS

K. P. Téodorčik, – *Systèmes auto-oscillatoires* (en russe). Editions technico-théoriques d'État. Moscou-Léningrad, 1948. 2-e éd. augmentée, 244 pag., 134 fig. (Prix : 8 r.).

Les études modernes des oscillations les plus diverses, qui interviennent d'une manière notable dans différentes applications, notamment dans la biologie, la chimie, la physique, l'astronomie, la physique mathématique contemporaine (mécanique quantique) et surtont dans la technique actuelle, ont montré l'importance et même la nécessité absolue d'étudier des oscillations [1]) dont la théorie est régie par les équations différentielles non linéaires avec les paramètres dépendant ou non du temps.

L'intégration des équations des oscillations non est possible par quadratures que dans des cas exceptionnels. Même la démonstration de l'existence des solutions pour des valeurs quelconques du temps, rencontre dans beaucoup de cas des difficultés jusqu'aujourd'hui pas encore surmontées.

Les recherches célèbres de H. Poincaré et A. Liapounoff ont permis l'élaboration de premières méthodes rigoureuses dans la théorie générale des problèmes non linéaires. Diverses méthodes nouvelles, surtout pour les phénomènes périodiques, ont été élaborées par Newcomb, Hill, Lindstedt, Gylden, Liénard, Cartan, Barkhausen,... Tout récemment, la création de la théorie générale des phénomènes non linéaires – ce but de la Mécanique non linéaire – est due surtout aux Écoles russes et soviétiques de Mandelstamm-Papalexi et N. Kryloff-N. Bogoliuboff.

L'immense intérêt des hommes de science contemporains pour la branche de la science d'ingénieur qui a été dénommée à juste titre „technique des vibrations", a été cristallisée dans la littérature scientifique rédigée en russe par M. K. P. Téodorčik qui nous présente,

---

1) Voir D. I. Mangeron, Mécanique non-linéaire, Sur les systèmes oscillatoires non linéaires. Ce „Bulletin", I, (1946), 62 et suiv.

dans la seconde édition augmentée, une mise au point concernant l'étude des systèmes auto-oscillatoires.

Le livre est consacré à la théorie des systèmes mécaniques ou électriques générant des oscillations non amortissables causées par des sources d'énergie privées des propriétés oscillatoires. Comme il fallait s'y attendre, la discussion est menée autour de l'équation de la forme

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x + \psi(x)\dot{x} = 0$$

qui domine le phénomène du fonctionnement d'un système auto-oscillateur du type d'un générateur à lampe et où $\psi(\dot{x})x$ est la fonction non-linéaire caractérisant le schéma considéré.

Les reponses concernant les conditions à satisfaire par la fonction $\psi(\dot{x})x$, aptes à assurer les oscillations périodiques, la détermination de la forme des fréquences fondamentales et de la loi de leur génération, que doit fournir la théorie, sont traités par l'auteur par différentes méthodes, surtout pour le cas particulier des systèmes thompsoniens. Faute d'espace ne nous permet pas d'évidentier, selon notre désir, nombre de contributions originales de l'auteur discutées dans ce volume, extraites des travaux insérés pendant ces dernières années dans plus de 30 mémoires parus dans diverses publications scientifiques et techniques de l'URSS.

Nous soulignons ici surtout les questions, dont il a été enrichie cette seconde édition, concernant les propriétés des générateurs inertiaux non linéaires qui ont permis à l'auteur de diviser les propriétés des systèmes oscillatoires en systèmes quasi-linéaires proprement dit, tant que certains problèmes sur les systèmes régénérateurs ayant deux degrés de liberté.

Le livre est divisé en cinq chapitres dont les quatre premiers sont consacrés aux systèmes oscillatoires autonomes: I. Auto-oscillations s'approchant des oscillations harmoniques (Méthode énergétique) (p. 11—51); II. Méthode des diagrammes généralisés de régénération (p. 52—119); III. Systèmes à retardement (p. 120—137); IV. Systèmes auto-oscillatoires à relaxation (p. 138—177); V. Systèmes non autonomes. Systèmes oscillatoires et auto-oscillatoires sous l'action des forces extérieures (p. 178—240).

La forme extérieure du livre, les indications bibliographiques assez riches, supplémentaires à celles de la première édition et l'index des termes et notions employés, ajoutent à la valeur intrinsèque de ce beau livre que nous recommandons très chaleureusement aux techniciens, aux ingénieurs et aux étudiants se spécialisant dans le domaine de la physique des oscillations.

D. I. MANGERON

* * *

W. Gaade, – *Organisch-chemische nomenclatur*, (en hollandais). Elsevier Publishing Company, Inc. Amsterdam, New-York, 1949, XII+224 pg.

L'un des problèmes les plus difficiles dans la Chimie organique est, sans doute, la nomenclature et le système d'enregistrement des nombreux composés du carbone.

En principe il y a deux méthodes de nomenclatures : *nomenclature usuelle* (triviale ou fantasienamen), où les noms des corps tiennent, en général, à leur provenance naturelle, ou a quelqu'une de leur propriétés plus ou moins caractéristiques (couleur, saveur, odeur) ; *nomenclature rationnelle*, où les noms sont en rapport avec leur constitution chimique.

L'auteur débute par un bref aperçu historique sur la nomenclature des substances organiques et donne une liste avec les publications des Hollandais et des étrangers sur cette importante question. Dans le chapitre suivant l'auteur donne des règles gérérales concernant la nomenclature des composées organiques, basées sur la structure chimique.

En ce qui concerne la nomenclature usuelle l'auteur constate qu'il existe des noms usuels, depuis longtemps employés dans la littérature chimique, qui doivent être gardés, vu que ces noms on servi pour créer la nomenclature des autres dérivés dont l'usage est entré presque dans toutes les langues. L'auteur cherche à ortographier différemment les noms usuels employés dans son pays, afin qu'on évite une confusion avec les noms rationnels, qui expriment des autres substances.

Ainsi le nom hollandais „urethaan" (uréthane), pour ne pas se confondre avec un hydrocarbure saturé (ces hydrocarures en hollandais ont le suffixe *an*), doit être écrit urethan, avec un seul *a*, comme dans toutes les langues, le nom *chloraal*, chloral (al est le suffixe pour les aldéhydes), *veronal*, (véronal) veronal (il n'est pas une aldéhyde), *benzol* (benzène). pour éviter la confusion avec les phenols, doit être écrit bezeen, *styrol*, styreen (styrolène), *furfurol*, furfural (aldéhyde), *glycérine*, glycerol (fonction alcoolique).

Si les noms usuels des acides en hollandais sont un peu différents de ceux employés dans les autres pays, les noms de sels correspondants sont pareils à ceux trouvés dans les autres langues : par ex. l'acide formique s'appelle *mierzuur* (zuur, suffixe pour les acides) et les sels *formiaten* (formiates), l'acide acétique, *azijmzuur*, et les sels *acetaten* (acétates), l'acide malique, *appelzuur*, et les sels *malaten* (malates), l'acide succinique, *bernstenzuur*, et les sels *succinaten*, l'acide cinnamique, *kaneelzuur*, et les sels *cinnamaten*, l'acide lactique, *melkzuur* et les sels lactaten. Dans le tableau V (pg. 24) l'auteur donne les noms

usuels de 41 substances en hollandais, en anglais, en français, en allemand et en latin.

En ce qui concerne la nomenclature rationnelle, au Congrès international réuni à Genève en 1892, on a décidé de formuler les noms des composés organiques en partant de la nomenclature des carbures; ces derniers étant déterminés, on forme ensuite les noms des divers corps possédant des fonctions déterminées, en ajoutant, au noms des carbures correspondants, des suffixes caractéristiques de ces fonctions. Les hydrocarbures saturés (verzadigde koolwaterstoffen) prennent la terminaison *ane* (en hollandais *aan*) après le nom grec (quelquefois le nom latin) qui indique le nombre des atomes de carbone qu'ils contiennent. Les 4 premiers termes ont conservé leurs noms usuels : méthane (methaan), éthan (aethaan), propane (propaan) et butane (butaan). Pour les hydrocarbures éthyléniques (alkylenen) et acétyléniques (alkylynen) on change respectivement en *ène* (een) et *ine* (yn) la désignance *ane* (aan) des carbures saturés. Pour les fonctions alcool et phénol, aldéyde, cétone, les noms s'obtiennent en changeant la désignance *ane* des carbures saturés par le suffixe *ol*, *al*, *one* (on). Le suffixe oïque (oic), proposé au Congrès de Genève pour les acides, ne fut adopté que par les Français ; les Allemands utilisent la terminaison (carbon) *saüre*, les Hollandais le suffixe (carbon) *zuur* et les Anglais la terminaison - carboxylic acide (v. Tableau VIII, pg. 81). Pour les autres fonctions on place le nom de la fonction après les noms des hydrocarbures correspondants ; par ex. éthane-*amide*, propane - *amidoxime*, pentane - *amidine*, hexane-nitrile.

Après le chapitre consacré à la nomenclature usuelle, l'auteur s'occupe avec la nomenclature des hydrocarbures, les fonctions greffées sur la chaîne hydrocarbonée, les chaînes avec des hétéroatomes (esters, anhydrides acides, thioéthers, disulfures, acides sulfiniques et sulfoniques, amines secondaires, hydrazines, diamines, composés organo-minéraux), les combinaisons alicycliques, les composés aromatiques, les composés hétérocycliques et les composés polycycliques aromatiques et alicycliques. Le chapitre II est destiné aux préfixes qui indiquent une fonction (*amino* -, *oxy*,*oxo*-, *thio* -, etc.) ou une structure déterminées (*ortho* -, *meta* -, *iso* -, *peri* -, etc.). Dans ce chapitre sont donnés aussi les symboles spéciaux employés dans la littérature anglaise (par ex. *Me* pour méthyle au lieu de CH_2 -, *Ph* pour C_6H_5 -, *Ac* pour acétyle etc.).

Dans un appendice l'auteur insiste sur les règles proposées par la Commission de la nomenclature en Chimie organique au Congrès de l'Union internationale de Chimie, tenu au 17 Juillet 1947 à Londre,

pour les noms des composés organo siliciés et des radicaux. Il ajoute à cette occasion une liste contenant les noms des 472 radicaux.

A la fin de l'ouvrage l'auteur propose des nombreuses thèmes relativement à la nomenclature des composés d'après leurs formules structurelles et sur la structure chimique des composés d'après leurs noms officiels. Dans les pages suivantes (192–206) il donne aussi la réponse aux thèmes proposées.

Ce livre, très bien présenté, aisé à consulter, sera des mieux accueilli par les chimistes, les biologistes et les pharmaciens, surtout s'il sera traduit dans d'autres langues aussi.

C. V. GHEORGHIU

* * *

Giuseppe Bruni, – *Chimica generale e inorganica con elementi di chimica organica.* VII Edizione nuovamente rifatta e ampliata, con la collaborazione del Prof. M. A. Rollier del Politecnico di Milano. Volume III. Elementi di chimica organica a cura di Mario Alberto Rollier. Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini, Milano, 1947, XII + 202 pg.

Cet ouvrage redigé par M.le Prof. Mario Alberto Rollier vient de compléter le traité classique de Chimie générale et anorganique du Professeur Giuseppe Bruni.

Quoique sous un volume restreint, l'auteur réussi à présenter dans ces „Eléments de chimie organique" une vue d'ensemble sur le vaste domaine des combinaisons du carbone.

Les grandes divisions, généralement adoptées dans l'enseignement de la chimie organique, ont été conservées : composés aliphatiques (série acyclique), composés carbocycliques (a. série isocyclique–composés aromatiques, b. série alicyclique–terpènes et camphres) et composés hétérocycliques.

L'auteur traite d'abord les hypothèses fondamentales de la chimie organique et ensuite il saisi l'occasion pour donner les théories modernes de la valence, la mésomérie, la structure du benzène, le mécanisme de la substitution et l'interprétation électronique de l'action d'orientation des groupements substituants, les sels de diazonium. Une attention toute particulière a été accordée par l'auteur au caoutchouc, aux résines sinthétiques et aux fibres textiles artificielles.

C. V. G.

* * *

Jarques Verdéyen, - *Mécanique du sol et Fondations*. 1 Vol. 564 pg. 1948. Editions Desoer, Liège et Eyrolles, Paris.

L'oeuvre de Monsieur J. Verdéyen, Ingénieur Conseiller et Professeur à l'Université de Bruxelles, synthétise les résultats obtenus dans le domaine des recherches sur la mécanique du sol, recherches qui, en ces derniers temps ont pris un grand développement, et ont conduit à la modification des conceptions qui étaient à la base du calcul des fondations.

Elle présente un intérêt à part pour nos ingénieurs, non seulement parce qu'elle est écrite en langue française, qui est connue par la pluspart d'entre nous, mais aussi parce qu'elle contient autant les éléments théoriques, qu'il n'est plus permis d'être ignorés par l'ingénieur projectant, que les élémens pratiques nécessaires à l'ingénieur exécutant.

La première partie se réfère à la mécanique du sol et la deuxième, aux fondations.

Pour l'édification du lecteur, nous allons présenter dans ce qui suit, les chapitres traités par l'auteur.

Première partie : Mécanique du sol.

Chapitre I. Historique, généralités, où sont traités : L'état de tension des sols et le mouvement de l'eau dans les couches souterraines.

Chapitre II. Dénomination pétrographique du sol, où l'auteur attaque le difficile problème de la dénomination et des caractéristiques des différentes roches.

Chapitre III. Equilibre des massifs pulvérulents et des massifs cohérents, qui est étudié par la méthode Mohr-Rankine établissant les équations de l'équilibre limite, les lignes de glissemént effectif, le principe de correspondance entre les massifs collérents et les massifs pulvérulents, l'éboulement des massifs cohérents et lignes de rupture, l'équation générale des lignes de glissement effectif sous un tabus rectiligne, l'hauteur dangereuse des massifs profonds, etc.

Chapitre IV. Caractéristiques physiques et mécaniques des sols. Sont exposé les systèmes de prélèvement des échantillons non remaniées, et les méthodes des essais en laboratoire et sur le terrain un plan.

Chapitre V. Dénomination et classification géotechnique des sols, basée sur la granulométrie, complétée par l'examen de la plasticité, et sur l'analyse chimique.

Chapitre VI. Equilibre de déformation. Calcul des tassements. L'auteur s'occupe de la détermination de la répartition théorique des efforts et des déformations internes des sols par la méthode Terzaghi

Fröhlich et par la méthode expérimentale du Prof. Buissman de Delft.

Deuxième partie : Fondations.

Chapitre VII. Fondations directes. Sont exposés : les différents systèmes de fondations commençant par les fondations directes rigides ou élastiques, par empâtement, sur semelles et sur radier général, les tensions admissibles sur le sol et les tassements des fondations directes.

Chapire VIII. Les fondations profondes. Sont etudiés les fondations sur pieux préparés d'avance et sur pieux moulés dans le sol, les procédés d'exécution et le calcul des dimensions des pieux isolés et des groupes de pieux, et les trassements respectifs.

Chapitre IX. Renforcement des fondations. L'auteur donne de très intéressants exemples relatif à ces travaux délicats.

X. Le rabattement de la nappe aquifère.

XI. Les polplanches. Les deux systèmes de fondation sont amplement traités et de nombreux exemples complètent la partie théorique.

Chapitre XII. La sécurité des fondations, où sont discutés les problèmes qui se face à l'ingénieur, en ce qui concerne l'équilibre entre les forces transmises par la construction et celles qui apparaissent sur le sol de fondation, le problème du coefficient de sécurité, et la responsabilité de l'ingénieur.

L'auteur conclue „qu'étant donné qu'il existe une science du sol qui permet une étude rationnelle des fondations, on commet une faute technique en ne procédant pas à cette étude".

AUREL CERNĂTESCU

* * *

S. E. Chaïkine, – *Cours général de physique*, T.I. *Mécanique.* (en russe) 2-e éd. revue et augmentée. Editions technico-théoriques d'Etat, Moscou-Léningrad, 1947,574 pag. 454 fig. (Prix. 17 r.).

Le grand et très important chapitre du cours général de physique, s'occupant des phénomènes mécaniques destiné aux étudiants de la première année des facultés des sciences physiques, publié tout récemment par M. Chaïkine, se distingue bien nettement des manières usuelles de présentation de cette matière.

Tout en s'efforçant d'expliquer le sens physique des phénomènes, parfois jalousement cachés par les schémas des raisonnements mécaniques, l'auteur utilise systématiquement l'appareil mathématique moderne et assez élevé, en s'appuyant sur le calcul véctoriel,

l'analyse mathématique et géométrie différentielle et reproduit tout le long de l'exposition nombre d'expériences suggestives et quelquefois originales (modèle-mise en évidence des centres instantanés de rotation, modèle pour la vérification des compositions de divers mouvements, tels rotations etc...) avec tous les détails nécessaires à leur compréhension.

Des 22 chapitres de ce livre traitant sur : les unités de mesures (p. 11-27), la cinématique (p. 28-48), les systèmes de coordonnées mobiles (p. 49-70), les lois de Newton (p. 71-93), forces et déformations (p. 96—105), mouvements sous l'action de la pésanteur (p. 106-113), équilibre d'un point matériel (p. 115-118), forces de frottement (p. 119-136), loi de la conservation de la quantité de mouvement (p. 137-142), loi de la conservation du moment cinétique (p. 143-162) travail et énergie (p. 163-189, systèmes de coordonnées non inertiaux (p. 190-212), mécanique du corps rigide (p. 213-264), gravitation universelle (p. 265-275), mécanique des corps élastiques (p. 274-303), hydrostatique et aérostatique (p. 304-327), hydrodynamique et aérodynamique (p. 328-393), oscillations des systèmes à un degré de liberté (p. 394-424), oscillations des systèmes à plusieurs degrés de liberté (p. 425-450), ondes (p. 451-481), acoustique (p. 482-508), mécanique de la relativité restreinte (p. 509-568), nous soulignons surtout les chapitres consacrés aux problèmes des oscillations et des auto-oscillations, où les contributions originales de l'auteur s'encadrent d'une manière très heureuse dans ce qu'on appelle aujourd'hui „la technique des vibrations", inaugurée sous la forme de mécanique non linéaire par Van der Pol et poursuivit pendant ces dernières décades par les écoles de L. Mandelstamm, N. Papalexi, N. Kryloff, N. Bogoliuboff, A. Liénard, H. Cartan, Colebrook-Thompson, A. Andronoff-A. Witt, Barkhausen-Möller,...

Si on y ajoute la théorie du gyroscope et de ses nombreuses applications, la théorie du vol d'un avion ou la théorie de la propulsion d'un sous-marin, on reste bien convaincu que l'exposition de l'auteur dans son ensemble constitue une introduction vraiment solide à l'étude ultérieur de la mécanique rationnelle ou plus généralement de la physique mathématique et de toutes les mécaniques modernes.

Pour terminer, nons n'avons qu'à souhaiter à l'auteur, qui puise dans la littérature universelle contemporaine et classique, indiquée à la fin du volume, les vérités munies à assurer la non relativité ou l'invariance des lois physiques, la prochaine parution des autres volumes de ce cours, résumant les progrès scientifiques de l'umanité dans ce domaine et incitant fortement la jeunesse désireuse à étudier aux nouvelles et prolifiques recherches.

D. I. MANGERON

* * *

N. E. Kotchine, I. A. Kibelj et N. V. Rosé,-*Hydromécanique théorique* (en russe). Première partie, 4-e éd., revue. Éditions technico-théoriques d'État, Léningrad-Moscou, 1948,535 pag. ; 179 fig. (Prix : 16 r.).

La physique mathématique contemporaine s'est enrichie pendant ces dernières années, dans le domaine de la mécanique des fluides, par un nombre de résultats fondamentaux concernant surtout la dynamique des gas, la mécanique des fluides visqueux et l'étude des mouvements tourbillonnaires.

La première partie du cours de Hydrodynamique théorique, rédigée sous la rédaction de N. Kibelj, constitue une excellente mise au point de presque tout les résultats classiques concernant les mouvements dans les liquides parfaits.

Les quatre premiers chapitres, rédigés par M. Rosé, traitant sur l'hydrostatique et l'hydrodynamique des fluides parfaits (141 pag.), aboutissent aux différents cas des mouvements „simples" de ces fluides.

Le chapitre V (92 pag), consacré au mouvement tourbillonnaire d'un liquide parfait, est rédigé par M. Kintchine, dont les contributions personnelles sur la non stabilité des chaînes tourbillonnaires de Kárman et sur la détermination des ondes permanentes à la surface de séparation des deux liquides, bien connues aux spécialistes, s'encadrent harmonieusement dans la belle théorie sur les tourbillons en chaîne, initiée par M. Kárman, depuis 1912.

Les chapitres VI et VII (154 pag.) (M. N. Rosé), sont consacrés respectivement aux problèmes bi-et tridimensionnels des fluides parfaits. On y trouve exposées, entre autres, les recherches d'une grande portée de Joukovski-Michell-Blasius-Chaplyguine et Levi Civita.

Le chapitre VIII (N. Kotchine) (140 pag.) s'occupe des mouvements ondulatoires des fluides parfaits, en aboutissant aux schémas mathématiques des phénomènes complexes, tels la théorie des marées, étudiée magistralement d'un point de vue plus vaste par M. Shuleikine dans son récent traité „Physique de la mer" [1]). Bien remarquable est le texte du paragraphe 35 dédié aux mouvements des ondes dans la couche atmosphérique en rotation si on en tient compte en particulier de ses nombreuses et importantes applications météorologiques.

Tous les développements essentiels de ce livre, corrects du point de vue de l'analyse mathématique et confirmés par un nombre remar-

1) Voir notre compte rendu inséré dans la „Revue Scientifique" (Revista Ştiinţifică „V. Adamachi") de Jassy, XXXIII, 1947.

quable d'expériences et d'observations (problèmes du vol ou de navigation sous-marins, étude des courants dans les diverses mers du globe et particulièrement dans la mer Noire, recherches sur les régimes des vents alysés et anti-alysés etc. etc.). sont illustrés par des nombreux exercices, rangés à la fin des 14 paragraphes différents, constituant un aide vraiment très précieux pour tous ceux qui s'efforcent à comprendre le problème complexe du mouvemènt des fluides.

D. I. MANGERON

* * *

P. S. Modenoff et G. L. Neviažskij, – *Cours de mathématiques supérieures* (en russe). Editions technico-théoriques d'Etat. Moscou-Léningrad, 1948, 559 pag.; 335 fig. Prix : 17 r.).

Ce livre est destiné aux étudiants des instituts pédagogiques se spécialisant dans les différentes branches de caractère non mathématique.

Les auteurs s'acquittent assez bien de leur tâche très difficile de conserver autant que possible la rigueur scientifique sans perdre pourtant de vu la mission didactique essentielle de cette initiation en sciences mathématiques.

C'est toujours ce but eclectique qui impose aux auteurs : 1. la rénonciation tout le longue de l'exposition concernant la géométrie analytique à toutes les considérations groupales et par conséquence à la distinction bien suggestive des propriétés métriques, affines et projectives ; 2. l'introduction dans la partie consacrée à l'analyse mathématique de la restriction en ce que regarde le système de coordonnées employé (on utilise exlusivement le système cartésien orthogonal) ; 3. la limitation à la notion de l'intégrale de Cauchy-Riemann ; 4. l'énonciation des théorèmes d'existence sans démonstration concernant les équations différentielles ordinaires ; 5. l'exposition des notions sur les suites et les séries numériques à la fin du volume ; . . .

La division de ce cours est conçue comme suit : I. Géométrie analytique monodimensionnelle. II. Méthode des coordonnées dans le plan. III. Ligne droite. IV. Cercle. V. Ellipse, VI. Hyperbole. VII. Parabole. VIII. Sections coniques. IX. Théorie générale des lignes de second ordre. X. Méthode des coordonnées dans l'espace. XI. Ligne droite. XII. Plan. XIII. Surfaces de second ordre (pages 189). XIV. Fonctions. XV. Limite d'une fonction. XVI. Calcul différentiel. XVII. Intégrale indéfinie. XVIII. Intégrale définie. XIX. Applications de l'intégrale définie. XX. Equations différentielles. XXI. Suites et séries numériques. XXII. Séries de potences (336 pages).

413 exercices numérotés et assez variés tant que le chapitre des

réponses et indications constituent un aide vraiment précieux pour la compréhension de ce traité qui aura certainement un accueil nettement favorable dans les cercles intéressés, de manière à permettre „que les fruits surpassent la promesse des fleurs".

D. I. MANGERON

* * *

I. B. Levenson, – *Théorie des mécanismes et des machines. Cinématique et dynamique des mécanismes.* (En russe). Editions théorico-techniques de la littérature de construction des machines. Moscou, 1948, 405 pag. 276 fig. (Prix. 15, 65 r.).

La complexité croissante des moyens utilisés industriellement impose une systématisation rapide des point de vue directeurs concernant la classification générale des mécanismes et leur étude approfondie basée sur les principes et déductions de la mécanique théorique ou rationnelle.

Dans ces dernières années la littérature technique universelle s'est enrichie par un nombre de traités contenant l'analyse, la synthèse et es comparaisons critiques des points de vue cinématique et dynamique des mécanismes concrets composant les machines les plus variées, contenant, entre autres, les contributions scientifiques originales des écoles des grands mathématiciens et mécaniciens russes C. L. Tchebycheff, N. E. Joukovski, L. P. Smirnov, L. I. Artobolevski, ...

En utilisant les nombreuses mises au point, élaborées dans les travaux du Séminaire sur la théorie des mécanismes de l'Académie des Sciences de l'URSS, concernant certains problèmes sur les mécanismes et en s'appuyant solidement sur les résultats acquis dans ce vaste champ depuis Poncelet, Koenigs, Reuleaux, ..., l'auteur nous présente une heureuse synthèse de la théorie des machines et des mécanismes, tout en soulignant (ce que réf. trouve parfaitement juste) la nécessité absolue d'une séparation nette entre la mécanique théorique – ce fondement obligatoire et indispensable de la préparation des futurs ingénieurs – et ses applications techniques qui doivent s'encadrer dans les cours variés de la construction des machines.

La livre est divisé en trois parties. La première est consacrée aux problèmes généraux et au rappel de certains résultats puisés dans la mécanique rationnelle. La seconde est consacrée à la cinématique des mécanismes. L'attention spéciale est accordée ici aux chaînes cinéma-

tiques, aux mécanismes planes, aux accouplements à rainure ou à galets et aux mécanismes des mouvements rotatoires (engrenages de toutes sortes). C'est ici que trouvent leur place certaines descriptions et calculs des transmissions planétaires et épicycloïdales dus à l'auteur et à l'école technologique de Bruevitch, Dobrovoltzev, Judin,...

La troisième partie est consacrée à la dynamique des mécanismes. Après avoir introduit les notions aboutissant à l'équation du mouvement d'une machine, l'auteur accorde une attention toute particutière au problème du frottement, en le reliant surtout aux mécanismes des machines minières et métallurgiques. L'étude de la statique des mécanismes est poursuivie tant par la méthode analytique que par celle graphique. Les problèmes concernant la cinétostatique, la stabilité, la régularisation et la mesure du travail des machines terminent ce traité.

Les indications bibliographiques assez détaillées, le nombre d'exercices (54) contenant d'importantes applications concrètes des études entreprises et la tenacité méthodique de souligner le fondement physique et technique des problèmes traités, permettent à conclure au succès assuré de ce volume muni à ériger les cadres à venir des spécialistes techniciens.

D. I. MANGERON

* * *

Mario G. Salvadori, – *The Mathematical solution of engineering problems* with a collection of problems by Kenneth S. Miller). McGraw-Hill Book Company, Inc. New-York -Toronto-London, 1948, 245 pag.; 121 fig. (Price 19/6).

The authors have endeavoured in the present work to combine some of the modern developments of Calculus with different subjects usually included in works on the plane Analytic Geometry and on the Theory of Equations.

Of the six chapters into which this work is divided, the first contains a review of some basic mathematical concepts including the notions of differentials and integrals. The second consists on fundamental steps on the plane Cartesian Geometry containing also the geometrical applications of the Calculus. The third reguards the numerical solution of algebraic and transcendental equations with various numerical exemples in illustration on the mode of equations with various numerical exemples in illustration on the mode of solution. The fourth contains the treatment of simultaneous linear algebraic equations using some modern methods given by Banachiewich, Arend, Crout, Cesari, ... or discovered and tabulated for machine computations by Prof. Picone and his pupils.

The considerations of the elementary functions and power series as also of the Fourier series expansion and harmonic analysis in the last two chapters appears to be one of the simplest and attractive modes of presenting to beginners this part of mathematical methods devoted to solution of engineering questions and has the advantage, by the introduction of the physical problems, to awake the student's interest, who sees immediately the necessity for the mathematical techniques introduced.

The book contains several diagramms and schemes as also a collection of more then 1000 problems, of which about one-third applied problems taken from the various fields of engineering, physics and mechanics, but do not requires knowledge of these subjects.

It is certain that the aim to give there, within as narrow limits as possible, an account of the mathematical methods with the „vocabulary" consisting on fundamental engineering mathematics proves to be very useful to students as an introduction to those fuller and more systematic works which are specially devoted to this different branches of Calculus, or Algebra and Geometry, necessary to a strong preparation of the future engineers throughout the world.

D. I. MANGERON

* * *

H. Delaby, – *Principes fondamentales de Télévision.* Edition Eyrolles, Paris, 1948, 198 pag. 193 fig.

L'ouvrage représente le cours que l'auteur, ingénieur en chef de la Radio-diffusion française, a été chargé par cette dernière à tenir aux élèves techniciens et ingénieurs futurs spécialistes en Télévision.

L'auteur s'adresse en particulier aux techniciens et par conséquence ne fait appel qu'aux Mathématiques élémentaires.

La différence entre cet ouvrage et ceux classiques consiste dans fait que l'auteur a eu l'heureuse inspiration de rappeler les principes fondamentaux de Physique qui s'appliquent en Télévision (Chap. I–V, les radiations lumineuses, notions de physiologie de la vision, éclairage du sujet, etc). Ce fait facilite énormément la compréhension des principes fondamentaux de la Télévision, même pour les amateurs.

L'ouvrage contient encore les chapitres : notions d'optique électronique, defléctions des faisceaux électroniques, analyse du sujet, la transformation lumière courant, la transformation courant lumière, transformation des signaux périodiques, forme et production des signaux de balayage et enfin la syncronisation et le signal vide.

Si l'auteur s'adressait seulement aux ingénieurs il aurait donné

plus d'ampleur à l'ouvrage, notamment aux certains chapitres comme : à celui des tubes de prise de vues, de la synchronisation, etc.

L'ouvrage très bien conçu, très clairement formulé, grâce aux nombreux exemples numériques, est très didactique.

La Maison éditrice Eyrolles a fait touts les efforts pour une parfaite présentation de l'ouvrage et nous tenons à cette occasion de lui envoyer nos meilleurs remerciements pour l'amabilité d'avoir mis à la disposition de nos étudiants un ouvrage aussi intéressant.

Nous espérons que, toujours grâce à la même bienveillance, nous aurons l'occasion de connaître le second volume.

ALEX. PAPP

* * *

P. David, – *Cours de Radioélectricité générale.* Vol. IV, 101 pag. 45 fig. Eyrolles Editeurs, Paris, 1948.

Ce cours est très moderne et documenté, intéressant touts les étudiants et ingénieurs radioélectriciens. A notre grand regret, il ne nous est parvenue que le IV-e volume : „La propagation des ondes". C'est donc seulement de lui que nous nous occupons.

Après un rappel des formules rencontrées dans les premières parties du cours l'auteur s'occupe des chapitres : la propagation d'une onde plane dans le milieu, la propagation dans le cas des milieux ionisés, l'onde passant d'un milieu à l'autre, la propagation des ondes autour de la terre, le rôle de la basse atmosphère, le rôle de l'ionosphère, les parasites. Comme applications l'auteur étudie la propagation des différentes gammes d'ondes, détermine la fréquence maximum utilisable, etc.

Le chapitre concernant le rôle de l'ionosphere est présenté d'une façon originale car les faites observés et l'explication théorique ont été disposés dans des colonnes différentes, afin de montrer comment la théorie et l'expérience ont marché parallèlement.

Les démon trations, les diagrammes et les exemples pratiques, ainsi que le fait d'être très moderne, le rend très utile à ceux qui s'occupent de l'étude de la Radioélectricité.

Nous regrettons vivement encore une fois de n'avoir pas eu l'occasion de nous procurer les autres volumes, mais nous espérons, connaissant l'amabilité de la maison éditrice Eyrolles, qu'on nous donnera l'occasion de les mettre à la disposition de nos étudiants.

ALEX. PAPP

* * *

Kurt F. Kollbrunner,-*Fundation und Konsolidation.* Vol. I 476 pg. ; 219 fig. Vol. II. 534 pg. ; 397 fig.

Edition : Schweizer Druck-und Verlagshaus, Zürich.

Malgré les progrès considérables qu'ont fait dans les vingt dernières années les études sur le comportement des sols naturels sous l'action des charges, elles se trouvent éparses dans les publications périodiques, et il n'y a que quelques traités qui présentent aux techniciens l'ensemble des résultats acquis et leur applications.

Parmi eux se trouve l'ouvrage du Dr. Ing. F. Kollbrunner : „Fundation und Konsolidation" en deux volumes.

Le premier se réfère à l'étude : des sols de fondation, du rôle de l'eau dans les sols, des essais de sols, de la répartition des efforts dans les sols de fondations chargés et des tassements des sols.

Dans le premier chapitre l'auteur étudie l'origine des différents sols et leurs propiétés physiques et chimiques.

Le chapitre II traite de l'action de l'eau libre ou combinée sur le comportement du sol.

Dans le chapitre III sont décrites en détail les méthodes d'essais de sol de fondations sur le terrain en plan et en laboratoire.

Dans le chapitre IV l'auteur étudie la répartition des efforts dans le sol de fondation d'après les méthodes de Fröhlich et de Odhe, concernant les théories de Boussinesq et Michell, et les tassements des sols d'après les études de Boussinesq, Terzaghi, Steinbrenner, Fröhlich, Bendel et Haelfi.

L'indication des hypothèses qui sont à la base des calculs et de l'établissement des formules permet leurs application juste dans la pratique.

Le volume est illustré de très nombreuses figures et photographies, et la bibliographie comprenant 287 références en cours de textes est réunie à la fin du volume par noms d'auteurs.

Le second volume comprend : l'amélioration du sol de fondation, les fondations profondes.

Le premier chapitre traite de l'amélioration des sols par le déblayment des couches peu résistantes, par le rabattement du niveau de la nappe aquifère, par injections, par traitement électrique, par séchage, moyennant la chaleur, par compactage mécanique et par congélation.

Dans le deuxième chapitre l'auteur expose les méthodes d'exécution des fouilles à sec et dans les couches faiblement aquifères, dans les couches fortement aquifères, en plein-eau, à épuisement et aussi les mesures de sécurité pour les ouvrages voisins des fouilles.

Le chapitre III s'occupe des fondations en surface continues et

isolées, sur dales, sur radier général et sur matelas, et de leurs étanchement.

Les fondations profondes sur pieux préparés d'avance et sur pieux moulés dans le sol, les fondations à ciel ouvert, sur puits, caissons ouverts et à air comprimé sont exposées dans le chapitre IV.

De nombreux schémas et photographies illustrent aussi le volume et une riche bibliographie comprenant 319 références citées en cours du texte est réunie à la fin par noms d'auteurs.

L'ouvrage présenté dans d'excellentes conditions d'imprimérie est indispensable aux ingénieurs qui veulent être au courant de tout ce qui est acquis en cette matière.

A. CERNATESCU

* * *

G. Malécot, - *Les Mathématiques de l'Hérédité*, 66 p., Paris, Masson et Cie, 1948.

L'intérêt de cet ouvrage consiste dans une analyse mathématique très poussée des problèmes de l'hérédité. La Génétique ne peut plus se passer des données essentielles de la Statistique et du Calcul des Probabilités. Mais dans cette brochure l'auteur ne vise pas à nous initier dans ce Calcul, ni à nous exposer les éléments fondamentaux de la Biométrie. Ce qu'il cherche ce n'est même pas une vérification mathématique des lois mendéliennes, c'est plutôt la mise en évidence de la nécessité de certaines d'entre elles. Il cherche à démontrer les applications possibles du calcul des probabilités dans la recherche des tares et des aptitudes héréditaires dans les populations humaines. La prévision des résultats dans les mariages consaguins, la ségrégation des races locales, l'influence de la migration et de la sélection sont tour à tour examinées avec l'appui des équations respectives. Dans un premier chapitre l'essentiel des lois mendéliennes et les principales définitions sont rappelés. Dans le second chapitre les cas de l'hérédité multifactorielle sont développés en détail. Partant d'une population isogamique stationnaire, l'auteur cherche à établir les corrélations entre conjoints apparentés. Il examine d'abord les probabilités des gènes et des génotypes, la repartition des facteurs dans une population isogamique et les variables aléatoires mendéliennes dans une même population. Il passe ensuite aux corrélations entre apparentés dans le cas de la non dominance et dans le cas de dominance. Le phénomène de dominance se traduit statistiquement par une supériorité des coefficients de corrélation pour les parentés doubles sur ceux des parentés simples corres-

pondantes ; il fait ressortir ainsi les désavantages des unions consanguines.

Dans le troisième chapitre l'auteur suit l'évolution d'une population mendélienne non stationnaire où la répartition des gènes ne reste plus constante ayant à subir l'effet de la sélection.

Il faut noter que pour des gènes neutres et sans mutations, une parmixie indéfinie, dans une population limitée, aboutit toujours à l'homogénéité complète. Mais il est évident que très fréquemment l'hétérogénéité génétique d'une population ainsi que la présence de nombreux génotypes hétérozygotes provient de l'apparition de nouveaux gènes, soit par mutation, soit par immigration d'individus provenant d'une population étrangère.

Dans une population très nombreuse il y a la sélection géométrique et la sélection zygotyque. D'ailleurs il est certain que l'hétérogénéité génétique d'une population ou encore la présence de nombreux génotypes hétérozygotes provient non de ce que la population est extrêmement nombreuse, mais de ce qu'il y apparaît de temps en temps de nouveaux gènes, soit par mutation, soit par immigration d'individus provenant d'une population différente. Dans une population limitée, l'auteur essaie de démontrer la probabilité pour un gène ayant des coefficients de mutation, migration et sélection donnés, d'avoir au bout d'un nombre de générations infiniment grand, une fréquence comprise entre des limites prévisibles par le calcul ; c'est la loi des probabilités asymptotiques.

Les biologistes et les médecins qui, par la nature de leurs recherches, sont obligés de faire appel aux études biométriques, liront avec profit ce livre qui leur fournit un appui mathématique indispensable sur les points les plus importants de la Génétique appliquée.

IOAN G. BOTEZ

* * *

L. Bruwier, – *Leçons sur le calcul symbolique*. 2ème édition. Faculté Polytechnique de Mons. Cercle d'éditions des Etudiants. 1948.

Le calcul symbolique de Heaviside, très prisé par les électrotechniciens, repose en somme sur l'idée fort simple que voici : on considère l'ensemble des fonctions d'une variable comme un groupe additif à opérateurs, ceux-ci étant provisoirement les puissances entières de l'opérateur p de dérivation, p^{-1} signifiant l'intégration à partir d'une limite fixe x_0 ; on étend ensuite le domaine des opérateurs en considérant les séries de Laurent en p et en posant par définition

BUDAPEST MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

$$(\Sigma a_i p^i)\, y = \Sigma a_i p^i y ;$$

pour les besoins de la pratique on peut d'ailleurs se borner aux séries de puissances en p^{-1} de rayon de convergence non nul ; aux opérations algébriques effectuées sur les séries de Laurent en p correspondront ainsi des opérations d'intégration et de dérivation sur y.

Les nombreuses interprétations et expositions du calcul symbolique parues surtout depuis un quart de siècle démontrent que celui-ci intéresse des cercles de plus en plus larges et l'ouvrage de M. Bruwier montre qu'il est en train de conquérir aussi l'enseignement des pays du continent européen, qui s'était montré jusqu'ici assez circonspect par rapport aux méthodes de Heaviside.

L'ouvrage est divisé en deux parties : la première développe le calcul symbolique à partir de l'idée exposée ci-dessus et contient les §§ suivants :

1. Opérateurs définis par des séries ; 2. Opérateurs rationnels relativement à l'opérateur p ; 3. Applications.

La seconde partie s'appelle : *Le calcul symbolique basé sur la transformation de Laplace* et contient les §§ suivants :

Introduction : 1. La transformation de Laplace ; 2. Règles de calcul relatives à la transformation de Laplace ; 3. Application à l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Les quelques références bibliographiques données seront très utiles aux étudiants désireux de compléter leurs connaissances, mais on peut regretter que les travaux de Doetsch n'y soient pas mentionnés.

CLIMESCU

* * *

Ruel V. Churchill, – *Introduction to complex variables and applications.* Mc Graw-Hill Book Company, New-York, Toronto, London. 1948.

L'auteur publie sous forme de livre son cours de l'université de Michigan, légèrement développé, et, comme il le dit lui-même, il a un double objectif :

D'une part exposer rigoureusement, sauf en ce qui concerne certains concepts géométriques intuitivement évidents, les parties de la théorie classique des fonctions qui sont nécessaires pour les applications et, d'autre part donner un bref aperçu de quelques applications possibles.

Déclarons tout de suite qu'il a très bien rempli son objectif et que son livre, facile à suivre pour un étudiant, peut procurer à qui-

conque connaît le sujet des moments d'agréable délassement de l'esprit. Il faut ajouter que l'utilité et l'agrément sont augmentés par la qualité du papier et de l'impression et par le grand nombre d'exercices ajoutés à chaque chapitre.

Comme on le voit, la caractéristique principale du livre est de marier la théorie et les applications, choisies parmi celles qu'on rencontre dans la physique théorique ou dans la science de l'ingénieur (potentiels complexes de la mécanique des fluides, potentiels électrostatiques, distribution de la température dans une plaque plane), et cela en un nombre raisonnable de pages, de telle sorte qu'un étudiant moyen puisse assimiler la matière dans un semestre. C'est une gageure que l'auteur a tenue !

Nous reproduisons ci-dessous la table des matières.

1. Complex numbers ; 2. Analytic functions ; 3. Elementary functions ; 4. The geometry of elementary functions ; 5. Integrals ; 6. Power series ; 7. Residues and poles ; 8. Conformal mapping ; 9. Applications of conformal mapping ; 10. The Schwarz-Christoffel transformation ; 11. Analytic continuation ; 12. Riemann surfaces. Appendix 1 : Bibliography ; Appendix 2 : Table of transformations of regions.

CLIMESCU

* * *

Lucien Godeaux, – *Analyse Mathématique* (Cours de la Faculté des Sciences de l'Université de Liège). 3 vol. Ed. Sciences et Lettres, Liège, 1946-1947.

Parmi les étudiants de l'Université de Jassy le nom de M. Godeaux a été et est encore des plus populaires, car c'est dans ses „*Leçons de Géométrie projective*" qu'ils cherchaient, en absence de textes roumains, à consolider et à approfondir les connaissances acquises au cours de géométrie. C'est donc pour nous, ancien étudiant de Jassy et, partant, ancien lecteur de M. Godeaux, un agréable devoir que de faire ici le compte rendu de son „*Analyse Mathématique*" et, en même temps, de rendre public le sentiment de haute estime que les meilleurs étudiants lui ont vouée.

Les qualités maîtresses de M. Godeaux – clarté, élégance, art d'agencement des parties – se retrouvent d'ailleurs à profusion dans son nouvel ouvrage, qui reproduit les leçons professées par l'auteur à la candidature ingénieur et aux candidatures en Sciences mathématiques et en Sciences physiques. Ajoutons que le grand nombre d'exemples et le recours fréquent à l'intuition géométrique facilitent grandement

la tâche du lecteur ; remarquons enfin la présence de certaines questions qu'on trouve plus rarement traitées dans les ouvrages de ce genre, comme par exemple la détermination des asymptotes des courbes gauches ou la méthode de E. Cotton pour l'évaluation de l'erreur commise dans l'intégration approchée d'une équation différentielle.

Le premier volume est consacré au calcul différentiel et intégral et aux séries, le second aux applications géométriques et le troisième aux équations différentielles, au calcul des variations et aux notions de représentation conforme nécessaires aux élèves ingénieurs pour aborder avec fruit l'hydrodynamique ou l'aérodynamique.

Afin de permettre au lecteur de se faire une idée du contenu exact de l'ouvrage, nous reproduisons ci-dessous les titres des chapitres.

I-er volume. 1. Préliminaires.-Variables.-Limites. 2. Fonctions réelles de variables réelles. 3. Etude de quelques fonctions particulières. 4. Dérivées et différentielles du premier ordre des fonctions explicites. 5. Dérivées et différentielles successives des fonctions explicites. 6. Dérivées et différentielles des fonctions implicites. 7. Changements de variables. 8. La formule de Taylor. 9. Vraies valeurs des expressions indéterminées. 10. Extréma des fonctions. 11. Intégrales générales ou indéfinies. 12. Intégrales définies. 13. Extensions de la notion d'intégrale définie. 14. Intégrales curvilignes et différentielles totales. 15. Intégrales multiples. 16. Etude des séries. 17. Notions sur les séries de Fourier.

II-ème volume. 1. Tangentes et plans tangents aux courbes et aux surfaces. 2. Etude des courbes en un point ordinaire. 3. Points singuliers des courbes et des surfaces. 4. Asymptotes des courbes. 5. Rectification et courbures des courbes. 6. Courbes et surfaces enveloppes. 7. Etude des surfaces en un point ordinaire. 8. Contact des courbes et des surfaces. 9. Mesure des aires et des volumes. 10. Trajectoires des familles de courbes et de surfaces.

III-ème volume. 1. Généralités sur les équations différentielles et les systèmes d'équations différentielles. 2. Méthodes élémentaires d'intégration des équations différentielles. 3. Equations différentielles linéaires. 4. Systèmes différentiels. 5. Formation d'intégrales d'équations différentielles 6. Equations aux dérivées partielles. 7. Eléments du calcul des variations. 8. Notions sur la représentation conforme. 9. Calcul des différences et interpolation.

CLIMESCU

L. Bruwier, – *Cours d'analyse mathématique. Eléments de la théorie des fonctions d'une variable complexe.* Faculté Polytechnique de Mons. Cercle d'Editions des Etudiants. 1948.

L'ouvrage de M. Bruwier expose rapidement et d'une manière attrayante les éléments de la théorie des fonctions d'une variable complexe, dans la mesure où elle est utile à des ingénieurs électromécaniciens ; sa lecture constitue une préparation nécessaire à l'étude des traités spéciaux de mécanique des fluides ou d'électrotechnique.

Dans l'introduction l'auteur rappelle les règles de calcul avec les nombres complexes, il donne quelques notions sur les ensembles de nombres complexes, il introduit la notion de fonction continue et il reproduit les théorèmes relatifs à la continuité de la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues. Le Ch. I traite de la dérivation et de l'intégration des fonctions de variable complexe (équations de Riemann, théorème de Cauchy); le Chapitre II est consacré à la formule de Cauchy et à ses conséquences ; on y démontre aussi le théorème de Liouville et la formule de Poisson. Le Chapitre III expose la théorie des développements en série (de Taylor et de Laurent) et l'idée du prolongement analytique, le Chapitre IV est dédié aux fonctions uniformes et à leurs applications, surtout le calcul des résidus ; le Chapitre V s'occupe des applications au calcul des intégrales définies réelles et à la résolution des équations différentielles linéaires, cette dernière application étant plus détaillée, comme il est naturel de la part d'un spécialiste de la question. Signalons en passant l'obtention sous forme d'intégrale d'une solution particulière d'une équation linéaire à coefficients constants dont le second membre est une fonction nulle pour x négatif et égale à l'unité pour x positif.

Le Chapitre VI expose sommairement quelques généralités sur les fonctions multiformes et une note sur la représentation conforme termine l'ouvrage ; on nous permettra de signaler ici que l'énoncé du théorème de Riemann fait intervenir les intérieurs de deux domaines simplement connexes, la correspondance entre les frontières formant l'objet d'un problème distinct, ce qui ne résulte pas clairement des exemples donnés.

CLIMESCU

* * *

Léon Moret, – *Précis de Géologie.* 637 p., Masson et Cie, Paris 1947.

Après ses deux Manuels de Paléontologie, animale et végétale, le prof. Moret de Grenoble a fait paraître récemment un excellent Précis de Géologie dont nous voulons faire une courte présentation aux lecteurs de ce „Bulletin".

Il n'y a rien de plus difficile à réaliser, en général, qu'un bon Précis, qui soit à la fois au courant des progrès acquis dans des domaines assez éloignés les uns des autres et toutefois suffisamment équilibré afin qu'il ne dépasse pas les limites imposées par son but.

Or l'auteur a su si bien éviter tous les écueils soulevés par une pareille entreprise qu'il a réussi à mettre à la disposition des étudiants en Géologie et des candidats aux grandes Ecoles un livre de la plus grande utilité.

Après de courtes généralités sur la constitution et l'histoire de la Terre, le livre, renonçant aux notions de Géologie dynamique qu'il suppose connues, nous présente un chapitre substantiel sur les matériaux de l'écorce terrestre, chapitre qui débute par une introduction dans la Cristallographie présentée d'une façon succinte mais complète étant suivi des notions plus amples de Minéralogie et de Pétrographie.

La 2-ième partie du livre traite de la répartition chronologique des matériaux de l'écorce terrestre. Ici est tracée d'abord l'évolution de la vie à travers les périodes géologiques et après des données sommaires de Paléozoologie et de Paléobotanique, sont envisagées les relations mutuelles des couches au point de vue stratigraphique.

Les chapitres consacrés à la Tectonique analytique et à la Tectonique générale sont exposés avec une grande clarté et en ce qui concerne les styles tectoniques, l'auteur a su présenter d'une façon synthétique des données aussi complexes et aussi vastes que ceux concernant les plissements alpins.

Dans la 4-e partie, l'auteur retrace, à l'aide des données précédemment exposées, l'histoire de la terre depuis les périodes les plus anciennes jusqu'à nos pours. Il ne s'agit là d'une description géologique complète, mais bien d'une caractérisation générale des terrains géologiques accompagnée d'une répartition géographipue de ces mêmes terrains.

Quant aux reconstitutions paléogéographiques, elles sont en grande partie établies d'après les cartes de R. Furon de 1941.

Les glaciations du Quaternaire sont présentées avec assez de précisions de même que les autres évènements quaternaires, malgré leur brièveté.

La 5-e partie du livre enfin est réservée à la représentation graphique des caractères géologiques étudiées précédemment et aux méthodes employées pour la confection des cartes géologiques correctes.

Le dernier chapitre soulève la question de l'utilisation de la méthode cinématographique en Paléogéographie et en Tectonique. Appliquée à la Géologie, l'auteur est d'avis que la technique cinématographique pourrait devenir un procédé de démonstration et de vérification remarquable surtout par l'introduction du facteur temps, dont l'importance est ici capitale.

Ce Précis condensé de faits, dépourvu de tout dogmatisme didactique et illustré de nombreux dessins expressifs est appelé, malgrès les lacunes inévitables en pareille oeuvre, à remplir sa tâche auprès des étudiants naturalistes et de tout ceux qui aiment la Géologie.

GH. HASAN

* * *

Livio Livi, – *Elementi di Statistica.* 8-e éd. CEDAM, Casa Editrice Dott. Antonio Milano, Padova, 1948, 399 pag.

Parmi les sciences modernes reclamant l'utilisation des procédés et des profondes et presque inépuisables richesses de la mathématique contemporaine se situe en premier lieu l'analyse statistique. Liée très étroitement aux problèmes vitaux concernant l'économie politique et la statistique sociale, la théorie statistique a provoquée dès le debut du XIX-e siècle un grand nombre de travaux des philosophes, des logiciens et des sociologues, aboutissant aujourd'hui à certaines mises-au-point, concrétisées dans ces dernières années dans quelques prises de position contre l'utilisation fétichiste [1]) des mathématiques dans les procédés matériels les plus variés.

Ce point de vue de l'utilisation „rationnelle" des mathématiques est abordé aussi par l'auteur de ce traité qui a connu jusqu'à ce moment un succès impressionant de librairie en s'élevant à la huitième édition.

Tout en conservant la teneur „élémentaire" de ce cours, l'auteur réussit pleinement de faire correspondre à une multitude de phénomènes qualitatifs démographiques, sociaux, économiques etc., certains indices ou caractéristiques quantitatifs permettant la formulation des lois probabilistiques et la prévision en moyenne d'un nombre de résultats des procès futurs.

1) Voir p. ex., *Théorie de la Statistique mathématique* (en russe), par Bojarski, V. Starovski, V. Khotimski, B. Iastremski. Editions „Plankhozgiz" Moscou, 1930.

Le relèvement des données et leur systématisation, tout en constituant le sujet des deux premiers chapitres, trouve dans l'application de la méthode des coordonnées cartésiennes, polaires et triangulaires, aux échelles diverses, tant que dans les stéréogrammes et les cartogrammes une solution heureuse pour un ensemble des cas intéressant la société humaine.

Le fondement du livre est consacré à l'élaboration des données. On y trouve le découvrement et la correction des erreurs, l'étude de l'intensité et de la fréquence et la théorie des courbes de distribution, la mesure de la variabilité et l'étude des relations statistiques basées sur les mesures de la connexion et de la concordance. C'est ici que se sont développées les méthodes mathématiques de l'interpolation et les notions de l'analyse combinatoire et du calcul des probabilités.

Le dernier chapitre consacré à la détermination des connexions causales développe tout particulièrement quelques méthodes d'élimination et de la comparaison des données. Des schémas théoriques concernant la comparaison, nous soulignons la comparaison de l'intensité de ce que l'auteur appelle *phénomènes* ou *caractères dérivés* ayant aussi „oltre un carattere di elegante superstruttura metodologica anche un'utilità finale descrittiva e strumetale... assumendosi come materiale per l'ulteriore progresso dell'investigazione scientifica".

La présentation typographique est à l'hauteur de la tradition, très appréciée dans le monde des hommes de science et de technique, de la Maison CEDAM de Padou, Editeurs.

D. I. MANGERON

* * *

J. J. Burckhardt, – *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie.* Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften 13. Verlag Birkhäuser, Basel. 1947.

Un cristal peut être considéré de deux points de vue :

a) Soit comme un solide qui ne change pas si on le soumet à certaines opérations géométriques (symétrie par rapport à un point, symétries par rapport à des plans, rotations autour de certains axes) et alors il est naturel de réunir dans une même classe tous les cristaux qui possèdent les mêmes symétries ;

b) Soit comme un réseau, et alors il est naturel de représenter une classe de cristaux par un groupe de recouvrements du réseau, groupe qui laisse un point invariant.

L'auteur choisi la seconde voie qui lui permet de pousser plus à fond la classificatin des classes cristallines, par l'introduction de la notion de l'équivalence arithmétique de deux classes.

Au point de vue mathématique la façon de procéder de l'auteur a l'avantage de se prêter à la généralisation dans les espaces à n dimensions et, en même temps, d'insuffler une vie nouvelle à la géométrie des nombres.

Après une introduction, dans laquelle M. Burckhardt résume l'histoire de la question depuis les mémorables travaux de Schoenflies et Fedorow, suit un chapitre consacré aux réseaux, chapitre qui contient les notions mathématiques nécessaires, l'auteur estimant à juste titre qu'il faut demander le moins possible de connaissances au lecteur, qui n'est pas obligatoirement mathématicien.

Le chapitre II est consacré aux classes de cristaux ; il débute par les définitions suivantes :

Un groupe de recouvrements d'un réseau, admettant un point fixe, s'appelle une classe de cristaux.

Deux classes de cristaux sont équivalentes au sens géométrique et définissent une même classe géométrique de cristaux si elles proviennent l'une de l'autre par transformation avec une matrice non-singulière.

Deux classes de cristaux sont équivalentes au sens arithmétique et définissent la même classe arithmétique de cristaux, si elles proviennent l'une de l'autre par une transformation à matrice unimodulaire à éléments entiers.

On détermine ensuite les classes, géométriques et arithmétiques, du plan et de l'espace.

La Chapitre III expose la théorie des groupes de mouvement du plan et de l'espace à trois dimensions ; en particulier on donne la liste des 230 groupes de mouvements de l'espace. Les derniers §, (26 et 27), faisant toujours partie du Ch. III, donnent un aperçu de la théorie des groupes de mouvements de l'espace euclidien à n dimensions, traités d'après les méthodes qui ont réussi dans les espaces à 2 et 3 dimensions.

Dans l'ensemble, l'ouvrage est, croyons-nous, destiné à devenir un instrument de travail, très utile, tant aux minéralogistes qu'aux spécialistes de la théorie des groupes et sa qualité est augmentée par l'excellence de la présentation typographique.

CLIMESCU

* * *

MEGYEI TOVÁBBKÉPZŐ INTÉZET MŰSZERTÁR

Bruno Finzi, Maria Pastori, – *Calcolo tensoriale e applicazioni.* Nicola Zanichelli, Editore, Bologna, 1949, VIII + + 428 pp.

Ce livre est destiné à tous ceux qui – n'ayant pas d'aut e culture mathématique que celle qu'on enseigne d'habitude dans les premières années des Ecoles Polytechniques et des Facultés des Sciences–désirent connaître les méthodes du calcul tensoriel, leurs applications aux diverses branches des mathématiques ou de la Physique et leur importance. Ecrit clairement et avec beaucoup de soin didactique il a teint pleinement son but.

Après une introduction où sont passées rapidement en revue les notions fondamentales, pour que le lecteur sache dès le début de quoi il s'agit, dans le premier chapitre est traitée la théorie des champs de vecteurs, dans le deuxième l'algèbre tensorielle, dans le troisième les homographies vectorielles.

L'analyse tensorielle est d'abord traitée dans les espaces euclidiens (Chap. IV). Les notions ainsi gagnées sont ensuite étendues aux variétés riemanniennes, définies dans les espaces euclidiens. Après avoir défini la dérivation covariante et le tenseur de Riemann, est aussi donnée une idée des généralisations ultérieures des espaces riemanniens, notamment des espaces à connexion affine.

Les chapitres VI et VII traitent des applications à la géométrie différentielle dans les espaces de Riemann à deux et à plusieurs dimensions. Le parallélisme de Levi-Civita, la courbure de l'espace, les coordonnées géodésiques y sont traités.

Le VII-e chapitre contient les applications à la mécanique des milieux continus. D'une manière succinte mais clairement, sont exposées toutes les notions fondamentales de la mécanique des fluides et de la théorie de l'élasticité.

Les deux derniers chapitres ont pour objet la théorie du champ électromagnétique et les théories de la relativité restreinte et généralisée.

Pour ne pas alourdir le texte, les auteurs n'ont pas fait de citations en bas des pages. Cependant une bonne bibliographie est placée à la fin du volume, où le lect ur trouve tout ce dont il a besoin s'il désire les renseignements supplémentaires.

M. H.

* * *

J. G. Crowther and R. Whiddington, C B. E., F. R. S.,- *Science at war.* Department of Scientific and Industrial Research, N. M. Stationery Office, 1948 (reprinted) London, 185 pag , LI plates, 51 fig. 25. 6 d. net.

The object of this book is to make available to the public an authoritative account of some of the more important aspects of the scientific contribution to the war effort, based on the official archives, but so written as to be acceptable to the reader without special scientific education.

The services of the authors to carry out the indoubtedly true task that science played a much larger part than in any earlier war are very appreciable. The account, dealing with some of the endless succession and variety of scientific problems, which the war presented with such urgency of solution, contains the chapters dedicated to: I. Radar (pages 1—90); II. Operational Research (pages 91—120); The atomic bomb (pages 121—150); and IV. Science and the Sea (pages 151—185).

The book point out the chief difference in the use of science in the war of 1939—1945 as compared with former wars. It consists in the comradsship and in the extraordinary intimacy between deviser, user and producer, in the complete equality of their collaboration and in their meetings called „Sunday Soviets".

The four exceedingly good illustative chapters enable us to understand the nature of the problems chosen for description and the scientific principales invoked to deal with them, and to form some idea of the high qualities of mind devoted to the scientific work abounding with the spirit of enthusiasm and sacrifice, justified exclusively by the fidelity to the scientific vocation of the scientists throughout the world and with the most earnest hope that the call for such sacrifice to use science as an and to a war will never come again and the discovery and invention of the scientists" will find immediate and beneficent uses in peace" [1]).

D. I. M.

* * *

1) From the Foreword of the Chairman ot the Scientific Advisory Committee to the Cabinet to abtain the approval of the Government for the preparation of this work.

E. Bottani, R. Sartori, – *Elettrotecnica.* Vol. I. *Circuite în regime stazionario.* Libreria editrice Politecnica Cesare Tamburini-Milano-1947. XIV-488, pag. ; 266 figuri ; 14 tabele (1500 lire it.).

In acest volum autorii expun teoria circuitelor electrice parcurse de curenţii constanţi. Această teorie se bazează pe demonstraţiile desvoltate în cursul de Electrotechnică ţinut la Politechnica din Milano. Cum materia este desvoltată pe larg şi deci nu ar putea fi tratată în cursul unui singur an, s'au adoptat caractere mici pentru materia care poate fi lăsată la o parte în prima lectură.

Cartea se adresează mai cu seamă elevilor ingineri, cari trebuesc orientaţi către aplicaţii practice, lucru de care s'a ţinut seama în ordonarea şi expunerea materiei.

Expunerea faptelor este limitată la aspectul macroscopic, totusi numeroasele exemple bine alese, ilustrează în mod cât se poate de clar, aplicaţiile practice la care se referă studiul şi scot în evidenţă cum trebuesc înţelese.

Cu alte cuvinte fenomenul fizic este arătat în adevărata lumină în care trebue privit de către viitorii ingineri.

Se dă o deosebită desvoltare capitolelor relative la bipoli şi caracteristicile lor, legea lui Ohm, energetica bipolilor, precum şi cazurile particulare ale legii lui Ohm. Capitolul IX tratează despre legea lui Ohm în legătură cu mărimile electrice specifice, rezistivitate şi densitate, influenţa mediului şi a temperaturei.

In capitolul XI urmează studiul reţelelor de bipoli, stabilindu-se legile generale relative la distribuţiunea curentului şi a tensiunei, urmate de aplicaţii, în care se ţine seama de principiul suprapunerii efectelor, principiul reciprocităţii, etc.

Volumul conţine un apendice în care se reamintesc proprietăţile fundamentale ale numerelor complexe, ale funcţiunilor exponenţiale si ale funcţiunilor hyperbolice şi circulare.

Cartea fiind scrisă în limba italiană poate fi citită şi înţeleasă cu destulă uşurinţă la noi, având în vedere şi claritatea expunerei si va umple desigur un gol în ţara noastră, unde lipsa unor tratate de Electrotechnică în limba română se face simţită.

Regretăm că nu avem la îndemână si volumele următoare ale acestui tratat spre a putea avea o vedere generală asupra materiei tratate de către autori. Cu prilejul primirii lor vom face o recenzie de ansamblu într'o limbă de uzaj internaţionat curent.

GH. VASILIU

* * *

Selman Waksman,-*Microbial Antagonisms and Antibiotic Substances*. 1947. The Commonwealth Fund, New-York, 915 pag.

Monographie extrêmement intéressante tant par l'actualité des faits relatés, que par la documentation scientifique des données où se reflète l'activité féconde de l'auteur dans cette matière, dont le point culminant fut la découverte de la stréptomycine.

La découverte des antibiotiques commençant par la pénicilline a marqué une ére nouvelle dans la thérapeutique. Mais les débuts de cette découverte, remontent à l'époque comprise entre les années 1878-1890 quand le grand microbiologiste Pasteur pose le problème de l'importance du microbisme du sol, tandisque Koch en 1881 donne comme méthode d'investigation dans ce problème, la culture microbienne sur la plaque de gélatine.

Depuis et iusqu'à nos jours, une littérature immense apparue au sujet du problème du sol et des eaux en tant qu'habitat des microorganismes a montré que :

- le sol par les différents phénomènes physiques, par sa composition chimique et par une destruction biologique, représente un milieu défavorable pour le développement des microbes ;

- les déchets arrivés dans l'eau et sur le sol, ainsi que les substances alimentaires, représentent des milieux insuffisants pour le développement des différents microorganismes :

- la majorité des microbes pathogènes, ainsi que la majorité des autres microorganismes sont détruits par un antagonisme permanent existant entre ces organismes ;

- le mécanisme expliquant la déstruction des microorganismes antagonistes, consiste dans la production par ceux-ci de substances toxiques ou antagonistes.

Ces faits nous expliquent pourquoi le sol, quoique habité par de nombreux microorganismes, dont en partie des agents pathogènes, ne constitue pas un facteur important dans la production des différentes infections et épidémies, exception faite pour le charbon, le tétanos, la gangrène gazeuse et le bacille du botulisme.

Mais c'est à l'étude de l'antagonisme microbien qu'est due la découverte des substances antagonistes, c'est-à-dire la découverte des substances antibiotiques. Ces substances pouvent être produites aussi bien par les microbes que par les végétaux et les animaux.

Les mêmes microorganismes antagonistes, peuvent donner naissance à des substances antibiotiques de nature chimique et à activité

pharmacodynamique différente ; le Pseudomonas Aeruginosa produit la pyocyanase et la pyocyanine ; le Penicillium Notatum la pénicilline, la pénatine et la pénicilline B ou notatine, l'Aspergillus Flavus produit l'acide aspergillique et la flavine, le facille brevis la gramicidine et la tyrocidine etc.

Les mêmes microorganismes peuvent produire des antibiotiques différents selon la méthode de leur culture sur un milieu : l'Aspergillus Flavus cultivé en surface produit de l'acide aspergillique ; cultivé en profondeur il produit la flavicine.

Un même antibiotique peut être produit parfois par plusieurs variétés d'organismes, ce qui donne lieu alors, à de certains difficultés de nomenclature. La pénicilline peut être obtenue par le Penicillium Notatum, P. Chrysogenum, A. Flavus ainsi que par d'autres mycètes.

La découverte des formules chimiques des antibiotiques suit un rithme très rapide et aujourd'hui on est arrivé à connaître la composition chimique de beaucoup d'antibiotiques. Si la formule chimique d'un même antibiotique varie souvent, cette variation est en rapport soit avec la source d'où cette substance tire son origine, soit avec le milieu de culture du facteur génétique.

L'action sélective des antibiotiques vis-à-vis des différents microorganismes est caractéristique. La pénicilline est active vis-à-vis de certains microbes Gram-Positif et Négatif, la stréptomycine est active vis-à-vis de certains microbes Gram-Négatif.

Mais les antibiotiques sont sensibles à l'action des différents microorganismes et tandisque la pénicilline est détruite par plusieurs bactéries, la stréptomycine est plus résistante.

Le milieu où se développe un antibiotique peut n'avoir parfois aucune influence sur la production de cette substance. Certains éléments du milieu par ex. la peptone, le glucose et le sérum peuvent cependant neutraliser en partie au moins, l'activité antibiotique ; le sang d'un milieu peut parfois absorber et neutraliser complètement un antibiotique.

En ce qui concerne l'action pharmacodynamique d'un antibiotique on avait affirmé tout d'abord qu'il s'agissait d'une action bactériostatique, c'est-à-dire d'une inhibition dans le développement du facteur pathogène. Aujourd'hui une action bactéricide a été aussi mise en évidence.

Généralement, l'action des antibiotiques sur les microbes se manifeste soit par une inhibition de la respiration, soit par une altération du mécanisme d'utilisation des métabolites essentiels, soit par une diminution de la tension superficielles des microbes, soit enfin par une trouble de la division céllulaire et du développement microbien.

Du point de vue thérapeutique, l'utilité d'une substance médica-

menteuse dépend aussi du degré de toxicité de cette substance pour l'organisme animal. Certains antibiotiques, telle la pénicilline, ne possèdent pratiquement aucune toxicité, tandisque d'autres, comme est le cas pour la stréptomycine, sont en général toxiques.

De même certains organismes bien que sensibles au commencement pour un antibiotique, deviennent ensuite insensibles.

M. le Professeur S. Waksman, dans les 14 chapitres de sa monographie, expose tous ces problèmes documentés par une littérature scientifique énorme où ses travaux personnels, auxquels est due aussi la découverte de la stréptomycine, abondent.

Dans l'avant dernier chapitre, l'auteur attaque l'intéressant problème des mycètes, comme parasites facultatifs ou obligatoires du règne végétal au point de vue de l'antagonisme existant entre les microorganismes et au point de vue de leur substances antibiotiques.

Dans le dernier chapitre, l'auteur montre les problèmes qui se posent aujourd'hui pour le bactériologue, le chimiste, le thérapeutiste et le pharmacologue devant les découvertes de plus en plus nombreuses des substances antibiotiques.

A chaque nouvelle page, la monographie contient de nouvelles et d'intéressantes notions de biologie, bactériologie, chimie, pharmacodynamie et thérapeutique dont spécialiste dans l'une de ces matières désireux de résumer ce livre pourrait remplir, là-dessus, des pages entières. De là, la difficulté de rendre l'essentiel dans le cadre restrein d'un compte rendu.

D. BRANIȘTEANU

* * *

D. W. Hinde and M. Hinde, – *Electric and Diesel-Electric Locomotives.* MacMillan and Co., Limited, London, 1948, 167 photographs, numerous drawings and numerical tables, 366 pag. (36 s. net).

In recent years two new types of locomotive have come into general use in addition to the modern articulated passenger and freight steam locomotives ; these are the electric locomotive and the diesel-electric locomotive.

With the idea of setting out the essential requirements of both electric and diesel-electric locomotives that are becoming, with the extension of railway electrification, increasingly popular in different countries of the world, the authors have described in this book the essential features of these new methods of railway motive power.

The various chapters of this treatise deal in turn in a very gra-

duate manner with the problem of the modern locomotives, the traction motors for locomotives, the control gear, the auxiliaries and brake equipment, the direct current locomotives, the convertor locomotives, Diesel engines and transmission systems and Diesel-electric locomotives containing any descriptions and illustrations of selected locomotives. The last chapter is dedicated to two schemes representing some very interesting prophesyings concerning the trends of future designs. By this occasion the authors present the new schemes for the steam-electric and the gas-turbine-electric locomotive. It would be very interesting to outline in the later edition of this treatise the schemes of the „atomic-electric" or „atomic-..." locomotive.

A particularly valuable appendix of 90 pages using the methods of wheel classification takes the form of a very accurate table showing the specifications of all the principal types of electric locomotives from various european countries, U. R. S. S., Great Britain and U. S. A. May the ref. suggests a further entry suitable also for later editions? The students of engineering require at less one project containing the whole mathematical developpements for one type of the modern electrical locomotives.

Numerous data, photographs and drawings provided by a number of manufacturers and railway companies throughout the world, as also the various descriptions and illustrations of the constructional features give much up-to-date value to this book, very useful to locomotive engineers, designers and students of engineering.

It is quite superfluous to insiste or to underline the traditional excellent typographical presentation of this treatise copyright by the MacMillan & Co, limited, and containing trustworthy information on developments in electric traction.

D. I. M.

* * *

F. Le Lionnais, – *Les grands courants de la pensée mathématique.* Collection „L'Humanisme Scientifique de demain", Editions des „Cahiers du Sud", 1948, Paris, 533 p.

Le livre contient cinquante articles signés par les plus grandes figures des mathématiques modernes, parmi lesquelles, citons: Emile Borel, Nicolas Bourbaki, Georges Bouligand, Maurice Fréchet, Georges Valiron, Arnaud Denjoy, Elie Cartan Lucien Godeaus, André Weil, Louis de Broglie, Andreas Speiser, et la liste pourrait être continuée.

L'initiative a été prise en 1942, pendant l'occupation et le but

était celui de montrer „les directions ou s'engagent ses (des Mathématiques) différentes disciplines". La collection a pu paraître après des difficultés presque insurmontables causées par l'occupation nazie, et dont l'une-la plus importante-l'arrestation de F. Le Lionnais qui appartenait à un réseau de résistance, aurait pu empêcher complètement l'apparition de la collection. Pour donner la mesure des difficultés passées, nous allons citer quelques lignes de l'avant-propos signé par J. Ballard: „Parmi les espoirs qui le soutenaient (il est question de F. Le Lionnais), les projets de *Grands Courants de la Pensée mathématique* occupait si fort son esprit qu'il faillit un jour lui coûter la vie. Il en avait recomposé de mémoire le sommaire; certains noms inscrits sur une feuille de papier d'emballage tombèrent par malchance sous les yeux des gardiens. Il fut appelé à s'expliquer devant un policier. Ce dernier, ignare comme peut l'être un garde-chiourme, mesurait toute chose à son compas. L'homme ne voulait voir dans cette liste de noms: Borel, Montel, de Broglie, Valéry, Brunschvicg, que des bagnards décidés à lui fausser compagnie..... c'est ainsi que pour l'amour des mathématiques notre ami Le Lionnais reçut les coups de schlague réglementaires qui auraient pu le tuer".

Les articles sont groupés en trois chapitres: Le Temple Mathématique, l'Epopée Mathématique, Influences, dont les titres rappellent suggestivement les objets. Pour voir l'esprit du livre nous allons reproduire quelques passages des notes qui servent de présentation à chaque groupe d'articles: „Que les mathématiques ne soient pas une création *ex nihilo* de la pensée, mais qu'elles traduisent la structure et la forme d'une réalité matérielle extérieure à l'homme, c'est ce dont chacun doit décider pour sa part. Personnellement nous en sommes convaincus et nous pensons que la plupart des auteurs de ce recueil le reconnaissent ou tendent à l'établir", (p. 329). „Les mathématiques concourent à la vaste entreprise de „domination de la nature" [1]) par l'humanité. Aucun fait n'est aussi propre à mettre en lumière l'essence et l'une des raisons d'être de l'abstraction. Extraite, comme le rappelle son étymologie, par de judicieuses sublimations elle vérifie sa justesse et confirme sa légitimité par la puissance qu'elle procure à l'homme" (p. 499). „Mais c'est surtout à travers cet amplificateur extraordinaire que sont les sciences dites exactes (exactes, signifiant souvent: mathématisées) que les mathématiques participent aux aspects les plus modernes – et parfois les plus troublants – de l'action humaine".

Comme une illustration la plus conséquente des passages cités plus

1) L'expression est de Descartes (cité dans le texte).

haut nous allons indiquer les articles de Paul Laberenne et de Jacques Chapelon.

Malgré cette attitude du présentateur, il y a d'articles dont les auteurs ne souscrivent guerre à cette position. Enfin il faut remarquer que nombreux auteurs d'articles contenus dans la collection, ou de ceux qui avaient promis de tels articles, ont payé d'immenses souffrances et quelques-uns de leur vie l'adésion aux conceptions énoncés dans les paragraphes cités plus haut et le réfus d'accepter l'oppression fasciste.

ADOLF HAIMOVICI

* * *

M. Brelot, – *Les principes mathématiques de la Mécanique Classique*. Editions Arthaud, Grenoble-Paris, 1945, 62 pag.

L'immense rôle que joue dans les nombreux champs scientifiques et techniques la Mécanique classique de Newton, Lagrange, Voigt, Lorentz,... a imposé des le debut de notre siècle nombre de recherches consistant dens les mises au point de ses principes sous l'aspect physico-exprérimental, philosophique et mathématique et dans les précisions précieuses concernant l'évidence de ce qu'il a d'arbitraire et d'irrationnel dans ses fondements. [1])

Le livre de M. Brelot, tout en présentant au public scientifique un bref exposé mathématique des premiers principes de Mécanique rationnelle, contribue essentiellement, par la révision progressive d'un nombre de points obscurs, par la correction des longueurs, des insuffisances et même des imprécisions et des inéxactitudes à l'explication d'un ensemble des anomalies plus ou moins apparentes.

Pendant ces dernières années nombre de représentants de mathématiques contemporains ont contribués – selon une expression suggestive de M. Brelot – à l'éloignement „d'un défaut de séparation entre la structure mathématique bien choisie et le point de vue phyque" (Voir outre les travaux récents de l'auteur, ceux de M. Platrier, de l'Ecole de M. Picone, de celui de M. G. Hamel,...). C'est dans cette ordre d'idées que l'auteur reprend la construction prometteuse de rigueur et de généralité de la Mécanique rationnelle par l'introduction et l'utilisation systématique et explicite des fonctions additives d'ensemble et

1. Voir, par exemple, P. Painlevé, *Les axiomes de la Mécanique*, Paris, Gauthier-Villars, 1922.

G. Hamel, *Ueber die Grundlagen der Mechanik*, Math. Ann., t. LXVI, 1909.

S. Zaremba, *Sur la notion de force en mécanique*, Bull. Soc. Math. de France, 1934.

de l'instrument si parfaitement adopté pour serrer de plus près la réalité physique qu'est l'intégrale de Stieltjes (selon l'auteur de Radon, dite de Lebesgue-Stieltjes). D'où la précision de notions vagues de distributions de masses et de forces et la construction assez harmonieuse de la cinématique, statique et dynamique analytique. L'auteur renonce pour le moment à l'étude du frottement dont „l'imprécision expérimentale et les lois incommodes n'inclinent guerre à un effort d'exposition mathématique".

La seconde partie de ce livre est consacrée à quelques problèmes particuliers. De ceux-ci nous soulignons surtout une étude rigoureuse de la stabilité et des petits mouvements tout à fait nécessaire pour l'enseignement et qu'on ne trouve pas convenablement développée dans les ouvrages usuels et une théorie systématique et axiomatique des chocs ou des percussions, analogue à celle de la dynamique, et plus simple et plus satisfaisante des considérations développées jusqu'aujourd'hui à cet égard. Nous nous souhaitons de pouvoir tenir compte de toutes ces suggestions bien justifiées pendant l'élaboration de notre cours ; en tout cas nous les „expérimentons" depuis quelques années avec diverses promotions de nos étudiants. Nous remercions M. Brelot pour le plaisir le plus exquis qu'il nous a causé en nous faisant parvenir son livre pour le compte rendu.

D. I. MANGERON

* * *

Gustav Mie, – *Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus.* 3-te Aufl. 1948. Verlag Ferdinand Enke, Stuttgart. 666 pag. ; 519 fig. Prix 48 M.

La première édition de ces *Leçons d'Electricité et de Magnétisme*" est parue en 1910, et avait comme caractéristique une exposition expérimentale en accord avec la théorie de Maxwell, et en accord avec les idées de Faraday-Maxwell, d'après lesquelles les actions électriques se font de proche en proche et non pas à distance. La deuxième édition est de 1941 ; et cette troisième édition est de 1948, à l'occasion de 80-ième anniversaire de l'auteur. L'auteur, G. Mie, proffesseur à l'Université de Freiburg i. Br., (né en 1868) est connu aux physiciens surtout par deux travaux : la propagation des ondes électromagnétiques de haute fréquence le long de deux fils parallèles infinis, (1900), (la vérification de sa théorie a été faite par W. Arkadiew en 1919, et par Laville en 1924) ; et la dispersion de la lumière par les particules métalliques colloïdales (en 1908).

L'auteur est un excellent connaisseur de la théorie de Maxwell ;

aussi, son exposition des expériences et des phénomènes électriques est claire et en accord avec cette théorie. Ce livre est à conseiller à tout ceux qui veulent commencer à comprendre l'électricité. Les développements mathématiques sont données simplement, schématiquement, sans insister sur les démonstrations ; l'auteur emploie le symbole vectoriel. Le livre est tenu au courant des dernières découvertes ; dans les calculs et dans les exemples on utilise les valeurs des constantes physiques, revisées par les derniers congrès de physique.

Un chapitre préliminaire est consacré au calcul vectoriel, nécessaire aux physiciens, et deux chapitres derniers sont consacrés au principe de relativité et à la physique quantique.

Les figures sont schématiques, grandes et claires. Le livre est bien imprimé et sympathique comme format.

Nous recommandons ce livre à nos étudiants en physique et électrotechnique.

ST. PROCOPIU

* * *

S. Chapman and J. Bartels, - *Geomagnetism.* Vol. I. *Geomagnetic and related Phenomena.* XXVI + 542 pag. Vol. II. *Analysis of the data, and physical Theories.* X + 543 à 1049 p. (The international Series of Monographs on Physics) Oxford, at the Clarendon Press, 1940.

Ce Traité de Magnétisme terrestre ou de Géomagnétisme est paru en 1940, et j'en ai eu connaissance à la Bibliothèque Centrale de l'Université de Jassy, qui l'a reçu en 1948, comme Don de l'Université de Oxford. Il est paru dans une collection internationale, dirigée par R. H. Fowler, anglais, et P. Kapitza, russe. Le Traité est écrit par Sydney Chapman, actuellement professeur à l'Université de Oxford, et Julius Bartels, de l'Université de Berlin, les deux auteurs étant universellement connus dans le domaine du magnétisme terrestre.

Bien que ce traité est paru depuis 8 ans, nous croyons qu'il est nécessaire de la faire signaler dans notre Bibliographie, étant de ces oeuvres fondamentales, qui même, lorsqu'elles vieillissent, elles restent toujours utiles et intéresantes. L'exposition du magnétisme terrestre dans ce traité est ordonnée géométriquement, ce qui constitue une surprise et un succès, si l'on considère le matériel immense, touffu et non encore coordonné de ce demaine. Une grande partie du matériel exposé comprend des travaux propres des deux auteurs.

Le magnétisme terrestre n'a pas eu une exposition générale depuis le traité de E. Mascart, de 1900. Depuis lors les observations de

magnétisme terrestre se sont ammasées considérablement, car le nombre des Observatoires magnétiques s'est multiplié. Or, un trop grand nombre de faits et de données d'observation, non reliés et non systématisés, plutôt encombrent le chercheur et le travail. Aussi ce Traité, qui met de l'ordre dans le matériel d'observation, en mettant en évidence les problèmes qui se posent ou qui peuvent être résolus, est venu à temps. Le magnétisme terrestre fait continuellement des acquisitions importantes, mais les auteurs conviennent que ce n'est que dans les questions touchant la théorie de l'origine du magnétisme terrestre, auxquelles ils n'ont pas donné un grand développement, que ce Traité pourrait demander des révisions à plus court delai. C'est ce qu'il est arrivé d'ailleurs car, en 1947, la théorie de l'origine du magnétisme terrestre a obtenue une solution intéressante, sinon définitive, par l'hypothèse de Blackett, à savoir que les corps gravifiques en rotation sont des aimants, et par les observations du magnétisme des corps célestes, faites par Babcock, Thiessen. La théorie a été développée mathématiquement par S. Chapman, et controlée expérimentalement, mais les résultats n'apportent des changements essentiels aux données de ce Traité.

Voici les titres des chapitres, de ce livre, absolument nécessaire dans tout Observatoire Magnétique :

Vol. I. Principes généraux. Observations magnétiques, principes de mesure, détails de mesures magnétiques. Champ magnétique de la Terre et sa variation séculaire. Magnétisme et géologie, prospection magnétique. Données solaires et lunaires. Variation magnétique solaire diurne. Variation lunaire diurne. Morphologie d'une perturbation magnétique. Pulsations. Perturbations magnétiques, statistiques. Cycles de 27 jours. Courants telluriques. Aurores polaires. Atmosphère terrestre, ionosphère.

Vol. II. Périodicités et Analyse harmonique en Géophysique. Analyse harmonique sphérique. Analyse harmonique physique du champ général. Variabilité des coefficients harmoniques pour les variations magnétiques.

Théories physiques des phénomènes géomagnétiques. Théorie du champ général et des variations séculaires. Induction électromagnétique dans la Terre. Théories des variations solaire et lunaire diurnes. Emission corpusculaire du Soleil et perturbations géomagnétiques. Théorie des orages magnétiques et aurores polaires.

Le volume se complète par une exposition générale historique, et par une bibliographie très vaste, qui comprend près de 1200 références.

Le domaine du magnétisme terrestre apparaît dans ce Traité

comme relié à la physique solaire et lunaire, à la météorologie et à la physique de l'ionosphère.

Ce Traité de Géomagnétisme, élégamment imprimé, avec des figures et des planches excellentes, constitue une oeuvre capitale dans le domaine du magnétisme terrestre, pour les observateurs, expérimentateurs ou théoriciens.

ST. PROCOPIU

* * *

Henry D. Smyth, – *Atom-Energie und ihre Verwertung im Kriege.* Nach der erweiterten Ausgabe von 1946 übersetzt und erläutert von Prof. Dr. Friedr. Dessauer. Mit 8 Kunstdrucktafeln. Ernst Reinhardt Verlag A. G., Basel. Leinen Fr. 16, 352 Seiten, 1947.

Die grundlegenden Arbeiten über Atomzertrümmerung von Rutherford, Bothe, Becker, Joliot, Kaluza, Chadwick, Hahn, Meitner, und anderer Forscher, die ausschliesslich der Treue und Gefolgschaft zur Wissenschaftlicher Berufung der Wissenschaftler aller Länder der Welt entspringen, um dadurch zu einer Verständigung und einer gemeinsamen Mitwirkung auf internationaler Grundlage, durch die Wissenschaft und für die Wissenschaft, haben während des 2. Weltkrieges eine Anwendung zur Herstellung der Atombombe gefunden.

Der „Smyth Bericht", wie das Werk allgemein kurz genannt wird, gibt die Geschichte des organisatorisches Aufbaues in alles wesentlichen Zügen und eine eingehende Darstellung der ganzen wissenschaftlichen Forschungen, deren Ergebnis die Atomenergie als Kriegs- und hoffentlich von jetzt ab nur als Friedensmittel ist.

Bei technischen Patenten sowie physikalischen und chemischen Daten vorübergehend, teilt suggestiverweise das Buch verschiedene physikalische und technische Ergebnisse sowie technische Einzelheiten in 13 Kapiteln, und 8 Anlange mit.

Der Herausgeber der deutschen Bearbeitung, Prof. Dr. Dessauer sowie der Verlag Ernst Reinhardt A. G. Basel, haben einen besonderen Wert auf eine möglichst sorgvolle äussere Form des Werkes gelegt. In dieser Weise haben die Ergebnisse der Naturforscher und Ingenieure, die in Laboratorien und Konstruktionssälen gefunden wurden, in ganz bedeutsamerweise, hoffentlich nur zum Schutze und zur Vertiefung des Friedens der Menschheit eingreifen. Dadurch wurde die Kulturmenschheit vor verantwortungsvolle Entscheidungen gestellt, um dadurch auf Basis eines heissesten und ehrlichsten Bestreben der Wissenschaftler der Welt, die wissenschaftliche Mitarbeit zum Wohle der ganzen Menschheit auszubauen and zu vertiefen.

* * *

D. I. M.

Jeffrey R. Stewart, F. A. I. C., - *The National Paint Dictionary*, - assisted by Eugene F. Hickson and Raymond B. Seymour, 3-e édition revue, 704 pg., 200 figures, 1948; Editeur Stewart Research Laboratory, Washington D. C.

L'essor pris dans le dernier temps par l'industrie de peinture, de laques et de vernis, grâce à la découverte de nouveaux matériaux premiers, et surtout des matières plastiques synthétiques, a déterminé le Stewart Research Laboratory de Washington d'éditer un dictionnaire national de peinture.

M. Jeffrey R. Stewart, ingénieur chimiste, a assumé le soin de rédiger cet ouvrage dans les meilleurs conditions.

Les termes contenus dans ce dictionnaire peuvent être diviser en 6 catégories: 1. Termes qui indiquent les matières brutes employées dans la production de la peinture et des produits alliés; 2. Les noms commerciaux (trade names) des matériaux bruts et de certains produits finis; 3. Mots indiquant les procéssus, les méthodes et les systhèmes etc.; 4. Termes indiquant les instruments scientifiques utilisés; 5. Mots indiquant couleurs, effets optiques, textures etc. et 6. Termes variés, qui donnent des informations au lecteur, expressions en jargon employé particulièrement dans l'industrie.

Toutes les notions sont concises et très exactes. A titre d'exemple nous reproduisons quelques termes:

— *Abracol:* $CH_3 . C_6 H_4 . SO_2 . C_6 H_4 . NH_2$. Le nom commercial de la para-toluène-sulfanilide, corp solide blanc cristallisé utilisé comme plastifiant des laques.

— *Nigrite.* Une variété d'asphalte. Un remplaçant pour la gutta-percha du susdit, peut être produit par mélange du résidu de la distillation de l'ozokérite avec du caoutchouc.

— *Saponification value:* La quantité en milligrammes d'hydroxyde de potassium nécessaire pour saponifier un gramme d'huile ou de graisse. C'est la même chose que le nombre de saponification.

Ce dictionnaire répond bien au but qu'il s'est proposé l'auteur, servir au personnel scientifique et technique, qui travaille dans tous les laboratoires des produits nécessaires à la peinture et aux industries alliées.

C. V. GHEORGHIU

* * *

E. S. Duthie, - *Molécules contre microbes*, Traduit de l'anglais par Marcel Florkin, Collection „Pointes de la Science", Editions Desoer, Liège, Belgique; Ed. Eyrolles, Paris, 1947, 206 pg.

La découverte et l'utilisation des substances chimiques, capables de tuer les agents des maladies dans l'organisme humain, est une des triomphes de la médecine moderne.

Les succès dans le domaine de la chimiothérapie se sont succédés rapidement les dernières années, et dans cet ouvrage E. S. Duthie nous montre comment on est parvenu à ces importantes découvertes. Jusqu'au milieu du siècle précédent la quinine, l'émetine et le mercure étaient les seuls médicaments connus, qui tuaient les germes responsables de maladies.

C'est sur les travaux d'Ehrlich que la pathologie a fondé le diagnostic des maladies du sang et les méthodes de leur traitement correct. Les recherches sur les toxines et les antitoxines montrèrent l'action des substances chimiques sur les céllules de l'organisme.

Des expériences entreprises depuis 1904 conduirent à la découverte de deux séries de médicaments, utilisés encore de nos jours : les colorants et les arsénicaux. A la première série appartiennent le rouge et le bleu typan, colorants particulièrement actifs contre les trypanosomes et plus tard la germanine (un dérivé d'urée), lancée par la firme Bayer, éfficace dans les premiers stades de la maladie du sommeil.

En 1909 la découverte de P. Ehrlich et Shiga du salvarsan et du néosalvarsan, employés avec succès dans le traitement de la syphilis, ne connut pas de rival dans la thérapeutique antisyphilitique. Les chercheurs des laboratoires Bayer après de longs travaux, réussirent à synthétiser l'atebrine (1933) et la plasmoquine, antimalariques spécifiques, plus efficaces et moins toxiques que la quinine.

Dans la lutte contre les maladies transmises par les insectes, la découverte des propriétés du D. D. T. (dichlordiphényl-cloréthane) par A. Müller marqua un grand succès. Cet insecticide idéal fut largement utilisé aux armées au cours de la guerre dans des circonstances diverses. Mais l'une des plus grandes victoires de la chimie fut la découverte des sulfamides. En 1932 Domagk montra que le prontosile a une action bactéricide suprenante. Aussitôt les chimistes du monde entier se mirent au travail, ajoutant des groupements à la molécule sulfanilamide et retranchant d'autres groupements, ainsi que vers 1942 au moins 3600 dérivés avaient été synthétisés et soumis à l'expérimentation. Le dernier médicament, la pénicilline, decouverte par Sir Alexander Fleming, un antibiotique, dont les propriétés sont uniques dans l'ensemble des substances chimiothérapeutiques. L'activité remarquable de cette substance contre beaucoup de bactéries pathogènes, fait un sujet intéressant et les chercheurs d'Oxford se mirent à la poursuite de son isolement et de sa purification dès 1939. A. Florey

et F. Chain réussirent à l'isoler et lui donner la formule chimique. Au cours des dernières années la recherche de nouveaux antibiotiques a donné naissance à une activité extraordinaire, et la streptomycine est vraisemblablement le plus prometteur, particulièrement contre les Gram-Négatifs.

Ce livre très intéressant, contient aussi des planches admirables et 4 tableaux résumatifs des bactéries et les maladies qu'elles provoquent.

Le Dr. Duthie, actuellement ataché à l'Institut Lister d'Elstree, réussit à nous donner une idée du travail énorme que les savants ont dû accomplir pour construire la chimiothérapie.

LÉONIE STOICESCU-CRIVETZ

* * *

Homer Vincent Craig, *Vector and Tensor Analysis* McGraw Hill Book Company, Inc., New York and London, 1943, First edition, Fourth Impression, XIV+434 pag.

With regard to the necessity for economy of time in the training of engineers and physicits the author considers – according to the ref. mining and experience – of paramount importance that vector analysis be introduced into their program as early as possible and used whenever advantageous. For this reason the book required a thorough knowledge of the standard first course of calculus together with a slight acquintance with elementary differential equations.

In addition to the belief of several authors (See, autside the bibliography indicated by the author, i. g. the volumes on General Vector-Analysis, by Marcolongo, Burali-Forti, and Boggio, on Vector and Tensor Analysis by Cotchin (in russian),...) that vector analysis should be employed freely in topics in advanced calculus, the author considers that an interplay of classical vector analysis and tensor analysis would be advantageous and uses tensor notation in the theory of linear equations and determinants.

The book is dividel in four parts. The first, is dedicated to the mathematical backgrounds (114 pages); the second, to the elementary vector analysis: The algebra of vectors; A simple N-dimensional Space; The differential calculus of vectors and Integral transformations (135 pages); the third, to tensors and extensors: The tensors concept; Extensors and the differential calculus of tensors (73 pages); the fourth, to different applications: Classical Dynamics including the Mechanics of Continuons Mediums with some exemplifications concerning the stress tensor and certain equations of Fluid Mechanics; special relativity

containing some ideas about the Relativistic Mechanics of continuons medium and General Relativity (45 pages).

May I express by this occasion my sincerely wishes concerning the unification during the next mathematical international congress (1950, Cambridge, Mass.), of the notations on vector and tensor analysis ?

I wish to emphasize various invariantive procedures, utilised by the author systematically with the help of *Extensors*, formed from tensors by differentiation with respect to the parameter and taken for the most part from the authors papers. The book contains also a number of problems and some very interesting suggestions concerning the preparation of different expository papers, the bibliography corresponding to its various parts and the index.

The excellent typographical presentation – a veritable success of the „invariantive" tradition of the McGraw-Hill Book Company – contributes to orient and characterise for the uninitiated the aspect of the material, very important in different branches of the exposition of pure and applied mathematics.

D. I. MANGERON

* * *

Marc Giauque, – *Technologie d'Ajustage Mécanique*. Edition de l'Ecole Technique de Québec, 1942, II-ème edition.

Volume relié toil rouge, 626 pages, 857 figures.

L'auteur, chef-instructeur des atéliers de mécanique à l'Ecole Technique de Québec, à la suite de vingt-cinq ans de pratique et d'expérience, traite dans les 46 chapitres du livre, avec une compétance notoire, toutes les questions et les problèmes, concernant l'enseignement et la pratique de l'ajustage mécanique des atéliers. L'exposé commence par les importants conseils et recommandations sur les accidents possibles du travail, que tout apprenti et ouvrier est obligé de bien connaître.

Chaque outil de l'atélier est considéré séparément, et sans aucune descriptions inutile. En se basant presque complètement sur les nombreuses figures el photos, on fait comprendre d'une manière parfaite, la meilleure utilisation pendant le travail et on attire l'attention sur les soins à prendre et les dangers qui peuvent suivre si la manutention des utils n'est pas faite dans les conditions indiquées.

Les organes de transmission, les organes d'assamblage et les différentes opérations comme la trompe le revenue, le recuit et le molétage, la soudure, le tournage et le travail à mandrin sont traités avec une grande précision et dans des termes faciles à comprendre. Le file-

tage de tous les points de vue, est exposé en seize chapitres et embrasse toutes les questions possibles sur ce sujet théorique et surtout pratique.

La clarté de traiter les divers sujets, les très nombreuses fugures et photos, les descriptions courtas et néanmoins complètes, constituent la caractéristique de ce livre, qui représente un des manuels indispensables à tout ouvrier d'un atélier mécanique.

MIHAI VASILIU

* * *

Ştefan Balan; Octavian Vlad, - *(Raccolta di Problemi di Meccanica), Culegere de Probleme de Mecanică, Statica,* 600 probleme rezolvate, Bucureşti, Imprimeria Căilor Ferate Române, 1946, IX + 267 pag.

La meccanica razionale consta di un insieme di concetti e di metodi generali che non possono essere chiariti ed assimilati se non attraverso a numerosi e svariati esercizi. E soprattutto con le applicazioni a problemi concreti che la nostra scienza contribuisce efficacemente alla formazione mentale degli ingegneri, dei fisici, dei matematici.

Questo libro si propone di aiutare gli studenti a raggiungere una discreta sicurezza di impostazione e una certa abilità di risoluzione dei problemi di Statica. All'uopo si sono utilizzati tranne parecchi risultati contenuti nelle raccolte, nei trattati e nelle riviste romene - e qui bisogna mentovare l'impareggiabile continuità di sforzo di apparizione de la „Gazeta Matematica" e de la „Rivista Matematica di Timişoara" - le raccolte oramai classiche di Föppl, Menge-Zimmermann,...

La risoluzione dei vari problemi e esercizi, abbastanza ben ordinati, è eseguita con cura, i disegni sono chiari ed i risultati corretti.

Aspettiamo con l'impazienza, giustificata esclusivamente dalla fidelta alla nostra vocazione scientifica, la stampa degli altri volumi destinati a completare la raccolta affinchè tutti i capitoli tradizionali della meccanica vi siano rappresentati al completo, e raccomandiamo intanto alla nostra gioventù studiosa codesto libro, che, accanto alle ottime raccolte ricevute per il resoconto del nostro „Bollettino" (Vedasi ad es. Esercizi di Meccanica Razionale, Bruno Finzi e Paolo Udeschini, III, pag. 512 e segg.), le assicura una solida preparazione atta a vincere quell'intervallo difficile al varco che separa la Meccanica teorica dalle sue applicazioni.

D. I. M.

* * *

F. Brachet, J. Dumarqué et H. Pochard, – *Précis d'Algèbre,* Enseignement du second degré, Classe de Mathématiques, Paris, Libraire Delagrave, 1948, 222 pag.

Obiectul învățământului algebrei în cadrul școlilor cu caracter științific mediu, a ajuns astăzi aproape același în mai toate țările lumii. Astfel, mecanismul calculului algebric, ilustrat altădată numai cu probleme de rezolvare a ecuațiilor de gradul I, II și eventual a ecuațiilor de grad superior gradului doi cu o singură necunoscută sau cu exerciții privitoare la sisteme de ecuații liniare sau nu, reflectează acum și desvoltarea și nevoile technicei și a celor mai variate manifestări ale vieții sociale intense, prin introducerea și prezentarea grijulie a capitolelor de reprezentări grafice, de derivate și de funcții primitive.

Din excelentă serie de cărți noui, ce constituie curs secundar complect de matematici, semnate de autori și editate de librăria Delagrave, Paris, *Précis d'algèbre,* pe care-l recensăm aici, are multe calități, dintre care semnalăm o îngrijită îmbinare a educației algebrice cu intuiția geometrică, deosebit de bine subliniată cu prilejul studiului neegalităților de gradul al II-lea precum și reproducerea unui număr de exerciții si exemple ce constituie în parte probleme de bacalaureat și de sinteză. Cercetarea cărții poate fi utilă profesorilor noștri care aspiră la prezentarea manuscriselor la concurs pentru adjudecarea manualelor unice de algebră pentru învățământul mediu, cât și elevilor silitori dornici de probleme și exerciții cât mai variate în domeniile calculului algebric, acuațiilor algebrice „elementare", derivatelor cu aplicațiile lor și progresiilor și logaritmilor.

D. I. M.

* * *

Arthur do Prado, – *Action du photon sur l'électron. Théorie photocinétique de l'atome.* Duake, Neves & Cie, Rio de Janeiro, 62 pag.

Exposer et coordonner une théorie photocinétique de l'atome, élucider le problème de la constitution de la matière, créer une nouvelle conception sur la vitesse de la lumière, discuter la limite et la rétrogradation des raies du spectre, interpréter l'effet Raman, étudier les phénomènes d'absorption chez les électrolites et enfin apporter des contributions au problème de l'expansion de l'univers est le but de cette brochure d'environ 60 pages.

D'après l'auteur, l'univers est constitué exclusivement des neutrons et des photons. Comment pourrait-on expliquer alors le mouvement et

la discontinuité? (Voir à cet égard ce „Bulletin" II, 1946, où le réf. a exposé la formule de l'électron tournant dans un champ magnétique qui satisfait la condition de quantification).

L'agitation thérmique est attribuée par M. do P r a d o aux „thermons". On y conteste l'exactidute de la formule non relativiste de de B r o g l i e, confirmée par l'expérience. On fait une révision de la formule cinétique des gas en partant de l'existence du „photon le plus fréquent" et de la „vitesse la plus fréquente" qui se confond avec la vitesse moyenne quadratique maxwellienne autour de laquelle, conformément au calcul des probabilités, sont reparties toutes les vitesses possibles. Par une autre voie, l'auteur calcule les vitesses moléculaires et obtient des résultats concordantes. On obtient aussi l'absorption ionique sous l'action photochimique. Quant aux autres questions, nous les recommendons aux spécialistes.

I. N. CIOCHINA

* * *

M a u r o P i c o n e, – *Le calcul de la déformation d'un solide élastique encastré.* VII-e Congrès International de Mécanique appliquée Londres, 1948.

TANÁRKÉPZŐ INTÉZET

L'illustre académicien des „Lincei", Directeur du célèbre Institut pour les Applications du Calcul de Rome, M. M. P i c o n e, a présenté au VII-e Congrès International de Mécanique appliquée une nouvelle théorie concernant le calcul de la déformation d'un solide élastique, dont les résultats, que nous estimons décisifs pour certaines branches de la technique, restent à être vérifiées par l'expérience et dons les hypothèses ont été confirmés tout récemment par la *Commission des grands Barrages.*

Il s'agit d'une nouvelle formulation et par conséquent de la résolution du problème d'encastrement d'un corps élastique C dans un autre corps C', supposé fixe, que la théorie classique représentait en considérant *nul* le vecteur du déplacement en chaque point de la partie Σ le long de laquelle C est en contact avec C'.

Dans certains hypothèses serrant de plus près la réalité physique, M. P i c o n e introduit les vecteurs des déplacements et les vecteurs des pressions non nuls sur les facettes planes des points de la surface Σ et formule et développe une méthode de calcul numérique effectif pour le problème concernant la théorie mathématique de l'élasticité régie par la détermination des déplacements dans les nouvelles hypothèses mentionnées.

Tout en regrettant de ne pouvoir donner ici quelques détails plus développés concernant ces procédés nouveaux, nous espérons qu'il nous sera possible d'insérer dans notre „Bulletin" un mémoire de M. Picone relatif à ce sujet.

D. I. MANGERON

* * *

Eugène Darmois, – *Thermodynamique et rayonnement.* 1 vol. broché. 258. pages, 122 figures. Société d'Edition d'Enseignement. Paris, 1947.

Ce livre est la reproduction du cours professé par l'auteur à la Faculté des Sciences de Paris. Il offre un exposé particulièrement claire des principes et des fonctions de la thermodynamique. Dans le choix et la présentation des matières l'auteur a visé surtout le but didactique. Assez souvent il a introduit des questions d'un niveau supérieur à celui de la licence. Ainsi au chapitre VII sont étudiées les propriétés thermodynamiques d'une substance placée dans un champ électrique ou dans un champ magnétique. Une place relativement importante est réservée aux équilibres physico-chimiques. En passant en revue les propriétés des substances diluées l'auteur introduit l'activité, fonction très utilisée dans la thermodynamique des électrolytes forts. Au même chapitre est méntionnée l'action du champ gravifique sur une solution et l'action du champ centrifuge, dont l'importance et relevée par l'emploi des ultra centrifuges.

Dans le chapitre sur l'énergetique en général, et sur l'entropie et la probabilité on trouve un aperçu succint du principe du travail de Brönsted et de son concept d'énergie. Dans le chapitre suivant (XVI) l'auteur a su montrer toute l'importance du troisième principe de la thermodynamique pour la connaissance des lois des équilibres physico-chimiques. Il a donné aussi quelques détails sur l'affinité, suivis d'un aperçu sur les travaux de de Donder. L'auteur passe ensuite à l'étude du rayonnement thermique, de la loi de Kirchhoff, du rayonnement total et de la répartition de l'énergie dans le spectre du corps noir, pour finir sur les principes de la photométrie.

Le livre comporte de nombreux exercices qui faciliteront la compréhension et l'emploi des formules.

Il sera très apprécié des étudiants auxquel il est partiqulièrement destine et aussi des spécialistes qui y trouveront des renseignements très utiles.

G. COSTEANU

* * *

Et. Wolff, – *La science des Monstres.* Coll. : L'avenir de la science. Gallimard. Paris, 1948. 265 pag., 39 pl. phot, 60 fig. Prix : 580 frcs.

Elève de P. Ancel, Et. Wolff est l'un des maîtres incontestés de la Tératologie actuelle. Son livre, écrit en captivité, au camp d'Edelbach en Autriche, durant la dernière guerre, revu et complété ensuite à Strasbourg, nous donne un excellent aperçu des problèmes et des dernières conquêtes de la Tératologie, ainsi que des méthodes qui y sont employées.

La *Tératologie*, c'est-à-dire la science des monstres, devient une discipline scientifique au début du 19-me siècle, avec Etienne et Isidore Geoffroy Saint-Hilaire qui dressent une classification des monstruosités et en constituent une nomenclature qui correspondent encore à la plupart des nécessités acuelles. Ils eurent également des intuitions remarcables quant au déterminisme de celles-ci. La *Tératogénie*, c'est-à-dire la production expérimentale des malformations, s'est constituée au cours du 19-me siècle, notamment grâce aux travaux de Dareste. Les progrès de l'Embryologie expérimentale lui ouvrirent de nouvelles voies.

Il existe tout une gamme de malformations, à partir des monstruosités les plus aberrantes jusqu'aux anomalies les plus discrètes. On doit y distinguer deux groupes : celui des monstres doubles et celui des monstres simples. Ces deux groupes présentent un nombre infini de variantes, de combinaisons, qui dépassent tout ce qu'aurait pu créer la plus riche des fantaisies.

Quelles sont les causes des monstruosités ? Ou bien, plutôt, quel est le facteur qui provoque une malformation donnée et comment s'édifie-t-elle ? Une réponse peut nous être donnée par l'Anatomie et l'Embryologie comparées, mais il faut reconnaître que c'est la méthode expérimentale qui a le plus contribué à élucider le problème des monstres.

En effet, l'Anatomie et l'Embryologie peuvent expliquer certains processus anormaux d'une manière satisfaisante. Mais elles ne les expliquent pas tous, ne fournissant, dans la plupart des cas, qu'une hypothèse qui doit être controlée par l'expérience. Enfin, elles rendent compte des mécanismes, mais non pas aussi de la cause profonde des processus aberrants. Ce n'est que les méthodes expérimentales qui sont à même d'élucider définitivement la génèse des monstres et leur développement. En même temps, ce sont également elles qui ont mis en évidence les propriétés générales et fondamentales des embryons.

Les méthodes de la Tératologie expérimentale sont les mêmes que celles de l'Embryologie expérimentale. Elles peuvent être directes ou indirectes. Les premières consistent à modifier les conditions générales du développement de l'embryon, en ajoutant à son milieu habituel, différentes substances étrangères. Les méthodes directes sont plus sélectives, permettant d'agir sur un territoire précis et à un stade connu du développement. Elles emploient les marques colorées, les lésions localisées, la microchirurgie, les greffes, l'électrocautère et surtout les irradiations locales. De très belles expériences furent réalisées sur les embryons de Poissons, de Batraciens, d'Oiseaux, mais bien peu sur les Mammifères. La culture „in vitro" de leurs embryons rendue dorénavant possible, grâce aux recherches de G. Pincus (qui, soit dit en passant, constituent un vrai tour de force) permettront l'application des méthodes tératogènes directes au développement de ceux-ci.

L'emploi de toutes ces méthodes a permis l'explication de la plupart des monstruosités. Au cours de ces dernières quarante années, l'explication des malformations a singulièrement progressé. Comme le dit Et. Wolff, „les monstres en gagnant beaucoup d'intérêt, on perdu aujourd'hui beaucoup de leur mystère". C'est ainsi que les monstres doubles — comme les vrais jumeax—sont des êtres qui, au cours des premiers stades de leur développement, ont été fragmentés en deux parties plus ou moins indépendantes, contenant chacune un organisateur. Les duplications et les multiplications d'organes s'expliquent de la même manière, mais elles sont dues non pas à la fragmentation d'un germe entier à un stade précoce, mais à celle d'une simple ébauche à un stade ultérieur. Quant aux monstruosités simples, l'emploi de la méthode des irradiations localisées a permis à Et. Wolff de reproduire à volonté différentes malformations et d'en produire aussi de nouvelles. Elles dépendent presque toutes d'un arrêt plus ou moins rapide des divisions cellulaires dans la région atteinte, et correspondent, par conséquent, à l'arrêt de dévellopement d'un bourgeon.

Aujourd'hui, si toutes les malformations n'ont pu encore être reproduites, des possibilités illimitées d'investigation s'ouvrent à l'explorateur. On pourra bientôt reproduire expérimentalement certaines maladies constitutionnelles, étudier les conséquences d'une lésion précoce du coeur, du foie, d'une partie du système nerveux. On pourra remonter ainsi aux causes intimes de certaines affections et l'on aperçoit le parti que la Médecine pourra tirer de telles recherches.

Les nombreux résultats obtenus au moyen de ces recherches, ont permis de formuler les principales lois de la Tératogénése, dont

quelques unes furent déjà prévues par Et. Geoffroy Saint-Hilaire, telles la loi de l'arrêt du développement, ainsi que celle de l'union des parties similaires.

Parmi les monstruosités par excès il faut ranger les différents cas de l'hermaphroditisme chez les Vertébrés. L'intersexualité fut étudiée d'une manière spéciale par Et. Wolff et les expériences qu'il a réalisées montrent que ce phénomène a pour cause un trouble dans la production des hormones secrétées par l'embryon, soit que son organisme fabrique une hormone intermédiaire. Ces mêmes expériences éclairent, également, la persistance d'organes embryonnaires ainsi que le réapparition de certains caractères ancestraux, tels l'appendice caudal et la toison chez l'Homme ou bien les doigts surnuméraires de certains chevaux qui reconstituent le membre du Protohippus de l'époque miocène. Ici, également, on pourrait supposer que les secrétions anormales de l'embryon ou bien de la mère gestante pourraient avoir un rôle dans le maintient et le développement de tous ces caractères embryonnaires persistants chez l'adulte.

Les malformations héréditaires se constituent de la même façon que les malformations accidentelles ou expérimentales. Il est bien possible que là aussi, les anomalies soient dues à la secrétion d'une substance tératogène.

En somme, il ressort de l'exposé d'Etienne Wolff que toutes les malformations sont des modifications secondaires d'un plan d'ébauche qui se constitue d'abord selon le mode normal. Certaines d'entre elles sont dues au maintient de quelques caractères embryonnaires, d'autres sont déterminées, au contraire, par l'inhibition d'une ébauche." Le développement d'une malformation ne commence jamais sur un thème fantaisiste, et l'on peut dire, sans paradoxe, qu'un monstre a été normal avant d'être anormal".

La Tératologie se rattache donc à l'Embryologie normale. L'organisme monstrueux et l'organisme normal obéissent aux mêmes lois et, comme nous le dit Et. Wolff, "le monstre est l'exception qui confirme la règle". Voici pourquoi l'étude des monstruosités a amené l'auteur à passer en revu, avec beucoup de compétence, quelques uns des problèmes de la mécanique embryonnaire et de la Biologie, en générale. Voici pourquoi son livre ne saurait être recommandé avec trop de chaleur, non seulement à ceux qui s'intéressent à la Tératologie, mais aussi à tous ceux qui s'intéressent aux problèmes les plus actuels de la Biologie générale.

O. NECRASOV

* * *

M. Tisserand, E. Morice et J. Reboul, *Méthodes statistiques en Médecine et en Biologie.* Préface du Professeur A. Baudouin. Masson & Cie, Editeurs, Paris, 1947, XX + 181 pag.

Les principes fondamentaux du calcul des probabilités que Laplace, Poisson, Tchebycheff,... viennent de porter à un haut degré de perfection, ont trouvé depuis la moitié du siècle dernier nombre d'applications de plus en plus importantes intéressant la biométrie, les phénomènes héréditaires, génétiques, etc., et aboutissant, après avoir été mariés avec les vérités de l'Analyse Mathématique, en théories modernes de la lutte pour la vie de l'Ecole de Volterra,...

Peu à peu, grâce aux travaux des Quetelet, des Galton, des Gavarret, et autres, différents procédés du calcul numérique et de celui des approximations ont permis l'introduction d'une nouvelle manière de conduire la recherche en médecine et en biologie.

Parallèlement à la découverte des vraies conquêtes scientifiques dues à l'observation ou à l'expérimentation, les problèmes se proposant de déterminer la valeur d'une thérapeutique, le choix entre deux traitements, "qu'il sagisse de deux mèdications, de deux techniques opératoires ou de la mise en balance de la chirurgie avec la radiothérapie dans telle ou telle affection",... ont imposés l'introduction systématique de la statistique en médecine. De la sorte, la statistique médicale se trouve aujourd'hui au stade assez élevé.

C'est précisément le dessein de montrer les applications dans ce domaine des lois statistiques et de celles du calcul des probabilités que réalise ce livre.

Il est dû à un statisticien éminent et l'on y trouve présentées ces notions fondamentales d'écart type, de dispersion, de correlation, des séries statistiques, etc. qui peuvent sembler abstraites et rébarbatives aux naturalistes et aux médecins, privés d'une manière si injuste d'une préparation mathématique absolument nécessaire aujourd'hui, mais qui s'éclairent à la lumière de nombreux exemples montrant ce que l'on peut demander à la statistique et quelles sont les limites de son emploi.

Préfacé par l'illustre Doyen de la Faculté de Médecine de Paris, M. A. Baudouin, ce traité contient, outre l'introduction historique attrayante, les chapitres se dédiant aux classements des observations, à la représentation graphique des observations statistiques, où sont exposés les diagrammes cumulatifs et les graphiques à échelles logarithmiques essez bien exemplifiés, à l'étude des caractéristiques d'une série statistique, aux principaux types de distribution, au problème du jugement sur échantillons, aux séries statistiques à deux variables, aux séries chronologiques et aux méthodes de l'observation statistique.

Quelques tables numériques pour les fonctions gaussiennes de la forme

$$\sqrt{2\pi}\, F(t) = \int_0^t e^{-t^2/2}\, dt$$

et pour certains testes (de Pearson, Student-Fisher, ...) tant qu'un nombre de pages (162-174) d'initiation mathématique, dues à M. le Dr. Reboul, constituent un ensemble organiquement réuni qui, nous en sommes sûrs, obtiendra le succès auprès des médicins, biologues, naturalistes et rendra un service appréciable auprès les cercles beaucoup plus vastes de ses lecteur.

La bibliographie à la fin du volume, nombre de planches, de fiches et de graphiques tirées de la réalité médicale journalière, tant que la présentation du livre qui se trouve à l'hauteur traditionnelle de la Maison Masson & Cie, Editeurs, constitue la garantie de la diffusion bien méritée de ce traité.

Nous profitons de cette occasion exquise pour remercier de tout notre coeur les Maisons Editeurs pour l'obligeance d'avoir voulu nous faire parvenir régulièrement ses oeuvres scientifiques et techniques pour les comptes rendus dans notre „Bulletin".

D. I. MANGERON

* * *

Ion Iacovachi - *Turbina cu gaz în aviație. (Les turbo-réacteurs).* Tipografia Aeronauticei, 1948, 49 pages, 31 figures dans le texte.

L'auteur décrit dans cette brochure les turbo-réacteurs et les turbo-propulseurs, leur mode de fonctionnement et les éléments dont ils sont composés, reproduit les courbes caractéristiques, en terminant avec quelques considérations de la mécanique de la propulsion, sur la force de traction et sur le rendement total de la propulsion.

Cette étude est une continuation plus détaillée de la brochure éditée par l'auteur déjà en 1946, se rapportant aux „Derniers progrès dans la technique de l'aéronautique".

L'auteur explique aussi une série de notions, lesquelles, par suite d'un manque de normalisation de nomenclature dans ce nouveau domaine de l'aviation, de même que, par manque d'une classification juste des moteurs actuels à combustion interne, peuvent ainsi conduire à des confusions.

L'étude de M. l'Ingénieur Iacovachi est bien venu étant donné qu'elle contient des résultats récents nécessaires aux techniciens qui désirent enrichir leurs connaissances dans ce domaine.

EMIL GAIGINSCHI

LIVRES REÇUS PAR LA REDACTION *)

dont les comptes rendus seront publiés dans les volumes à paraître de notre „Bulletin", dans les cahiers annexes, dans les prochains numéros de la „Revue Scientifique" (Revista Ştiinţifică „V. Adamachi" - Jassy) ou bien dans d'autres revues scientifiques roumaines.

*) La rédaction de ce „Bulletin" renouvelle son invitation très chaleureuse adressée aux organismes scientifiques, universitaires, académiques et polytechniques tant qu'aux éditeurs, librairies et hommes de sciences ou techniciens spécialisés du monde entier de vouloir bien nous faire parvenir leurs publications. Ces publications seront réservées pour les comptes rendus dans une des revues scientifiques de notre pays et destinées pour combler les lacunes de l'Institut Mathématique et de la Bibliothèque Centrale de l'Institut Polytechnique (Polytechnic Institute, Technical University) de Jassy, détruits pendant cette terrible et cruelle guerre qui a assombri le monde pendant ces dernières années. Que tous les envoyeurs veuillent bien trouver ici l'expression de notre profonde gratitude!

1. R. C. Archibald, - *Mathematical Table Makers* (Portraits, Paintings, Busts, Monuments, Bio-bibliographical Notes), The Scripta Mathematica Studies, Number Three. Publ. by Scripta Mathematica, Yeshiva University, New-York, 1948, 82 pag.
2. A. Bachmeyer, G. Hartman, - *The Hospital in Modern Society*, The Commonwealth Fund Edit. New-York, 1943, 766 pag.
3. J. P. Bakker, - *Sur la simultanéité morphogénique et tectogénique des orogénèses récentes dans l'ouest et le centre de l'Europe*, considérées dans le cadre de l'altiplanation dénudative, Natuurwetenschappelijk Tijdschrift, Gent, 1948, 51 pag.
4. O. Belluzzi, - *Scienza delle costruzioni*, Vol. II. Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1948, 481-747 pag.
5. L. Bietry, - *Neue Kriterien zur experimentellen Beurteilung des Kommutations-Vorganges bei gleichstrome Maschinen*, Verlag H. Thalii & Co. Hitzkirch (Luzern), par E. T. Hochschule Zürich.

6. G. Boaga, – *Trattato di geodesia e topografia con elementi di fotogrammetria*, „Cedam"– Casa Editrice Dott. A. Milani, Padova, 1948, Vol. I–686 pag.; Vol. II–619 pag.
7. P. Bruyère, – *Rapport de la mission météorologique française sur les travaux effectués à Tamanrasset, pendant l'année polaire*, Gauthier-Villars, Paris, 1941, 42 pag.
8. F. Cahen, – *Réseaux de transport et de distribution d'énergie électrique*, Tome I, L. Eyrolles Editeur, Paris, 1943, 248 pag.
9. G. Candido, – *Scritti Matematici di Giacomo Candido* (raccolti e ordinati per incarico del figlio Francesco, dai proff. Enea Bortolotti ed Enrico Nannei. Ediz. fuori commercio, Casa editrice Marzocco, Firenze, 1948, 802 pag.
10. P. Chaumier, – *Le chauffage électrique du sol en horticulture*, Edit. Soc. pour le développement des Applications de l'électricité – A.P.E.L. – Paris, 1948, 94 pag., 54 figures.
11. E. Colerus, – *Mathematik für Jedermann:* Von Pythagoras bis Hilbert. Die Epochen der Math. und ihre Baumeister, Paul Szolnay Verlag, Wien, 1948, 362 pag.
12. E. Colerus, – *Mathematik für Jedermann:* Von Einmaleins zum Integral, Paul Szolnay Verlag, 1948, 403 pag.
13. W. Cords Parchim, – *Zahlen und Masse für den Landbaumeister*, Deutscher Zentralverlag GmbH, Berlin, Wien, 1947, 163 pag.
14. J. G. Daunt, – *Les mystères de l'électricité ou l'activité des Electrons*, Collection „Pointes de la Science", Editions Eyrolles, Paris, 1948, 229 pag.
15. R. Deaux, – *Leçons de Géométrie Analytique à trois dimensions*, G. Delporte, Mons, 1946, 325 pag.
16. P. M. Duffieux, – *L'Intégrale de Fourier et ses applications à l'optique*, Soc. anonyme des Impr. Oberthur, Rennes, 1946, 232 pag.
17. E. S. Duthie, – *Molécules contre microbes* (traduit de l'anglais par M. Florkin) Coll. „Pointes de la Science", Editions Eyrolles, Paris, 1947, 203 pag.
18. D. S. Evans, – *Les frontières de l'Astronomie* (traduit de l'anglais par R. Robins) Coll. „Pointes de la Science", Editions Eyrolles, Paris, 1948, 229 pag.

19. H. Eyraud, - *Précis de Mathématiques Economiques et fiscales*, Inst. de Science Financière et d'Assurances, Université de Lyon, 1948, 72 pag.
20. D. Faggiani, - *Introduzione alla Termodinamica tecnica*, Seconda Edizione, Libreria Editr. Politecnica-Cesare Tamburini, Milano, 1947, 470 pag.
21. J. S. Frame, - *Solid geometry*, First Edition, Mc Graw-Hill Comp. Publ. London, 1948, 339 pag.
22. A. Gloden, G. Palama, - *Bibliographie des Multigrades avec quelques notices biographiques*, Luxembourg, 1948, 64 pag.
23. J. D. Mc Goldrick, S. Graubard, R. Horowitz, - *Regulation Building in New-York City*, The Commonwealthl Fund, New-York, 1944, 743 pag.
24. L. V. Gurjar, - *Ancient Indian Mathematics and Vedha*, Idea Book Service, Siddharth College, Bombay, 1947, 202 p.
25. H. E. Handley, - *Health Center Building*, The Commonwealth Fund, New-York, 1948, 48 pag.
26. P. Harmegnies, - *Les principaux systèmes de mesure et leur coordination*, Assoc. des Ing. de la Faculté Polytechnique de Mons, 80 pag.
27. L. Hefftter, - *Kurvenintegrale und Begründung der Funktionentheorie*, Springer Verlag, Berlin, 48 pag.
28. D. W. & M. Hinde, - *Electric and Diesel-Electric Locomotives*, Mac-Millan & Co. Ltd. London, 1948, 366 pag.
29. K. Kutter, - *Höhlen und Klusen - ihre Entstehung im Faltengebirge* (Eine Erklärung, wie die Alpen und der Jura entstanden sind) M. Kutter-Kaiser-Verlag, Wattwil, 1948, 44 pag.
30. G. Martinez, - *I valori naturali ai sei cifre delle funzioni circolari di centesimo in centesimo di grado sessagesimale*, Armando Rossini Editore, Firenze, 1947, 44 pag.
31. A. B. Mays, - *Principles and Practices of Vocational Education*, First Edition, Mc. Graw-Hill Book Comp., Inc., New-York 1948, 303 pag.
32. W. Mikulaschek, - *Die Dissertationen der Eidgenössischen Technischen Hochschule*, Eine systematische Bibliographie 1909-1946, Verlag Lehman & Co., Zürich, 142 pag.
33. Ministero dei Trasporti, - Roma - *Le ferrovie italiane dello stato rinascono*, Edit. Tumminelli, Roma, 1948, 48 pag.

34. H. Mustard, – *Rural Health Practice*, The Commonwealth Fund, New-York, 1936, 603 pag.
35. W. Oppelt, – *Grundgesetze der Regelung*, Wolfenbütteler Verlagsanstalt, 1947, 118 pag.
36. B. d'Orgeval, – *Sur les surfaces algébriques dont tous les genres sont 1*; Gauthier-Villars Editeurs, Paris, 1945, 117 pag.
37. Th. Rennie & L. Woodward, – *Mental Health in Modern Society*, The Commonwealth Fund, New-York, 1948, 424 pag.
38. F. N. Rhines, – *Diagramas de Equilibros de Ligas metalicas*, Publ. da Scola Politecnica da Univ. São Paulo, Brasil, 1945, 110 pag.
39. J. Sanson, – *La Météorologie au service de l'agriculture*, O.N.M. 1946, Paris, 20 pag.
40. J. Sanson, – *Mémorial de la Météorologie Nationale*, publié sous la Direction de M. A. Viant, Ministère des Travaux Publics No. 30 O. N. M. Paris, 1945, 148 pag.
41. A. Speiser, – *Die Mathematische Denkweise*, Rascher & Co. A. G. Verlag. Zürich, 1932, 137 pag.
42. B. Stern, – *American Medical Practice in the perspectives of a century*, The Commonwealth Fund, New-York, 1945, 156 pag.
43. B. J. Stern, – *Medicine in Industry*, The Commonwealth Fund, New-York, 1946, 209 pag.
44. E. J. Stieglitz, – *A future for preventive medicine*, The Commonwealth Fund, New-York, 1945, 76 pag.
45. K. Terzaghi, – *Theoretical Soil Mechanics*, Fifth Printing. Chapman and Hall, London, 510 pag.
46. R. Thiébaut, – *Application des méthodes d'organisation scientifique du travail dans les usines textiles*, Edit. de L'Ind. textile, Paris, 1947, 412 pag.
47. A. Tirlemont, – *Précis de Géologie*, 2-e édition. G. Doin & Co. Edit., Paris, 1948, 552 pag.
48. E. D. Weiss, – *Air Transport*, Nr. 2 of the New Era Books, Art. & Educational Publ. Ltd. London & Glascow, 1946, 60 pag.
49. E. Wolf, – *La Science des Monstres*, „L'avenir de la Science", Librairie Gallimard, Paris, 1948, 265 pag.

Prof. D. I. MANGERON
Rédacteur du „Bulletin de
l'Institut Polytechnique de Jassy

Sommaire

du Tome III, fasc. 2 (Juillet à Décembre 1948)
du „Bulletin de l'Institut Polytechnique de Jassy"

		Pages
Al. C. Climescu (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy)	Notes D'Analyse II. L'interversion des dérivées partielles mixtes du second ordre	526
L. Brunier (Dr., Prof. Fac. Polyt. de Mons)	Sur l'intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires, à coefficients constants	532
Andrei Popovici (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. Bucarest)	La Physique d'Action. Une nouvelle physique unitaire	543
Cyp. Demars (Dr., Prof. à l'Univ. Liége)	Note sur le calcul du frettage des tuyaux en beton	683
N. Iosipescu (Ing., Prof. à l'Inst. Polyt. Jassy)	Principes modernes employés à la construction des appareils de voie	698
Walter Ciusa & Dr., Prof. à l'Univ. Bologna) *Giorgio Nebbia* (Dr., Prof. à l'Univ. Bari)	A new method for the identification of biological methyl donors	704
M. Dima & (Dr. Ing., Prof. à l'Inst. Polyt., Jassy) *El. Diaconescu* (M.me) (Assistant à l'Inst. Polyt. Jassy)	Sur la préparation des solutions injectables de sucre interverti	714
C. V. Gheorghiu & (Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy) *C. Budeanu* (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. de Jassy)	La condensation des isothiocyanates avec les oxymes. L'inversion optique d'une menthonoxime gauche sous l'action de l'isothiocyanate de benzoyle	721
T. Săveanu (Ing., Prof. à l'Inst. Polyt., Jassy)	Méthode pratique pour le calcul de l'eau évaporée dans la station d'évaporation de l'industrie du sucre	731
St. Procopiu & (Dr., Prof. à l'Univ. de Jassy) *E. Ionescu* (Ing., Assistant à l'Univ. de Jassy)	Eléments du magnétisme terrestre à Jassy en 1948	734
Victor L. Nadolschi (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. de Jassy)	Sur une méthode simple de réglage d'un équatorial	737

		Pages
Victor Gomoiu & (Dr., Prof. à l'Univ. de Bucarest)		
Viorica Gomoiu (Dr., Chef de Travaux à l'Univ., Bucarest)	L'histoire naturelle dans l'oeuvre „Danubius" de Marsil	740
C. Motaș & (Dr., Prof. à l'Univ de Bucarest)		
J. Tanasachi (M-me) & (Dr., Maître de Conf. Univ. Bucarest)		
N. Botnariuc Dr., Maître de Conf. Univ. Bucarest)	Sur quelques hydracariens recueillis en Yougoslavie dans le bassin de la Bosna	747
V. S. Ananthachar (Dr., Prof. à l'Univ. de Mysore, India)	A sufficient condition for the existence of a derivative	775
Etienne Fenyő (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt., Budapest)	Sur une classe d'équations intégrales et intégro-différentielles	776
Lucien Godeaux (Dr., Prof. à l'Univ., Liége)	Sur certains points unis isolés des involutions cycliques d'ordre 17 appartenant à une surface algébrique	782
Al. C. Climescu (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy)	Notes d'Analyse IV. Sur un développement analogue à la série de Lambert	790
C. P. Bogdan (Dr., Maître de Conf. à l'Univ. Jassy)	Sur les surfaces lieu de coniques II	796
I. Creangă (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy)	Sur une correspondance par plans tangents orthogonaux entre deux surfaces réglées	802
V. Petrescu & (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy)		
E. Luca (Dr. Ing., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy)	Sur des conditions d'améliorer la mesure de l'induction magnétique à l'aide de la spirale de bismuth	808
D. I. Mangeron (Dr., Prof. à l'Inst. Polyt. de Jassy)	Quelques procédés de calcul dans la théorie des formules de majoration des systèmes différentiels	814
Georges Alexa & (Dr. Ing., Prof. Inst. Polyt. Jassy)		
Cristofor Simionescu (Dr Ing. Maître de Conf. Inst. Polyt. Jassy)	Considérations sur l'huile de pépins de raisins	819

COMPTES RENDUS DES LIVRES REÇUS 824

K. P. Téodortchik–Systèmes auto-oscillatoires (en russe). Editions technico-théoriques d'Etat. Moscou-Léningrad, (1948). 2-e éd. augmentée. (D. I. Mangeron).

W. Gaade – Organisch-chemische nomenclatur, (en hollandais). Elsevier Publishing Company, Inc. Amsterdam, New-York, (1949). (C. V. Gheorghiu).

Giuseppe Bruni - Chimica generale e inorganica con elementi di chimica organica. VII Edizione nuovamente rifatta e ampliata, con la collaborazione del Prof. M. A. Rollier del Politecnico di Milano. Volume III. Elementi di chimica organica a cura di Mario Alberto Rollier. Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini, Milano, (1947). (C. V. Gheorghiu).

Jarques Verdéyen - Mécanique du sol et Fondations. 1 vol. (1948). Editions Desoer, Liège et Eyrolles, Paris. (Aurel Cernătescu).

S. E. Chaïkine - Cours général de physique, T. I. Mécanique. (en russe) 2-e éd. revue et augmentée. Editions technico-théoriques d'Etat, Moscou-Léningrad, (1947). (D. I. Mangeron).

N. E. Kotchine, I. A. Kibelj et *N. V. Rosé* - Hydromécanique théorique (en russe). Première partie, 4-e éd., revue. Editions technico-théoriques d'Etat, Léningrad-Moscou, (1948). (D. I. Mangeron).

P. S. Modenoff et *G. L. Neviaževskij* - Cours de mathématiques supérieures (en russe). Editions technico-théoriques d'Etat. Moscou-Leningrad, (1948). (D. I. Mangeron).

I. B. Levénson - Théorie des mécanismes et des machines. Cinématique et dynamique des mécanismes. (En russe). Editions théorico-techniques de la littérature de construction des machines. Moscou, (1948). (D. I. Mangeron).

Mario G. Salvadori - The Mathematical solution of engineering problems (with a collection of problems by Kenneth S. Miller). McGraw-Hill Book-Company, Inc. New-York-Toronto-London, (1948). (D. I. Mangeron).

H. Delaby - Principes fondamentaux de Télévision. Edition Eyrolles, Paris, (1948). (Alex. Papp).

P. David - Cours de Radioélectricité générale. Vol. IV. Eyrolles Editeurs, Paris, (1948). (Alex. Papp).

Kurt F. Kollbrunner - Fundation und Konsolidation. Vol I. Vol. II. Edition: Schweizer Druck-und Verlagshaus, Zürich. (A. Cernatescu).

G. Malécot - Les Mathématiques de l'Hérédité, Paris, Masson et C-ie, (1948). (Ioan G. Botez).

L. Brunier - Leçons sur le calcul symbolique. 2-ème édition. Faculté Polytechnique de Mons. Cercle d'éditions des Etudiants (1948). (Al. C. Climescu).

Ruel V. Churchill - Introduction to complex variables and applications. Mc Graw-Hill Book Company, New-York, Toronto, London, (1948). (Al. C. Climescu).

Lucien Godeaux - Analyse Mathématique (Cours de la Faculté des Sciences de l'Université de Liège). 3 vol. Ed. Sciences et Lettres, Liège, (1946-1947). (Al. C. Climescu).

L. Brunier - Cours d'analyse mathématique. Eléments de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Faculté Polytechnique de Mons. Cercle d'Editions des Etudiants. (1948). (Al. C. Climescu).

Léon Moret - Précis de Géologie, Masson et C-ie, Paris, (1947). (Gh. Hasan).

Livio Livi - Elementi di Statistica, 8-e éd. Cedam, Casa Editrice Dott. Antonio Milano, Padova, (1948). (D. I. Mangeron).

J. J. Burckhardt - Die Bewegungsgruppen der Kristallographie. Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften 13. Verlag Birkhäuser, Basel. (1947). (Al. C. Climescu).

Bruno Finzi, Maria Pastori – Calcolo tensoriale e applicazioni. Nicola Zanichelli, Editore, Bologna, (1949). (M. Haimovici).

J. G. Crowther and *R. Whiddington, C. B. E. F. R. S.* – Science at war. Department of Scientific and Industrial Research, N. M. Stationery Office, (1948) (reprinted) London, (D. I. Mangeron).

E Bottani, R. Sartori – Elettrotecnica. Vol. I. Circuite în regime staziomario. Libreria editrice Politecnica Cesare Tamburini-Milano (1947). (Gh Vasiliu).

Selman Waksman – Microbial Antagonism and Antibiotic Substances. (1947). The Commonwealth Fund, New-York. (D. Brănişteanu).

D. W. Hinde and *M. Hinde* – Electric and Diesel-Electric Locomotives. MacMillan and Co, Limited, (1948). (D. I. Mangeron).

F. Le Lionnais – Les grands courants de la pensée mathématique. Collection „L'Humanisme Scientifique de demain", Editions des „Cahiers du Sud", (1948). Paris. (Adolf Haimovici).

M. Brelot – Les principes mathématiques de la Mécanique Classique. Editions Arthaud, Grenoble-Paris (1945). (D. I. Mangeron).

Gustav Mie – Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. 3-te Aufl. (1948). Verlag Ferdinand Enke, Stuttgart. (St. Procopiu).

S. Chapman and *J. Bartels* – Geomagnetism. Vol. I. Geomagnetic and related Phenomena. Vol. II. Analysis of the data, and physical Theories. (The international Series of Monographs on Physics) Oxford, at the Clarendon Press, (1940). (St. Procopiu).

Henry D. Smyth – Atom-Energie und ihre Verwertung im Kriege, Ernst Reinhardt Verlag A. G., Basel. (1947). (D. I. Mangeron).

Jeffrey R. Stewart, F. A. I. C. – The National Paint Dictionary, (1948). Editeur Stewart Research Laboratory, Washington D. C. (C. V. Gheorghiu).

E. S. Duthie – Molécules contre microbes. Editions Desoer, Liège, Belgique ; Ed. Eyrolles, Paris, (1947). (Léonie Stoicescu-Crivetz).

Homer Vincent Craig – Vector and Tensor Analysis, McGraw Hill Book Company, Inc., New York and London, (1943). (D. I. Mangeron).

Marc Giauque – Technologie d'Ajustage Mécanique. Edition de l'Ecole Technique de Québec, (1942) (Mihai Vasiliu).

Ştefan Balan; Octavian Vlad – Culegere de Probleme de Mecanică, Statica, Bucureşti, Imprimeria Căilor Ferate Române, (1946). (D. I. Mangeron).

F. Brachet, J. Dumarqué et *H. Pocard* – Précis d'Algèbre, Paris, Libraire Delagrave, (1948). (D. I. Mangeron).

Arthur do Prado – Action du Photon sur l'électron. Théorie photocinétique de l'atome. Duake, Neves & Cie, Rio de Janeiro (I. N. Ciochina).

Mauro Picone – Le calcul de la déformation d'un solide élastique encastré. VII-e Congrès International de Mécanique appliquée, Londres, (1948). (D. I. M.).

Eugène Darmois – Thermodynamique et rayonnement, Société d'Edition d'Enseignement. Paris, (1947). (G. Costeanu).

Et. Wolff – La science des Monstres. Gallimard. Paris, (1948). (O. Necrasov).

M. Tisserand, E. Morice et *J. Reboul* – Méthodes statistiques en Médecine et en Biologie. Masson & Cie, Paris, (1947). (D. I. Mangeron).

Ion Iacobachi – Turbina cu gaz în aviaţie. Tipografia Aeronauticei, (1948), Bucureşti. (Emil Gaiginschi).

Le travail typographyque concernant ce „Bulletin" a été exécuté par les soins de

MM. SAMUEL SAFIR, chef de travaux,
GEORGES RĂCHIŢEANU, assistant,
SANDU HAIMBERG, assistant,
IOSIF BERVIN, mécanicien en chef.